

РАСЧЕТ  
ИНДУКТИВНОСТЕЙ



П. А. Калантаров  
Л. А. Цейтлин

П. А. Калантаров  
Л. А. Цейтлин

---

# РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

---

Справочная книга

П. А. Калантаров  
А. А. Цейтлин

---

# РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

Справочная книга

---

Издание третье ,  
переработанное и дополненное



Ленинград  
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ  
Ленинградское отделение  
1986



Scan AAW

ББК 31.22

К 17

УДК 621.3.011.3 (035.5)

Рецензент *Н. Н. Тиходеев*

**Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А.**

К 17      Расчет индуктивностей: Справочная книга. — 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1986. — 488 с.: ил.

Справочное руководство по расчету индуктивностей содержит формулы, таблицы и кривые для расчета собственных и взаимных индуктивностей проводов, контуров и катушек различной формы. Общие формулы и методы расчета иллюстрированы числовыми примерами. Второе издание вышло в 1970 году. Третье издание дополнено материалами, освещающими влияние на индуктивность магнитных и электромагнитных экранов.

Для инженерно-технических и научных работников, занимающихся электромагнитными расчетами.

К  $\frac{2302010000-103}{051 (01)-86}$  126—86

ББК 31.22

© Энергоатомиздат, 1986

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Для нового издания материал книги заново пересмотрен, частично изменен и дополнен. В частности, более полно рассмотрены вопросы расчета индуктивностей при весьма высокой частоте, изложены энергетические (вариационные) методы расчета и оценки индуктивностей. Книга дополнена главой, в которой даны формулы и кривые для расчета индуктивностей экранированных проводов, контуров и катушек. В работе над этой главой принял участие А. В. Щукин, разделивший со мной труд по выводу ряда новых формул и выполнивший числовые расчеты для приведенных в ней кривых.

Ряд весьма ценных замечаний по содержанию книги сделал проф. Ю. Я. Иоссель. Рецензирование книги любезно согласился взять на себя чл.-корр. АН СССР Н. Н. Тиходеев, рекомендации которого были учтены мною при окончательной подготовке рукописи к печати. Считаю своим приятным долгом выразить всем указанным лицам искреннюю признательность за оказанную мне помощь.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по-адресу: 191065, Ленинград, Марсово поле, 1, Ленинградское отделение Энергоатомиздата.

*Л. Цейтлин*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Собственные и взаимные индуктивности принадлежат к числу основных параметров электрических цепей, и их определение представляет собой одну из важнейших задач, возникающих при расчете цепей и исследовании происходящих в них физических процессов.

Инженеры-электрики встречаются с расчетом индуктивностей при решении многих основных вопросов, относящихся



к различным областям электротехники (передача энергии, электрические измерения, электрические печи, техника связи и т. д.). Однако, несмотря на важное прикладное значение этого вопроса, существующие методы расчета индуктивностей и даже готовые расчетные формулы до сих пор недостаточно хорошо известны широким кругам инженеров и научных работников. Основной причиной этого является то обстоятельство, что литература по расчету индуктивностей, состоящая из весьма большого числа статей, опубликованных в различных физических и электротехнических журналах, не систематизирована, а соответствующая книжная литература крайне бедна и почти не отражает работ советских авторов, исследования которых дали в этой области много нового.

Потребность в издании справочной книги, посвященной расчету индуктивностей, назрела уже давно, а потому инициатива, проявленная в этом вопросе авторами, получила поддержку со стороны издательства.

К сожалению, тяжелая болезнь и последовавшая за ней смерть П. Л. Калантарова прервали нашу совместную работу над книгой, и в дальнейшем мне пришлось продолжать эту работу уже одному. Поэтому ответственность за возможные недочеты книги лежит на мне.

При работе над книгой мы с самого начала отказались от мысли восполнить многочисленные пробелы, существующие в области расчета индуктивностей, а также и от мысли включить в нее все, что когда-либо было сделано в этой области. Из обширного материала, разбросанного по разным литературным источникам, мы стремились отобрать лишь то, что является наиболее ценным для практического использования.

Основной справочный материал книги состоит из расчетных формул, таблиц и кривых, приведенных в гл. 2—11. Пользование этим материалом, как правило, не требует обращения к гл. 1, где изложены общие основания расчета индуктивностей. Эту главу нужно рассматривать как теоретическое дополнение к книге, и к ее содержанию следует обращаться лишь в тех случаях, когда в гл. 2—11 нет готовых формул, таблиц и кривых, дающих возможность непосредственно рассчитать искомую индуктивность.

Для удобства пользования книгой текст и формулы, представляющие ограниченный интерес, а также все числовые примеры набраны петитом.

*Л. Цейтлин*

## УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

1. Основной справочный материал книги (расчетные формулы, таблицы и кривые) дан в гл. 2—11. В начале каждой из этих глав сделаны общие замечания, которые следует иметь в виду при пользовании содержащимся в них материалом. В тех случаях, когда в книге нет готовой формулы, таблицы и кривой, дающей возможность рассчитать искомую индуктивность или взаимную индуктивность, следует обратиться к общим формулам и методам, данным в гл. 1. Эта глава может служить также для общего ознакомления с теоретическими основаниями расчета индуктивностей.

2. В книге принята рационализованная форма написания выражений. При желании перейти к нерационализованной форме необходимо все выражения для индуктивностей и их составляющих умножить на 4 $\pi$ .

3. При пользовании принятой в СССР Международной системой единиц (ГОСТ 8.417—81) индуктивности, найденные по приведенным в книге формулам, таблицам и кривым, будут выражены в генри. Для перехода к единицам системы СГС числовые значения индуктивностей, выраженные в генри, следует умножить на 10<sup>9</sup>.

4. Во всех случаях, когда не оговорено противное, углы выражены в отвлеченной мере, т. е. в радианах.

5. Во всех случаях, когда не оговорено противное, приняты следующие общие обозначения:

$\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость вещества;

$\mu_0$  — магнитная постоянная;

$\gamma$  — удельная электрическая проводимость вещества;

$\omega$  — угловая частота переменного тока;

$s$  — площадь поперечного сечения провода;

$\lambda$  — периметр поперечного сечения провода.

6. Принято, что  $\mu = \mu_0$ , если не оговорено противное. В случаях, когда  $\mu \neq \mu_0$ , предполагается, если нет специальных указаний, что  $\mu = \text{const}$ , т. е. не зависит от магнитного состояния вещества.

7. Под *линейными проводами и контурами* понимаются провода и контуры, линейные размеры поперечного сечения которых малы по сравнению с другими их размерами и взаимными расстояниями. При расчете *взаимных индуктивностей* линейные провода и контуры рассматриваются как *бесконечно тонкие*.

8. Под *низкой частотой* понимается частота, при которой неравномерность распределения тока по сечениям проводов незначительна.

Под *высокой частотой* понимается частота, при которой неравномерность распределения тока по сечениям проводов значительна и должна быть учтена при расчете.

Под *весьма высокой частотой* понимается частота, при которой ток в каждом проводе можно считать сосредоточенным в весьма тонком слое вблизи поверхности провода; если не оговорено противное, толщина этого слоя принимается равной нулю. Степень неравномерности распределения тока по сечению провода в каждом конкретном случае можно оценить, сравнивая линейные размеры поперечного сечения провода с длиной волны электромагнитных колебаний в проводнике  $\lambda_{\sim}$  или с глубиной проникновения электромагнитной волны

$$\delta = \sqrt{2} / \sqrt{\omega \mu \gamma}.$$

Случай низкой частоты имеет место, когда глубина проникновения  $\delta$  больше соответствующих линейных размеров поперечного сечения провода; случаи высокой и весьма высокой частоты — когда  $\delta$  меньше и соответственно значительно меньше этих размеров.

9. Если расчетная формула дает искомую величину в виде суммы нескольких слагаемых (в частности, в виде бесконечного ряда), следует оценить относительную величину отдельных ее членов и до выполнения расчета отбросить все члены, не влияющие на результат расчета при принятой степени точности (см. примеры 3-1, 5-4, 5-6).

10. Если формулы содержат разности относительно близких величин, т. е. когда результат алгебраического сложения двух или нескольких чисел значительно меньше отдельных членов суммы, следует иметь в виду, что степень точности результата значительно ниже той степени точности, с которой вычисляются отдельные члены, входящие в формулу (см. пример 4-3).

11. Для возможности сравнения различных формул и методов и оценки степени их точности большинство расчетов в числовых примерах выполнено с сохранением четвертой (а иногда и пятой) значащей цифры.

В инженерных расчетах, как правило, достаточно трех значащих цифр и можно пользоваться логарифмической линейкой.

12. При интерполировании по таблицам следует руководствоваться указаниями приложения 2.

13. При необходимости выполнения численного интегрирования можно пользоваться формулами, данными в приложении 3.

14. В тех случаях, когда это не может привести к недоразумению, вместо термина «собственная индуктивность» в книге применяется также и более краткий термин «индуктивность».

## ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ РАСЧЕТА ИНДУКТИВНОСТЕЙ

### 1-1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Понятие о собственных и взаимных индуктивностях контуров тесно связано с понятием о магнитном потоке, сцепляющемся с контуром.

Рассмотрим замкнутый геометрический контур  $l$ , расположенный в магнитном поле, и какую-нибудь ограниченную этим контуром поверхность  $S$  (рис. 1-1). Выберем положительное направление обхода контура  $l$  и направление положительной нормали к поверхности так, чтобы они образовали праввинтовую систему. Поток вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  сквозь поверхность  $S$  в направлении ее положительной нормали определяется равенством

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS \quad (1-1)$$

и называется *магнитным потоком*, пронизывающим эту поверхность, или магнитным потоком, сцепляющимся с контуром  $l$ . Поток  $\Phi$  можно разбить на единичные трубки магнитной индукции, т. е. на трубки, для каждой из которых поток равен единице. Если каждую единичную трубку изобразить магнитной линией, совпадающей с осью этой трубки, то магнитный поток  $\Phi$  можно найти, определив, сколько раз магнитные линии пронизывают поверхность  $S$  в направлении ее положительной нормали.

Поверхность  $S$  может иметь сложную форму (рис. 1-2), и каждая магнитная линия, вообще говоря, может пронизывать поверхность  $S$ , а следовательно, и сцепляться с контуром  $l$ , ограничивающим эту поверхность, не один, а несколько раз. В этих случаях величина  $\Phi$ , определяемая равенством (1-1), будет отличаться от числа  $\varphi$  единичных магнитных трубок, входящих в состав потока, пронизывающего поверхность  $S$  (на рис. 1-2  $\varphi = 6$ ,  $\Phi = 11$ ). В отличие от величины  $\varphi$ , величина  $\Phi$  называется *полным магнитным*

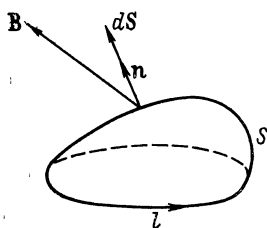


Рис. 1-1

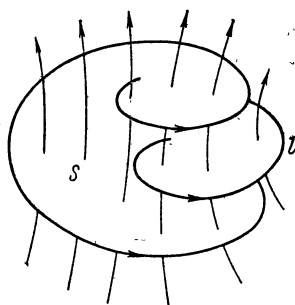


Рис. 1-2

потоком или числом потокоцеплений. В общем случае  $\Phi \neq \varphi$ , и, лишь если каждая магнитная линия сцепляется с контуром только один раз, будем иметь  $\Phi = \varphi$ . В другом частном случае, когда все магнитные линии сцепляются с контуром одинаковое число ( $\omega$ ) раз,  $\Phi = \omega\varphi$ .

Приведенные определения имеют смысл, очевидно, лишь в применении к геометрическим контурам, так как только в этом случае можно говорить о поверхности  $S$ , ограниченной каким-либо контуром. Для реальных электрических контуров, образованных проводниками конечного сечения, понятие о сцепляющемся с ними потоке вводят следующим образом. Ток  $i$  в контуре разбивают на элементарные трубки (нити) тока бесконечно малого сечения и находят полный поток  $\Phi$ , сцепляющийся с каждой из трубок (рис. 1-3). Под полным потоком  $\Psi$ , сцепляющимся со всем контуром (со всем током  $i$ ), понимают величину

$$\Psi = \frac{1}{i} \int \Phi di, \quad (1-2)$$

где  $di$  — ток какой-либо трубки;  $\Phi$  — сцепляющийся с ней магнитный поток, а интегрирование производится по всему сечению провода, т. е. распространено на все трубки тока.

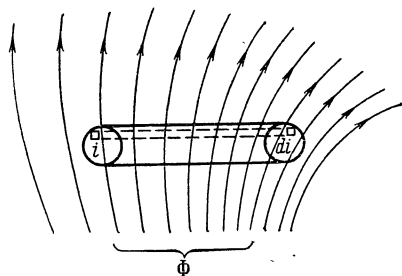


Рис. 1-3

Если для всех трубок тока  $\Phi$  имеет одно и то же значение, то в выражении (1-2) можно вынести  $\Phi$  из-под знака интеграла, и тогда  $\Psi = \Phi$ . Это равенство остается приближенно справедливым и в том слу-

чае, когда потоки  $\Phi$ , сцепляющиеся с отдельными нитями тока, мало отличаются друг от друга, как, например, в случае весьма тонкого контура, расположенного во внешнем магнитном поле.

Если плотность тока постоянна по сечению провода, как это имеет место при постоянном токе и приближенно при переменном токе достаточно низкой частоты, то  $di = i \frac{ds}{s}$ , где  $ds$  — элемент площади  $s$  поперечного сечения провода, соответствующий элементарному току  $di$ , и выражение (1-2) принимает вид

$$\Psi = \frac{1}{s} \int_s \Phi ds. \quad (1-3)$$

Магнитный поток, сцепляющийся с каким-либо электрическим контуром, в общем случае обусловлен как током в этом контуре, так и токами в других, соседних с ним контурах. В соответствии с этим вводят понятие о потоках самоиндукции и взаимной индукции электрических контуров, а именно: *поток самоиндукции* контура называют полный магнитный поток, сцепляющийся с этим контуром и обусловленный током в нем, а *поток взаимной индукции* — полный магнитный поток, сцепляющийся с данным контуром и обусловленный токами в других контурах.

Отношение потока самоиндукции контура к току в нем называют *собственной индуктивностью* или *коэффициентом самоиндукции* этого контура, а отношение потока взаимной индукции одного из двух контуров к силе обуславливающего его тока в другом контуре — *взаимной индуктивностью* или *коэффициентом взаимной индукции* этих контуров. Таким образом, для собственной индуктивности и взаимных индуктивностей контуров по определению имеем соответственно

$$L = \Psi_L / i; \quad (1-4)$$

$$M_{12} = \Psi_{2M} / i_1; \quad M_{21} = \Psi_{1M} / i_2, \quad (1-5)$$

где  $\Psi_L$  — поток самоиндукции контура;  $i$  — ток в нем;  $\Psi_{2M}$  — поток взаимной индукции второго контура, обусловленный током  $i_1$  первого контура;  $\Psi_{1M}$  — поток взаимной индукции первого контура, обусловленный током  $i_2$  второго контура.

При определении собственных и взаимных индуктивностей контуров за положительные направления обхода контуров всегда будем принимать направления протекающих



по ним-токов. Так как направление магнитных линий потока самоиндукции всегда образует правовинтовую систему с направлением обуславливающего его тока, то собственная индуктивность при указанном условии является величиной существенно положительной. Направление линий потока взаимной индукции, напротив, зависит не только от направления тока, но также от формы и взаимного расположения контуров. Поэтому взаимная индуктивность двух контуров может быть как положительной, так и отрицательной величиной и изменяет свой знак при изменении направления одного из токов.

В последующем, если не оговорено противное, всегда предполагается, что магнитная проницаемость среды, в которой замыкаются магнитные линии потоков самоиндукции и взаимной индукции, не зависит от напряженности магнитного поля. При этом условии потоки  $\Psi_L$  и  $\Psi_M$  пропорциональны обуславливающим их токам, а индуктивности  $L$  и  $M$  не зависят от токов и определяются лишь формой и геометрическими размерами контуров, магнитной проницаемостью проводов и окружающей их среды, а при переменном токе также и характером распределения тока по сечению проводников. Взаимная индуктивность зависит еще и от взаимного расположения контуров.

При указанном предположении справедливо, кроме того, важное соотношение

$$M_{12} = M_{21},$$

показывающее, что взаимная индуктивность  $M_{12}$ , определяющая электромагнитное воздействие первого контура на второй, равна взаимной индуктивности  $M_{21}$ , определяющей электромагнитное воздействие второго контура на первый. Поэтому при рассмотрении системы из двух контуров индексы 1 и 2 у  $M$  можно не ставить.

Если, как это обычно бывает, электрические контуры выполнены из немагнитного материала и расположены в воздухе, то магнитные проницаемости проводов и окружающей их среды могут быть приняты одинаковыми. В этом случае собственная и взаимная индуктивности контуров выражаются в виде произведения магнитной проницаемости на величину, зависящую от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от характера распределения тока по сечениям проводов.

В дальнейшем, за исключением случаев, когда это будет оговорено особо, магнитные проницаемости проводов и

окружающей их среды предполагаются одинаковыми и равными магнитной постоянной  $\mu_0$ .

Пользуясь понятиями о собственной и взаимной индуктивностях контуров, следует иметь в виду, что они имеют смысл лишь при условии, что в любой момент времени ток можно считать одинаковым для всех сечений каждого контура. Эти понятия применимы, следовательно, лишь тогда, когда электромагнитное поле в среде, окружающей контуры, квазистационарно, т. е. когда длина волны электромагнитных колебаний в этой среде много больше размеров контуров и расстояний между ними.

Переменный ток, проходя по проводнику, распределяется по его сечению неравномерно. Это явление, известное под названием поверхностного эффекта (или эффекта близости, когда речь идет о влиянии тока в одном из проводов на распределение тока в другом), приводит к тому, что значения индуктивностей при переменном токе отличаются от их значений при постоянном токе.

Из теории поверхностного эффекта известно, что характер распределения переменного тока по сечению провода зависит как от магнитной проницаемости и удельной проводимости вещества провода, так и от частоты протекающего по проводу тока. Поэтому собственные и взаимные индуктивности проводов и контуров при переменном токе косвенно зависят от всех упомянутых величин. Особенно важным является то обстоятельство, что индуктивности при неизменности всех прочих условий зависят от частоты и поэтому, вообще говоря, различны при различных частотах.

Так как поверхностный эффект и эффект близости при прочих равных условиях выражены тем резче, чем выше частота тока, то при расчете индуктивностей различают случай постоянного тока и низкой частоты, случай высокой частоты и предельный случай весьма высокой частоты. При этом под *низкой частотой* понимают частоту, при которой неравномерность распределения тока по сечениям проводов незначительна и мало влияет на значение индуктивности. Под *высокой частотой* понимают частоту, при которой неравномерность распределения тока значительна и должна быть учтена при расчете. Наконец, под *весьма высокой частотой* понимают частоту, при которой распределение тока по сечению резко неравномерно и ток можно считать сосредоточенным лишь в весьма тонком слое вблизи поверхности провода; чаще всего толщину этого слоя (по крайней мере в первом приближении) принимают равной

нулю. Случай низкой частоты имеет место, когда длина электромагнитной волны в проводнике значительно больше линейных размеров поперечного сечения провода, случай весьма высокой частоты — когда длина волны меньше размеров поперечного сечения провода.

## 1-2. РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТЕЙ ПО ЗАДАННОЙ ФОРМЕ, РАЗМЕРАМ И ВЗАИМНОМУ РАСПОЛОЖЕНИЮ КОНТУРОВ

В ряде случаев расчет индуктивностей может быть произведен путем непосредственного применения формул (1-4) и (1-5), служащих определением понятий «собственная индуктивность» и «взаимная индуктивность». В этих случаях расчет сводится к следующему.

Задавшись токами в рассматриваемых контурах, разбивают каждый из токов на элементарные нити тока и, пользуясь законом Био-Савара, определяют напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в произвольно выбранной точке поля. Умножая  $\mathbf{H}$  на магнитную проницаемость, предполагаемую одинаковой для проводов и окружающей их среды, получают магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  и, пользуясь формулой (1-1), находят поток  $\Phi$ , сцепляющийся с какой-нибудь нитью тока, после чего по формуле (1-2) или (1-3) вычисляют полный магнитный поток, сцепляющийся с рассматриваемым контуром. Подставляя найденное таким путем значение  $\Psi$  в формулу (1-4) или (1-5), получают выражение для собственной или соответственно взаимной индуктивности рассматриваемых контуров.

Однако в большинстве случаев для расчета индуктивностей пользуются другими формулами, в которых математические операции, необходимые для получения искомых величин ( $L$  или  $M$ ), указаны явно. Разбив каждый из токов на элементарные нити тока, можно поток  $\Phi$ , сцепляющийся с какой-нибудь нитью тока  $di'$ , рассматривать как сумму потоков взаимной индукции, создаваемых другими нитями ( $di''$ ), т. е. как сумму произведений вида  $\overline{M} di''$ , где  $\overline{M}$  — взаимная индуктивность нитей  $di'$  и  $di''$ , причем это суммирование должно быть распространено на все нити данного контура при вычислении  $L$  и на все нити другого контура при вычислении  $M$ .

Таким образом, поток  $\Phi$  выразится интегралом вида

$$\Phi = \int \overline{M} di'',$$

и, подставляя это выражение в (1-2), а (1-2) — в (1-4) и (1-5), можно написать

$$L = \frac{1}{i^2} \int_i di' \int_i \overline{M} di''; \quad (1-6)$$

$$M = \frac{1}{i_1 i_2} \int_{i_1} di' \int_{i_2} \overline{M} di''. \quad (1-7)$$

Входящая в эти формулы взаимная индуктивность  $\overline{M}$  двух нитей тока может быть найдена по формуле

$$\overline{M} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \oint_{l''} \frac{dl' dl''}{D} \cos \vartheta, \quad (1-8)$$

где  $dl'$  и  $dl''$  — элементы длины нитей  $l'$  и  $l''$ ;  $D$  — расстояние между этими элементами;  $\vartheta$  — угол между ними, причем нити  $l'$  и  $l''$  в формуле для собственной индуктивности принадлежат одному и тому же контуру, а в формуле для взаимной индуктивности — двум различным контурам (рис. 1-4 и 1-5). Интегрирование в формуле (1-8) производится сперва по нити  $l''$  при фиксированном положении элемента длины  $dl'$ , а затем по нити  $l'$ . Найдя выражение для взаимной индуктивности  $\overline{M}$  нитей  $l'$  и  $l''$ , следует подставить его в формулы (1-6) или (1-7) и произвести указанное в них двукратное интегрирование. Необходимо, однако, иметь в виду, что формулы (1-6) и (1-7) имеют смысл только при условии, что плотность переменного тока во всех точках каждого контура имеет одну и ту же фазу. В противном случае интегралы, входящие в эти формулы, не будут пропорциональны мгновенным значениям соответствующих токов и выражения (1-6) и (1-7)

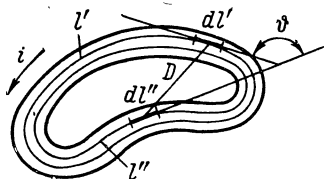


Рис. 1-4

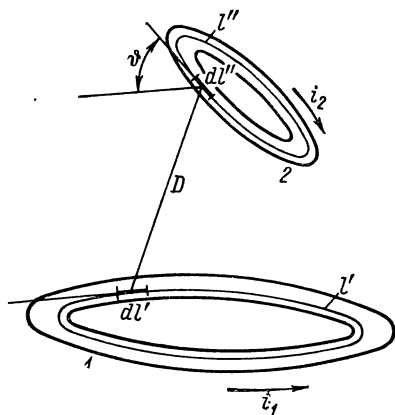


Рис. 1-5

окажутся зависящими от времени, т. е., по существу, потеряют смысл.

Таким образом, упомянутые формулы непосредственно применимы лишь при постоянном токе и при переменном токе низкой частоты, когда фаза плотности тока одинакова во всех точках каждого контура, а также при переменном токе весьма высокой частоты, когда можно считать, что все элементарные нити тока, сосредоточенного в весьма тонком поверхностном слое, несут токи, совпадающие друг с другом по фазе.

В первом из двух указанных предельных случаев можно положить  $di/i = ds/s$ , где  $ds$  — элемент площади  $s$  поперечного сечения соответствующего провода. Следовательно, для случая низкой частоты имеем

$$L = \frac{1}{s^2} \int_s ds' \int_s \overline{M} ds''; \quad (1-9)$$

$$M = \frac{1}{s_1 s_2} \int_{s_1} ds' \int_{s_2} \overline{M} ds''. \quad (1-10)$$

Во втором случае внутренний интеграл в формулах (1-6) и (1-7), представляющий собой магнитный поток, сцепленный с нитью  $l'$ , одинаков для всех нитей  $l'$ , и, следовательно, в этом случае вместо (1-6) и (1-7) можно написать

$$L = \frac{1}{i} \int_{\lambda} \overline{M} j'' d\lambda''; \quad M = \frac{1}{i_2} \int_{\lambda} \overline{M} j'' d\lambda''.$$

Непосредственное применение этих формул обычно невозможно, так как распределение тока по поверхности проводника, как правило, неизвестно. Расчет упрощается, если предположить, что ток распределен по периметру поперечного сечения каждого проводника равномерно. Хотя это предположение не всегда соответствует действительности, однако во многих случаях расчет индуктивностей, исходящий из предположения о равномерности распределения тока по поверхности, приводит к результатам, достаточно близким к истинным\*.

---

\* О степени точности этого предположения и границах его применимости, а также о возможных методах расчета, учитывающих неравномерность распределения тока по поверхности проводника, см. в § 1-5, 1-15, 1-17—1-19.

При указанном условии  $di/i = d\lambda/\lambda$ , где  $d\lambda$  — элемент периметра  $\lambda$  поперечного сечения соответствующего провода, и тогда для случая весьма высокой частоты имеем

$$L = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\lambda} d\lambda' \int_{\lambda} \overline{M} d\lambda''; \quad (1-11)$$

$$M = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \int_{\lambda_1} d\lambda' \int_{\lambda_2} \overline{M} d\lambda''. \quad (1-12)$$

Пусть два рассматриваемых контура «линейны», т. е. размеры контуров и расстояния  $D$  от элементов одного контура до элементов другого много больше линейных размеров их поперечных сечений. Тогда при любом характере распределения токов по сечениям взаимная индуктивность контуров  $M$  равна  $\overline{M}$ , т. е. может быть найдена по формуле (1-8), причем под  $l'$  и  $l''$  следует понимать осевые нити контуров. Таким образом, при расчете взаимной индуктивности линейных контуров необходимость двукратного интегрирования по площадям или периметрам сечений отпадает.

Во избежание ошибки, которую иногда делают, следует иметь в виду, что выражение для собственной индуктивности линейного контура не может быть получено из формулы (1-8) путем отождествления обоих контуров, т. е. путем слияния нитей  $l'$  и  $l''$ . Правильное решение этой задачи может быть получено путем применения принципа средних геометрических расстояний (§ 1-9) или общей формулы (1-24), данной в § 1-5.

### 1-3. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИНДУКТИВНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ КОНТУРОВ. ИНДУКТИВНОСТИ УЧАСТКОВ

При определении собственных и взаимных индуктивностей контуров, состоящих из нескольких участков, двойной интеграл по нитям  $l'$  и  $l''$  в формуле (1-8) для  $\overline{M}$  можно представить в виде двойной суммы таких же интегралов по длинам отдельных участков, после чего для собственной индуктивности  $L$  контура, состоящего из  $n$  участков (рис. 1-6), и взаимной индуктивности  $M$  двух контуров, состоящих из  $n$  и  $m$  участков, получим

$$L = \sum_{k=1}^n L_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ki}, \quad i \neq k; \quad (1-13)$$

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{i=n+1}^{n+m} M_{ki}, \quad (1-14)$$



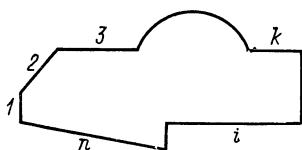


Рис. 1-6

где  $L_k$  и  $M_{ki}$  — интегралы вида (1-6) и (1-7), соответствующие отдельным участкам контуров. Эти величины, широко используемые при расчете индуктивностей контуров сложной формы, будем называть соответственно собственной

индуктивностью  $k$ -го участка и взаимной индуктивностью  $k$ -го и  $i$ -го участков.

При постоянном токе и низкой частоте они могут быть определены по формулам:

$$L_k = \frac{1}{s_k^2} \int_{s_k} \int_{s_k} \overline{M}_k ds' ds''; \quad (1-15)$$

$$M_{ki} = \frac{1}{s_k s_i} \int_{s_k} \int_{s_i} \overline{M}_{ki} ds' ds'', \quad (1-16)$$

а при весьма высокой частоте — по формулам:

$$L_k = \frac{1}{i^2} \int_{\lambda_k} j' d\lambda' \int_{\lambda_k} \overline{M}_k j'' d\lambda''; \quad (1-17)$$

$$M_{ki} = \frac{1}{i_1 i_2} \int_{\lambda_k} j' d\lambda' \int_{\lambda_i} \overline{M}_{ki} j'' d\lambda'', \quad (1-18)$$

где

$$\overline{M}_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \int_{l''} \frac{dl' dl'' \cos \vartheta}{D}. \quad (1-19)$$

Здесь  $\overline{M}_k$  — взаимная индуктивность двух нитей тока  $l'$  и  $l''$ , проходящих через элементы  $ds'$  и  $ds''$  площади  $s$  или соответственно через элементы  $d\lambda'$  и  $d\lambda''$  периметра  $\lambda$  поперечного сечения  $k$ -го участка;  $\overline{M}_{ki}$  — то же для нитей, проходящих через элементы площадей  $s_k$  и  $s_i$  или соответственно периметров  $\lambda_k$  и  $\lambda_i$  поперечных сечений  $k$ -го и  $i$ -го участков;  $j' = di'/d\lambda'$  и  $j'' = di''/d\lambda''$  — линейные плотности тока в точках расположения элементов  $d\lambda'$  и  $d\lambda''$ ;  $D$  и  $\vartheta$  — расстояние и угол между элементами длины  $dl'$  и  $dl''$  нитей  $l'$  и  $l''$ .

Интегрирование по нитям  $l'$  и  $l''$  производится лишь в пределах соответствующих участков.

Если можно принять, что токи распределены по периметрам поперечных сечений проводов равномерно ( $j' = \text{const}$ ,  $j'' = \text{const}$ ), то

$$L_k = \frac{1}{\lambda_k^2} \int_{\lambda_k} \int_{\lambda_k} \overline{M}_k d\lambda' d\lambda''; \quad (1-17a)$$

$$M_{ki} = \frac{1}{\lambda_k \lambda_i} \int_{\lambda_k} \int_{\lambda_i} \overline{M}_{ki} d\lambda' d\lambda''. \quad (1-18a)$$

Взаимная индуктивность линейных проводов (двух участков линейных контуров) при любой частоте может быть принята равной взаимной индуктивности  $\overline{M}_{ki}$  осевых нитей  $l'$  и  $l''$  этих проводов:

$$M_{ki} = \overline{M}_{ki} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \int_{l''} \frac{dl' dl'' \cos \vartheta}{D}, \quad (1-20)$$

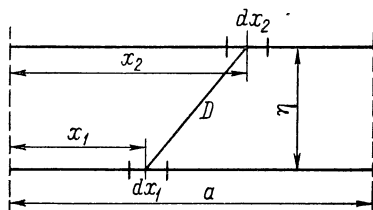


Рис. 1-7

Для иллюстрации процесса интегрирования, связанного с применением формул (1-15)—(1-20), а также соответствующих формул предыдущего параграфа, приведем два примера.

В качестве первого примера определим взаимную индуктивность двух одинаковых прямолинейных параллельных нитей тока, расположенных согласно рис. 1-7. Применяя общее выражение (1-20) и пользуясь обозначениями рис. 1-7, можно написать

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{dx_1 dx_2}{D}, \quad (1-21)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — координаты, отсчитываемые вдоль нитей от общего перпендикуляра к ним, и

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2},$$

причем  $dl' dl'' \cos \vartheta = dx_1 dx_2$  ввиду параллельности соответствующих элементов длины. Интегрируя выражение (1-21) по  $x_2$ , имеем

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l [\ln(x_2 - x_1 + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2})]_{x_2=0}^{x_2=l} dx_1.$$

Интегрируя это выражение по частям, найдем

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \{ [2x_2 \ln \eta + (x_1 - x_2) \ln(x_2 - x_1 + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2}) + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2}]_{x_1=0}^{x_1=l} \}_{x_2=0}^{x_2=l}.$$

Подставляя пределы и производя упрощения, получим

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + \eta^2}}{\eta} - \frac{\sqrt{l^2 + \eta^2}}{l} + \frac{\eta}{l} \right).$$

Если  $l \gg \eta$ , то можно написать

$$\sqrt{l^2 + \eta^2} = l \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{l^2}} = l \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{l^2} - \frac{1}{8} \frac{\eta^4}{l^4} + \dots \right);$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + \eta^2}}{\eta} &= \ln \frac{l}{\eta} + \ln \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{l^2}} \right) = \\ &= \ln \frac{2l}{\eta} + \frac{1}{4} \frac{\eta^2}{l^2} - \frac{3}{32} \frac{\eta^4}{l^4} + \dots, \end{aligned}$$

и для  $M$  получаем

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{\eta} - 1 + \frac{\eta}{l} - \frac{1}{4} \frac{\eta^2}{l^2} + \dots \right).$$

Наконец, если можно пренебречь первой и более высокими степенями  $\eta/l$  по сравнению с единицей, то выражение для  $M$  приобретает следующий простой вид:

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{\eta} - 1 \right). \quad (1-22)$$

В качестве второго примера рассмотрим прямолинейный провод произвольного, но постоянного по длине сечения и определим его индуктивность при низкой частоте в предположении, что длина провода значительно больше линейных размеров его поперечного сечения.

При определении индуктивности будем исходить из формулы (1-15). Так как любое расстояние в пределах поперечного сечения провода мало по сравнению с его длиной, то для взаимной индуктивности  $\bar{M}_k$  двух нитей тока можно применить выражение (1-22).

Подставляя значение  $M$  из (1-22) в формулу (1-15) и принимая во внимание, что от положения нитей зависит только член, содержащий  $\eta$ , можем написать

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln 2l - 1 - \frac{1}{s^2} \int_s \int_s \ln \eta \, ds' \, ds'' \right).$$

Последний член в скобках представляет собой логарифм среднего геометрического расстояния  $g$  площади  $s$  поперечного сечения провода от самой себя (§ 1-8). Таким образом,

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{g} - 1 \right). \quad (1-23)$$

В частности, для провода кругового сечения  $\ln g = \ln r - \frac{1}{4}$  [формула (10-5)] и

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - 0,75 \right).$$

Если в выражении для  $\overline{M}_k$  сохранить члены  $\frac{\eta}{l}$  и  $-\frac{1}{4} \frac{\eta^2}{l^2}$ , то вместо (1-23) получим более точное выражение:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{g} - 1 + \frac{a}{l} - \frac{1}{4} \frac{q^2}{l^2} \right),$$

где  $a$  и  $q$  — соответственно среднее арифметическое и среднее квадратичное расстояния площади  $s$  от самой себя (§ 1-8).

Общие формулы предыдущего и настоящего параграфов являются основными при расчете индуктивностей. Однако выполнить в конечном виде указанное в них интегрирование удастся лишь в некоторых наиболее простых случаях, в большинстве же случаев для получения необходимых формул приходится делать ряд дополнительных допущений и пренебрежений, основанных, в частности, на малости одних размеров по сравнению с другими.

Кроме того, иногда удастся существенно упростить расчет, применяя различные искусственные методы и приемы расчета; некоторые из них даны в следующих параграфах. Особенности расчета катушек и особенности расчета при высокой частоте указаны в § 1-14 и 1-15.

#### 1-4. МЕТОД УЧАСТКОВ

Метод участков, применяемый при расчете индуктивностей контуров сложной формы, состоит в том, что контур или контуры сложной формы разбивают на отдельные участки, каждый из которых имеет сравнительно простую форму, после чего определение индуктивностей сложных контуров сводится с помощью формул (1-13) и (1-14) к определению индуктивностей отдельных участков. Особенно отчетливо преимущества метода участков проявляются в случае, когда контуры состоят только из прямолинейных участков.

В этом случае для определения собственной индуктивности какого-нибудь контура достаточно иметь только общее выражение индуктивности прямолинейного провода и общее выражение взаимной индуктивности двух таких проводов при произвольном взаимном их расположении в пространстве, а для определения взаимной индуктивности двух контуров достаточно только последнего из упомянутых выражений. Оба выражения могут быть получены, и; следовательно, в рассматриваемом случае расчет индуктивностей может быть сведен к шаблонному применению формул (1-13) и (1-14).

Например, применяя формулу (1-13) к контуру, имеющему форму прямоугольного треугольника (рис. 1-8), можно написать

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + 2(M_{12} + M_{23} + M_{31}),$$

причем собственные индуктивности  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  могут быть найдены по формулам § 2-2 или 2-9, взаимные индуктивности  $M_{12}$  и  $M_{23}$  — по формулам § 2-11, а  $M_{31} = 0$  в силу взаимной перпендикулярности сторон 1 и 3.

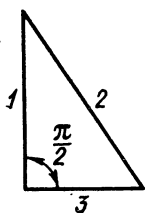


Рис. 1-8

Что касается контуров, имеющих криволинейные участки, то в этом случае задача значительно сложнее, так как для ее решения необходимо иметь выражения для собственных и взаимных индуктивностей криволинейных проводов различной формы при различном их взаимном расположении, а также для взаимных индуктивностей прямолинейных и криволинейных проводов.

Формулы для собственных и взаимных индуктивностей прямолинейных и криволинейных проводов даны в гл. 2.

### 1-5. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИНДУКТИВНОСТИ ЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА

Собственная индуктивность линейного провода может быть представлена в виде [16]

$$L = N - G + A - Q, \quad (1-24)$$

где  $N$  — величина, зависящая только от формы и размеров оси провода и не зависящая от формы и размеров поперечного сечения провода и от характера распределения тока по сечению;  $G$ ,  $A$  и  $Q$  — величины, зависящие от формы и размеров поперечного сечения и от характера распределения тока по сечению.

Определение величины  $N$  требует интегрирования лишь по оси провода, а определение  $G$ ,  $A$  и  $Q$  — интегрирования лишь по площади его поперечного сечения.

Таким образом, определение индуктивности линейного провода распадается на две самостоятельные задачи, из которых первая — нахождение  $N$  — имеет решение, определяемое независимо от формы сечения провода только уравнением его оси, а вторая — нахождение  $G$ ,  $A$  и  $Q$  — решается одинаково для всех проводов с одной и той же формой сече-

ния. В этом расчленении общей задачи на две независимые друг от друга частичные задачи и заключается основное достоинство формулы (1-24), особенно ценное при расчете методом численного интегрирования (§ 1-12).

Формула (1-24) дает индуктивность провода с точностью до величин порядка  $[g/(2R_m)]^2$  и  $(g/l)^2$ , где  $l$  — длина провода;  $R_m$  — наименьший радиус кривизны его оси;  $g$  — среднее геометрическое расстояние площади поперечного сечения провода от самой себя. Если пренебречь по сравнению с единицей величинами порядка  $g/(2R_m)$  и  $g/l$ , то в формуле (1-24) можно отбросить члены  $A$  и  $Q$ , и тогда

$$L = N - G. \quad (1-25)$$

В настоящем параграфе даны общие сведения об определении величин  $N$ ,  $G$ ,  $A$  и  $Q$ . Формулы, относящиеся к различным частным случаям, даны в гл. 2, 4 и 10.

Начнем с определения величины  $N$ .

Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — криволинейные координаты, отсчитываемые вдоль оси провода от одного из его концов (рис. 1-9),  $\vartheta$  и  $D$  — соответственно угол и расстояние между элементами длины  $dl_1$  и  $dl_2$ ,  $h$  — хорда, стягивающая малую дугу  $\sigma$ , координаты концов которой равны  $l_1$  и  $l_1 - \sigma$ . Вычислим интеграл

$$V = \int_0^{l_1 - \sigma} \frac{\cos \vartheta}{D} dl_2 \quad (1-26)$$

и обозначим через  $W$  предел, к которому стремится сумма  $V + \ln 2h$  при  $\sigma \rightarrow 0$ :

$$W = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (V + \ln 2h). \quad (1-27)$$

Тогда величина  $N$  определится по формуле

$$N = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^l W dl_1, \quad (1-28)$$

где  $l$  — длина оси провода [16].

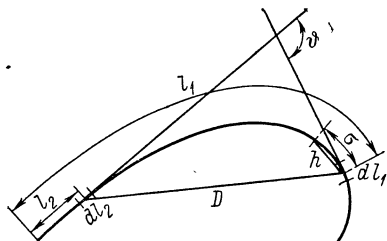


Рис. 1-9



Величина  $W$  является функцией от  $l_1$  и при невозможности найти предел выражения (1-27) в общем виде может быть вычислена по приближенной формуле

$$W = V + \ln 2h, \quad (1-29)$$

относительная погрешность которой одного порядка с величиной  $\sigma^2/R_m^2$ .

В качестве простого примера, иллюстрирующего применение формулы (1-28), найдем величину  $N$  для провода, изогнутого по дуге окружности. Пользуясь обозначениями рис. 1-10, имеем  $D = 2R \sin \frac{\vartheta}{2}$ ;  $dl_1 = R d\vartheta_1$ ;  $dl_2 = R d\vartheta_2$ . Подставив эти значения в формулу (1-26), получим

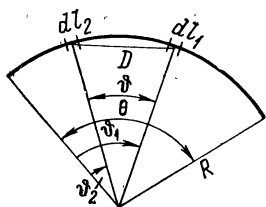


Рис. 1-10

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\vartheta_1 - \psi} \frac{\cos \vartheta}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta_2 = - \int_{\vartheta_1}^{\psi} \frac{\cos \vartheta}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta = \\ &= - \left[ \ln \operatorname{tg} \vartheta + 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \right]_{\vartheta_1}^{\psi} = \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{4} + \\ &+ 2 \cos \frac{\vartheta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\psi}{4} - 2 \cos \frac{\psi}{2}, \end{aligned}$$

где  $\psi = \sigma/R$ . Применяя формулу (1-27) и учитывая, что  $h = 2R \sin \frac{\psi}{2}$ , можем написать

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\psi \rightarrow 0} \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{4} + 2 \cos \frac{\vartheta_1}{2} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{4}}{4R \sin \frac{\psi}{2}} - 2 \cos \frac{\psi}{2} \right) = \\ &= \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{4} + 2 \cos \frac{\vartheta_1}{2} + \ln 8R - 2, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$N = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^I W R d\vartheta_1 = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \left[ \theta (\ln 8R - 2) - 4I + 4 \sin \frac{\theta}{2} \right],$$

где  $\theta$  — центральный угол, соответствующий всей длине провода, а

$$I = - \int_0^{\theta/4} \ln \operatorname{tg} \vartheta_1 d\vartheta_1.$$

Последний интеграл как неопределенный не берется. Его значения для различных углов  $\theta$  даны в табл. 2-2.

Пусть рассматриваемый провод имеет круговое поперечное сечение радиуса  $r$ . Тогда при постоянном токе и низкой частоте [формула (2-57)]

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln r - \frac{1}{4} \right),$$

и формула (1-25) для этого случая дает

$$L = N - G = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \left[ \theta \left( \ln \frac{8R}{r} - 1,75 \right) - 4I + 4 \sin \frac{\theta}{2} \right].$$

В частности, при  $\theta = 2\pi$  имеем  $I = 0$  и получаем известную формулу для индуктивности кругового кольца кругового поперечного сечения:

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{r} - 1,75 \right).$$

Ограничившись приведенным простым примером, отметим, что, как правило, величина  $N$  не выражается в конечном виде через величины, определяющие форму и размеры провода. В подобных случаях  $N$  можно найти методом численного интегрирования (§ 1-12).

Величины  $G$ ,  $A$  и  $Q$  при постоянном токе и приближенно при низкой частоте могут быть найдены из формул:

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln g; \quad A = \frac{\mu_0}{2\pi} a; \quad Q = \frac{\mu_0}{8\pi D} q^2, \quad (1-30)$$

где  $g$ ,  $a$ ,  $q$  — соответственно среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратичное расстояния площади поперечного сечения провода от самой себя (§ 1-8);  $l$  — длина оси провода;  $D$  — расстояние между крайними точками оси провода (предполагается, что  $D \gg q$ ).

При весьма высокой частоте  $G$ ,  $A$  и  $Q$  определяются аналогичными формулами:

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \tilde{g}; \quad A = \frac{\mu_0}{2\pi} \tilde{a}; \quad Q = \frac{\mu_0}{8\pi D} \tilde{q}^2, \quad (1-31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \ln \tilde{g} &= \frac{1}{l^2} \int_{\lambda} j' d\lambda' \int_{\lambda} j'' \ln \eta d\lambda'' = \frac{1}{l} \int_{\lambda} j \ln \eta d\lambda; \\ \tilde{a} &= \frac{1}{l^2} \int_{\lambda} j' d\lambda' \int_{\lambda} j'' \eta d\lambda'' = \frac{1}{l} \int_{\lambda} j \eta d\lambda; \\ \tilde{q}^2 &= \frac{1}{l^2} \int_{\lambda} j' d\lambda' \int_{\lambda} j'' \eta^2 d\lambda'' = \frac{1}{l} \int_{\lambda} j \eta^2 d\lambda; \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

$j'$  и  $j''$  — линейные плотности тока в точках расположения элементов  $d\lambda'$  и  $d\lambda''$  периметра  $\lambda$  поперечного сечения про-

вода;  $\eta$  — расстояние между этими точками;  $i$  — ток в проводе, а интегрирование производится по периметру поперечного сечения провода.

Если ток можно считать распределенным по периметру сечения равномерно, то  $j' = j'' = \text{const}$  и

$$\tilde{g} = g; \quad \tilde{a} = a; \quad \tilde{q} = q,$$

где  $g$ ,  $a$  и  $q$  — среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратичное расстояния периметра  $\lambda$  поперечного сечения провода от самого себя (§ 1-8).

В общем случае величины  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{a}$  и  $\tilde{q}$  должны быть определены по формулам (1-32), однако ввиду относительной малости величин  $A$  и  $Q$  по сравнению с разностью  $N - G$  обычно можно принять  $\tilde{a} = a$ ,  $\tilde{q} = q$ .

Что касается величины  $\tilde{g}$ , то ее непосредственное определение по формуле (1-32) большей частью связано с весьма значительными трудностями. Если, однако, принять, что распределение тока по периметру поперечного сечения провода конечной длины совпадает с распределением тока в уединенном бесконечно длинном прямолинейном проводе с такой же формой и такими же размерами поперечного сечения, то величина  $\tilde{g}$  может быть найдена другим путем, не требующим интегрирования по формуле (1-32).

Предположим, что магнитное поле тока весьма высокой частоты, протекающего по бесконечно длинному прямолинейному проводу заданного сечения, известно и  $V$  есть функция потока этого поля, определенная при условии, что  $V = 0$  на поверхности провода\*. Тогда, введя полярную систему координат  $r$ ,  $\theta$  с центром в пределах поперечного сечения провода (рис. 1-11), всегда можно представить функцию потока  $V$  для достаточно больших значений  $r$  в виде

$$V = \frac{i}{2\pi} (\ln c_0 - \ln r + \delta), \quad (*)$$

где  $i$  — ток в проводе;  $c_0$  — постоянная, зависящая от формы и размеров поперечного сечения провода, а  $\delta$  — малая величина, стремящаяся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Можно показать, что величина  $\tilde{g}$ , определяемая формулой (1-32), равна  $c_0$ . Таким образом, если для провода рассматриваемого сечения известно разложение вида (\*), то величина  $\tilde{g}$  определяется

---

\* Вместо функции потока можно рассматривать векторный потенциал  $A$ , единственная составляющая которого ( $A_z$ ) параллельна оси провода и связана с  $V$  простой зависимостью:  $A_z = \mu_0 V$ .

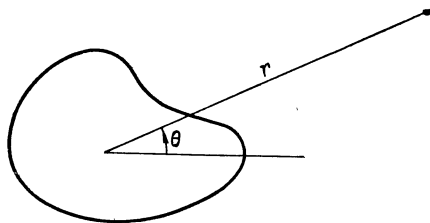


Рис. 1-11

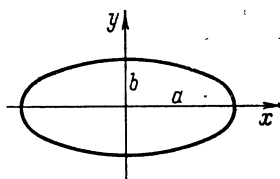


Рис. 1-12

непосредственно из этого разложения и необходимость в интегрировании выражения (1-32) сама собой отпадает.

Пусть, например, провод имеет эллиптическое поперечное сечение (рис. 1-12). Функция потока, определяющая магнитное поле тока весьма высокой частоты, протекающего по этому проводу, может быть легко найдена из решения соответствующей краевой задачи. В частности, для точек на оси  $x$  ( $r = |x|$ ) выражение для  $V$  имеет вид

$$V = \frac{i}{2\pi} \left( \text{Arch} \frac{a}{c} - \text{Arch} \frac{r}{c} \right),$$

где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Так как

$$\text{Arch} \frac{r}{c} = \ln \left( \frac{r}{c} + \sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1} \right);$$

$$\text{Arch} \frac{a}{c} = \ln \left( \frac{a}{c} + \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1} \right) = \ln \frac{a+b}{c},$$

то при  $r/c \gg 1$  имеем

$$V = \frac{i}{2\pi} \left( \ln \frac{a+b}{c} - \ln \frac{2r}{c} + \delta \right), \quad (**)$$

где  $\delta \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Из сопоставления выражений (\*) и (\*\*) сразу находим

$$\tilde{g} = c_0 = \frac{a+b}{2}.$$

В частности, для кругового сечения ( $a = b = R$ ), как и следовало ожидать, получаем  $\tilde{g} = R = g$ . Для другого крайнего случая (лента,  $b = 0$ ) имеем  $\tilde{g} = a/2$ , в то время как  $g = 2ae^{-3/2} = 0,446 a$ .

Следует заметить, что получение более точного решения, учитывающего неравномерность распределения тока по периметру поперечного сечения провода, в ряде случаев (как, например, для эллиптического сечения) оказывается более простым, чем получение приближенного решения, требую-

щего нахождения среднего геометрического расстояния  $\bar{g}$  периметра поперечного сечения провода от самого себя. Формулы для определения  $\bar{g}$  в различных случаях см. в § 2-10.

## 1-6. ТЕОРЕМА О ДВУХ ЧАСТЯХ И ТЕОРЕМА О ТРЕХ ЧАСТЯХ

Пусть какой-нибудь контур (или провод) состоит из двух частей, которые обозначим цифрами 1 и 2. Тогда взаимная индуктивность этих частей может быть найдена по формуле

$$M_{12} = \frac{1}{2} (L_{12} - L_1 - L_2),$$

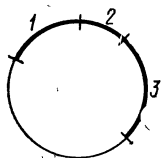


Рис. 1-13

где  $L_{12}$  — индуктивность рассматриваемого контура (провода);  $L_1$  и  $L_2$  — индуктивности его частей. Эта формула называется теоремой о двух частях и позволяет вычислить взаимную индуктивность двух частей

контура (или провода), если известны собственные индуктивности всего контура (провода) и обеих его частей.

Например, зная выражение для индуктивности провода, изогнутого по дуге окружности, можно по этой теореме найти выражение для взаимной индуктивности двух таких примыкающих друг к другу проводов 1 и 2 (рис. 1-13).

Для контура (провода), состоящего из трех частей (1, 2, 3), справедлива аналогичная теорема (теорема о трех частях):

$$M_{13} = \frac{1}{2} (L_{123} + L_2 - L_{12} - L_{23}),$$

где  $L_{123}$  — индуктивность рассматриваемого контура (провода);  $L_2$  — индуктивность части 2;  $L_{12}$  — индуктивность вместе взятых частей 1 и 2;  $L_{23}$  — индуктивность вместе взятых частей 2 и 3. Теорема о трех частях позволяет свести вычисление взаимной индуктивности двух не примыкающих друг к другу частей контура (или провода) к вычислению нескольких собственных индуктивностей.

Например, зная выражение для индуктивности провода, изогнутого по дуге окружности, можно по этой теореме найти выражение для взаимной индуктивности двух таких проводов (1 и 3), не примыкающих друг к другу (рис. 1-13).

## 1-7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА НАЛОЖЕНИЯ

При расчете индуктивностей контуров сложной формы в ряде случаев целесообразно пользоваться методом наложения. Этот метод основан на следующем положении: два

контура, по которым протекают токи одинаковой силы, эквивалентны друг другу в электромагнитном отношении, если один из них может быть получен из другого путем добавления к последнему одного или нескольких проводов, по каждому из которых протекают в противоположных направлениях два тока одинаковой силы.

Например, прямоугольный контур, изображенный на рис. 1-14, *а*, эквивалентен сложному контуру на рис. 1-14, *б*, рядом расположенные стороны которого надо представить себе доведенными до полного их слияния.

Из эквивалентности двух контуров, о которых идет речь в приведенном основном положении, следует, в частности,

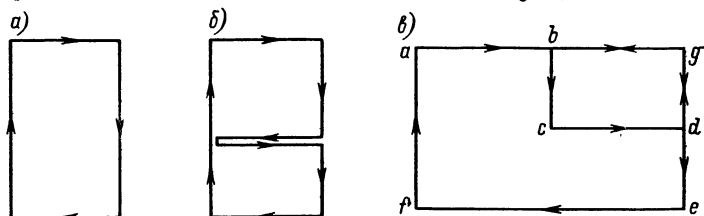


Рис. 1-14

что индуктивности обоих контуров одинаковы. Точно так же равны друг другу взаимные индуктивности между каждым из этих контуров и каким-либо третьим контуром. Указанные обстоятельства позволяют применить принцип наложения к расчету индуктивностей, так как дают возможность свести определение одних, неизвестных, индуктивностей к определению нескольких других, уже известных, индуктивностей.

Для пояснения метода наложения рассмотрим простой пример.

Пусть требуется определить индуктивность линейного контура  $abcdefa$ , показанного на рис. 1-14, *в* (точка  $c$  — центр прямоугольника  $agefa$ ). Дополнив контур двумя проводами  $bg$  и  $gd$ , можем утверждать, что контур  $abcdefa$  эквивалентен совокупности прямоугольного контура  $agefa$  и прямоугольного контура  $bcdgb$ . Следовательно,

$$L = L_{agefa} + L_{bcdgb} + 2M,$$

где  $M$  — взаимная индуктивность контуров  $agefa$  и  $bcdgb$ . Из соображений симметрии ясно, что поток взаимной индукции, сцепляющийся с контуром  $bcdgb$  и обусловленный током в контуре  $agefa$ , по абсолютной величине составляет



одну четверть от потока самоиндукции контура  $agefa$ , но имеет обратный знак. Поэтому  $M = -\frac{1}{4}L_{agefa}$  и, следовательно,

$$L = \frac{1}{2}L_{agefa} + L_{bcdgdb}.$$

Таким образом, определение индуктивности сложного контура  $abcdefa$  свелось к определению индуктивностей двух простых прямоугольных контуров.

### 1-8. СРЕДНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ, АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ РАССТОЯНИЯ

При расчете собственных и взаимных индуктивностей весьма часто используется понятие о так называемых *средних геометрических расстояниях* [см., например, следующий параграф, а также § 2-9, формулу (2-46)].

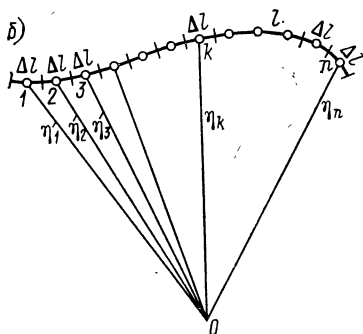
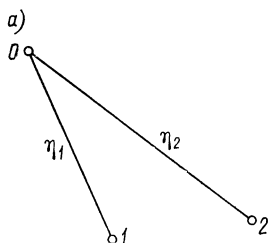


Рис. 1-15

Пусть мы имеем две точки 1 и 2 (рис. 1-15, а), удаленные от точки  $O$  на расстояния, равные соответственно  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Тогда среднее геометрическое расстояние точки  $O$  от точек 1 и 2 будет  $g = \sqrt{\eta_1 \eta_2}$ , и логарифм этого расстояния равен  $\ln g = \frac{1}{2}(\ln \eta_1 + \ln \eta_2)$ . Точно так же среднее геометрическое расстояние точки  $O$  от точек 1, 2, ...,  $n$ , удаленных от  $O$  на расстояния  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , равно

$$g = \sqrt[n]{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n}$$

и соответственно

$$\ln g = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \eta_k. \quad (1-33)$$

Пусть мы имеем некоторую линию длиной  $l$ . Разобьем ее на  $n$  элементарных отрезков одинаковой длины  $\Delta l$  (рис. 1-15, б). Приняв во внимание, что  $n = l/\Delta l$ , для среднего геометрического расстояния точки  $O$  от точек  $1, 2, \dots, n$ , являющихся серединами этих отрезков, согласно формуле (1-33) можно написать

$$\ln g = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \eta_k = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^n \ln \eta_k \Delta l. \quad (1-34)$$

Увеличивая беспредельно число отрезков и уменьшая тем самым длину каждого из них, получим в пределе среднее геометрическое расстояние точки  $O$  от всех точек линии  $l$ . Формула (1-34) переходит при этом в выражение

$$\ln g = \frac{1}{l} \int_l \ln \eta \, dl, \quad (1-35)$$

где  $\eta$  — переменное расстояние точки  $O$  от элементов длины  $dl$  линии  $l$ .

Аналогичным путем вводится понятие о среднем геометрическом расстоянии от точки до площади

$$\ln g = \frac{1}{s} \int_s \ln \eta \, ds, \quad (1-36)$$

где  $\eta$  — расстояние от точки до элемента площади  $ds$ ;  $s$  — площадь рассматриваемой фигуры (рис. 1-16, а).

Средние геометрические расстояния линий  $l_1$  и  $l_2$ , площадей  $s_1$  и  $s_2$ , площади  $s$  и линии  $l$  друг от друга определяются равенствами:

$$\ln g = \frac{1}{l_1 l_2} \int_{l_1} \int_{l_2} \ln \eta \, dl_1 \, dl_2; \quad (1-37)$$

$$\ln g = \frac{1}{s_1 s_2} \int_{s_1} \int_{s_2} \ln \eta \, ds_1 \, ds_2; \quad (1-38)$$

$$\ln g = \frac{1}{ls} \int_l \int_s \ln \eta \, dl \, ds, \quad (1-39)$$

где  $\eta$  — расстояние соответственно между элементами  $dl_1$  и  $dl_2$ ,  $ds_1$  и  $ds_2$ ,  $ds$  и  $dl$  рассматриваемых фигур (рис. 1-16, б, в, г).

Особенно важными являются понятия о средних геометрических расстояниях площади  $s$  от самой себя (рис. 1-16, д)

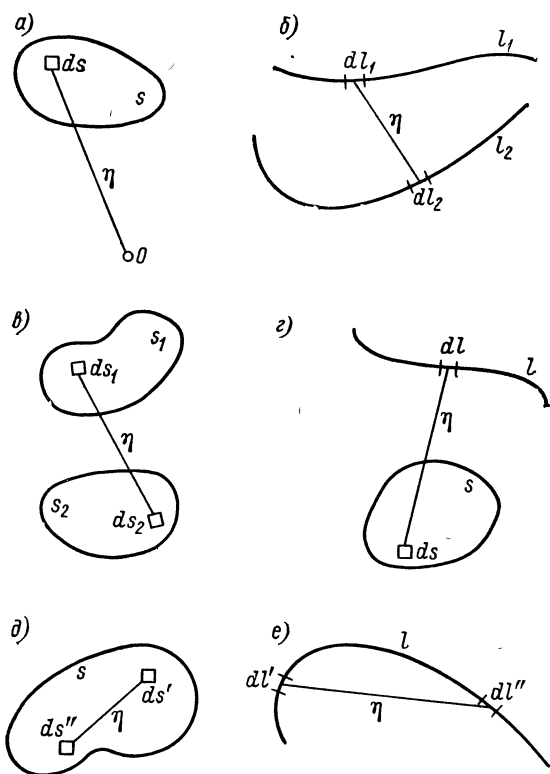


Рис. 1-16

и линии  $l$  от самой себя (рис. 1-16, е). Эти величины определяются выражениями:

$$\ln g = \frac{1}{s^2} \int_s \int_s \ln \eta \, ds' \, ds''; \quad (1-40)$$

$$\ln g = \frac{1}{l^2} \int_l \int_l \ln \eta \, dl' \, dl'', \quad (1-41)$$

где  $\eta$  — расстояние между какими-либо элементами площади  $ds'$  и  $ds''$  (или соответственно элементами длины  $dl'$  и  $dl''$ ), принадлежащими одной и той же фигуре, причем интегрирование производится один раз при неизменном положении  $ds'$  (или  $dl'$ ) и изменяющемся положении  $ds''$  ( $dl''$ ), а другой раз — при изменяющемся положении  $ds'$  ( $dl'$ ).

Формулы для расчета средних геометрических расстояний даны в гл. 10.

Здесь мы продемонстрируем определение этих величин на простом примере окружности (рис. 1-17).

Применяя основную формулу (1-41) и учитывая, что  $\eta = 2r \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|$ ;  $dl' = r d\varphi_1$ ;  $dl'' = r d\varphi_2$ ;  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , имеем

$$\ln g = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( 2r \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \right) r^2 d\varphi_1 d\varphi_2.$$

В силу симметрии фигуры результат интегрирования по  $\varphi_1$  не зависит от значения  $\varphi_2$ , поэтому

$$\ln g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( 2r \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi.$$

Так как

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2,$$

то

$$\int_0^{2\pi} \ln \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \ln (2 \sin x) dx = 4 \int_0^{\pi/2} \ln (2 \sin x) dx = 0$$

и, следовательно,  $\ln g = \ln r$ , т. е. среднее геометрическое расстояние окружности от самой себя равно радиусу этой окружности.

Помимо средних геометрических расстояний при расчете индуктивных величин иногда встречается необходимость применять и так называемые средние арифметические и средние квадратичные расстояния.

Средние арифметические расстояния  $a$  и средние квадратичные расстояния  $q$  различных фигур друг от друга и самих от себя определяются формулами, аналогичными вышеприведенным, и могут быть получены из них путем замены  $\ln g$  и  $\ln \eta$  соответственно на  $a$  и  $\eta$  в первом случае и на  $q^2$  и  $\eta^2$  во втором случае.

Например, для среднего арифметического и среднего квадратичного расстояния площади  $s$  от самой себя имеем

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{s^2} \iint_s \iint_s \eta ds' ds''; \\ q^2 &= \frac{1}{s^2} \iint_s \iint_s \eta^2 ds' ds''. \end{aligned} \right\} \quad (1-42)$$

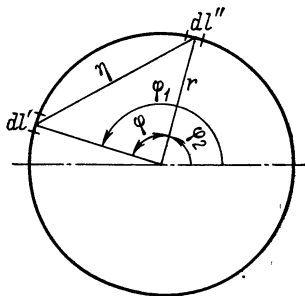


Рис. 1-17.

Следует иметь в виду, что для фигур, взаимные средние геометрические, арифметические и квадратичные расстояния  $g$ ,  $a$  и  $q$  которых больше их линейных размеров, величины  $g$ ,  $a$  и  $q$  относительно мало отличаются друг от друга и близки к расстоянию между центрами инерции этих фигур.

Так, например, для двух отрезков, изображенных на рис. 1-18,

$$\ln g = \ln d - \frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha^4}{60} - \dots; \quad a = d;$$

$$q = d \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{6}} \approx \left(1 + \frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha^4}{288}\right) d,$$

где  $\alpha = b/d$ . При  $d = 2b$ , т. е. при  $\alpha = 1/2$ , получаем

$$q \approx 0,98 d; \quad a = d; \quad q \approx 1,02 d,$$

и, следовательно,  $a$  равно расстоянию между центрами отрезков, а  $g$  и  $q$  отличаются от него лишь на 2 %.

Из сказанного следует, что для фигур, достаточно удаленных друг от друга, взаимные средние геометрические, арифметические и квадратичные

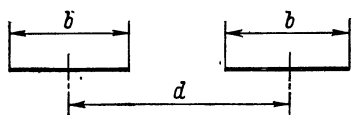


Рис. 1-18

расстояния могут быть приняты равными расстоянию между их центрами инерции. Существенно также иметь в виду, что составляющие индуктивностей, зависящие от средних арифметических и квадратичных расстояний, обычно значительно меньше суммы других составляющих, вследствие чего их можно вычислять с меньшей степенью точности.

В большинстве случаев средние арифметические и квадратичные расстояния можно принимать равными среднему геометрическому расстоянию тех же фигур, как это видно, в частности, из приведенного примера.

В качестве второго примера укажем, что среднее квадратичное расстояние  $q$  площадей двух одинаковых кругов, расстояние  $d$  между центрами которых вдвое больше радиусов кругов, равно  $d \sqrt{10/9} \approx 1,05 d$ , т. е. отличается от среднего геометрического расстояния  $g = d$  только на 5 %. Среднее арифметическое расстояние  $a$ , меньшее чем  $q$ , и большее, чем  $g$ , отличается от  $g$  еще меньше.

Из изложенного следует, что практически различие между величинами  $a$ ,  $q$  и  $g$  бывает необходимо учитывать лишь для фигур, весьма близко расположенных друг к другу, а также при определении средних арифметических и квадратичных расстояний фигур от самих себя.

Формулы, необходимые для расчета в этих случаях, даны в гл. 10.

## 1-9. ПРИНЦИП СРЕДНИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ

Собственная индуктивность контура (или провода) может быть определена с помощью *принципа средних геометрических расстояний*, если известно выражение взаимной индуктивности двух соответствующих эквидистантных нитей, т. е. нитей, имеющих такую же форму и размеры, как ось рассматриваемого контура, и расположен-

ных в параллельных плоскостях так, что соответствующие точки обеих нитей лежат на одном перпендикуляре к плоскостям и, следовательно, находятся на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 1-19). Принцип средних геометрических расстояний применительно к расчету собственных индуктивностей может быть сформулирован следующим образом: собственная индуктивность плоского контура из провода постоянного сечения при равномерном распределении тока по сечению равна взаимной индуктивности соответствующих эквидистантных нитей, отстоящих одна от

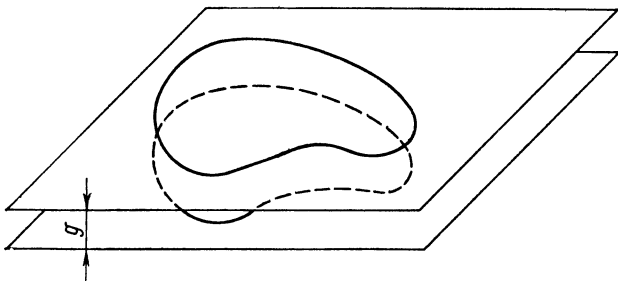


Рис. 1-19

другой на расстояние, равное среднему геометрическому расстоянию площади поперечного сечения провода от самой себя.

Сформулированный таким образом принцип приводит к точному результату для системы, состоящей из двух бесконечно длинных прямолинейных параллельных проводов произвольного, но постоянного сечения. Применение принципа к контурам иной формы приводит к ошибке, которая, вообще говоря, тем меньше, чем меньше линейные размеры поперечного сечения провода по сравнению с размерами самого контура [16]. Степень точности, получаемая при применении этого принципа к линейным проводам и катушкам, достаточна для большинства практических расчетов. Так, например, для массивного кругового кольца, радиус которого лишь в 5 раз превышает радиус его поперечного сечения, погрешность при расчете по принципу средних геометрических расстояний составляет около 0,2 %.

Принцип средних геометрических расстояний может быть применен к расчету индуктивностей и при весьма высокой частоте. В этом случае, сделав дополнительное предположение о равномерности распределения тока по поверхности

провода (§ 1-15), можно утверждать, что собственная индуктивность контура равна взаимной индуктивности соответствующих эквидистантных нитей, отстоящих одна от другой на расстояние, равное среднему геометрическому расстоянию не площади, а периметра поперечного сечения провода от самого себя! Допускаемая при этом погрешность — того же порядка, что и в случае низкой частоты.

**Взаимная индуктивность** двух эквидистантных плоских контуров с конечными размерами поперечных сечений может быть приближенно принята равной взаимной индуктивности двух соответствующих нитей, имеющих такую же форму и такие же размеры, как оси рассматриваемых контуров, и расположенных так, что кратчайшее расстояние между ними равно среднему геометрическому расстоянию площадей (или соответственно периметров) ближайших друг к другу поперечных сечений контуров.

Допускаемая при этом погрешность еще меньше, чем при определении собственных индуктивностей.

#### 1-10. ТЕОРЕМА О ЧЕТЫРЕХ ПРЯМОУГОЛЬНИКАХ И ОСНОВАННЫЙ НА НЕЙ МЕТОД

При расчете индуктивностей весьма полезным оказывается одно общее положение, именуемое в дальнейшем *теоремой о четырех прямоугольниках*.

Рассмотрим четыре прямоугольника 1, 2, 3, 4 (рис. 1-20), имеющих такие размеры и расположенных так, что каждая сторона любого из них лежит на одной прямой с какой-нибудь стороной другого прямоугольника. Обозначим через  $s_1, s_2, s_3, s_4$  площади прямоугольников, через  $ds_1, ds_2, ds_3, ds_4$  — элементы площадей  $s_1, s_2, s_3, s_4$  и через  $x$  и  $y, x$  и  $\eta, \xi$  и  $\eta, \xi$  и  $y$  — координаты точек, принадлежащих этим площадям.

Пусть  $\varphi(x, \xi, y, \eta)$  — некоторая функция координат  $x, \xi, y, \eta$ , симметричная относительно  $x$  и  $\xi$ , а также относительно  $y$  и  $\eta$ , т. е. функция, удовлетворяющая условию

$$\varphi(x, \xi, y, \eta) = \varphi(\xi, x, \eta, y). \quad (1-43)$$

Если  $\varphi$  есть какая-нибудь геометрическая или физическая величина, определяемая положением точек  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$ , то в силу условия симметрии эта величина будет для точек  $(x, \eta)$  и  $(\xi, y)$  иметь то же значение.

Например, если

$$\varphi = r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

есть расстояние между точками  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$ , то расстояние между точками  $(x, \eta)$  и  $(\xi, y)$  будет таким же. Этим свойством обладает и любая функция от  $r$ , например  $\ln r$ ,  $r^2$ ,  $1/r$ .

Введем обозначения:

$$F(1 \times 3) = \int \int_{s_1 s_3} \varphi ds_1 ds_3; \quad F(2 \times 4) = \int \int_{s_2 s_4} \varphi ds_2 ds_4, \quad (1-44)$$

где  $\varphi$  — функция, удовлетворяющая условию (1-43).

Теорема о четырех прямоугольниках утверждает, что

$$F(1 \times 3) = F(2 \times 4), \quad (1-45) \quad a)$$

причем это равенство сохраняет силу и в том случае, когда прямоугольники вырождаются в

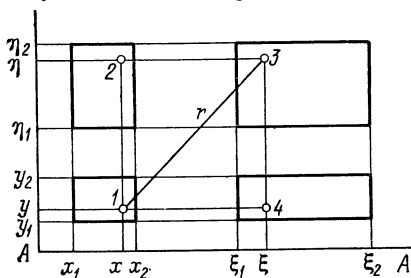


Рис. 1-20

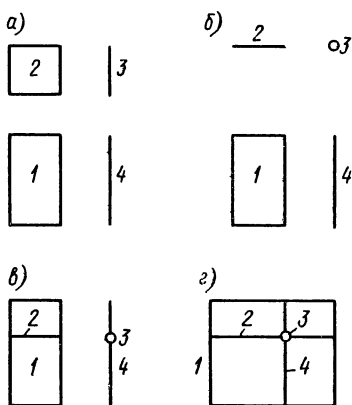


Рис. 1-21

отрезки прямых или точки (рис. 1-21, а—г). Индуктивности проводов, контуров и катушек в ряде случаев являются функциями вида (1-44), что можно усмотреть, в частности, из сравнения формул (1-44) с формулами (1-10) и (1-16). Именно это обстоятельство определяет значение теоремы о четырех прямоугольниках для расчета индуктивностей. Пусть, например, прямоугольники 1, 2, 3 и 4 на рис. 1-20 являются поперечными сечениями четырех массивных медных колец, общая ось которых совпадает с прямой AA'.

Согласно формуле (1-10) при постоянном токе и низкой частоте взаимная индуктивность  $M'_{13}$  колец 1 и 3 определяется выражением

$$M'_{13} = \frac{1}{s_1 s_3} \int \int_{s_1 s_3} \overline{M}_{13} ds_1 ds_3, \quad (1-46)$$

где  $\overline{M}_{13}$  — взаимная индуктивность двух круговых нитей, имеющих своей осью ось  $x$  и проходящих одна через точку  $(x, y)$ , а другая — через точку  $(\xi, \eta)$ .



Взаимная индуктивность колец 2 и 4 выражается аналогичной формулой

$$M'_{24} = \frac{1}{s_2 s_4} \int \int_{s_2 s_4} \overline{M}_{24} ds_2 ds_4, \quad (1-47)$$

где  $\overline{M}_{24}$  — взаимная индуктивность нитей, проходящих через точки  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$ .

Очевидно, что  $\overline{M}_{13} = \overline{M}_{24}$ , откуда следует, что произведения  $s_1 s_3 M'_{13}$  и  $s_2 s_4 M'_{24}$  являются величинами именно того

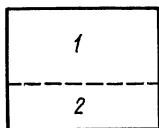


Рис. 1-22

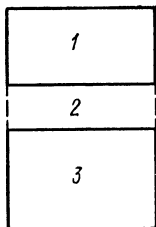


Рис. 1-23

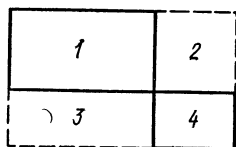


Рис. 1-24

вида, для которого установлена теорема о четырех прямоугольниках. Так как, кроме того,  $s_1 s_3 = s_2 s_4$ , то, следовательно, на основании этой теоремы можно утверждать, что взаимная индуктивность колец 1 и 3 равна взаимной индуктивности колец 2 и 4 — обстоятельство, непосредственно не очевидное.

Расчет взаимных индуктивностей шин и катушек прямоугольного сечения, а также контуров прямоугольной формы требует вычисления двойных интегралов вида

$$F(k \times i) = \int \int_{s_k s_i} \varphi ds_k ds_i, \quad (1-48)$$

распространенных по площадям двух лежащих в одной плоскости прямоугольников  $k$  и  $i$  с параллельными сторонами. С помощью теоремы о четырех прямоугольниках вычисление величин этого вида может быть сведено к вычислению нескольких величин вида

$$F(k) = \int \int_{s_k s_k} \varphi ds'_k ds''_k, \quad (1-49)$$

где  $\varphi$  — та же функция координат, что и в формуле (1-48), а интегрирование производится дважды по площади  $k$ -го прямоугольника [16].

Данные ниже формулы относятся ко всем возможным случаям взаимного расположения прямоугольников  $k$  и  $i$ .  
 Для расположения по рис. 1-22

$$F(1 \times 2) = \frac{1}{2} [F(1, 2) - F(1) - F(2)]. \quad (1-50)$$

Для расположения по рис. 1-23

$$F(1 \times 3) = \frac{1}{2} [F(1, 2, 3) + F(2) - F(1, 2) - F(2, 3)]. \quad (1-51)$$

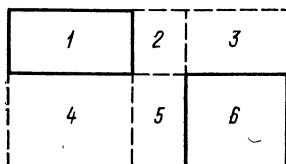


Рис. 1-25

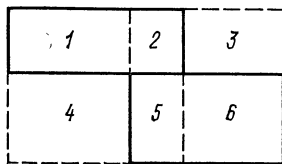


Рис. 1-26

Для расположения по рис. 1-24

$$\begin{aligned} F(1 \times 4) &= F(2 \times 3) = \\ &= \frac{1}{4} [F(1, 2, 3, 4) + F(1) + F(2) + F(3) + \\ &+ F(4) - F(1, 2) - F(1, 3) - F(2, 4) - F(3, 4)]. \end{aligned} \quad (1-52)$$

Для расположения по рис. 1-25

$$\begin{aligned} F(1 \times 6) &= F(3 \times 4) = \frac{1}{4} [F(1, 2, 3, 4, 5, 6) + F(1, 2) + \\ &+ F(2, 3) + F(2, 5) + F(4, 5) + F(5, 6) - F(1, 2, 4, 5) - \\ &- F(2, 3, 5, 6) - F(1, 2, 3) - F(4, 5, 6) - F(2) - F(5)]. \end{aligned} \quad (1-53)$$

Для расположения по рис. 1-26

$$\begin{aligned} F(1, 2 \times 5, 6) &= F(2, 3 \times 4, 5) = \frac{1}{4} [F(1, 2, 3, 4, 5, 6) + \\ &+ F(2, 5) + F(1) + F(3) + F(4) + F(6) - F(1, 2, 3) - \\ &- F(4, 5, 6) - F(1, 4) - F(3, 6) - F(2) - F(5)]. \end{aligned} \quad (1-54)$$

Для расположения по рис. 1-27

$$\begin{aligned} F(5 \times 1, 2, 3) &= F(2 \times 4, 5, 6) = \frac{1}{4} [F(1, 2, 4, 5) + \\ &+ F(2, 3, 5, 6) + F(1) + F(3) + F(4) + F(6) - F(1, 2) - \\ &- F(2, 3) - F(4, 5) - F(5, 6) - F(1, 4) - F(3, 6)]. \end{aligned} \quad (1-55)$$

Для расположения по рис. 1-28

$$\begin{aligned}
 F(1 \times 9) = F(3 \times 7) = & \frac{1}{4} [F(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) + \\
 & + F(1, 2, 4, 5) + F(2, 3, 5, 6) + F(4, 5, 7, 8) + \\
 & + F(5, 6, 8, 9) + F(2, 5, 8) + F(4, 5, 6) + F(5) - \\
 - F(1, 2, 3, 4, 5, 6) - F(4, 5, 6, 7, 8, 9) - F(1, 2, 4, 5, 7, 8) - \\
 & - F(2, 3, 5, 6, 8, 9) - F(2, 5) - F(4, 5) - \\
 & - F(5, 6) - F(5, 8)]. \quad (1-56)
 \end{aligned}$$

1	2	3
4	5	6

Рис. 1-27

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 1-28

Для расположения по рис. 1-29

$$\begin{aligned}
 F(1, 2 \times 8, 9) = F(2, 3 \times 7, 8) = \\
 = \frac{1}{4} [F(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) + F(2, 5, 8) + F(4, 5, 6) + \\
 + F(1, 4) + F(3, 6) + F(4, 7) + F(6, 9) + F(5) - \\
 - F(1, 2, 3, 4, 5, 6) - F(4, 5, 6, 7, 8, 9) - F(1, 4, 7) - \\
 - F(3, 6, 9) - F(2, 5) - F(5, 8) - F(4) - F(6)]. \quad (1-57)
 \end{aligned}$$

Для расположения по рис. 1-30

$$\begin{aligned}
 F(1, 2, 3 \times 8) = F(2 \times 7, 8, 9) = \frac{1}{4} [F(1, 2, 4, 5, 7, 8) + \\
 + F(2, 3, 5, 6, 8, 9) + F(4, 5) + F(5, 6) + F(1, 4) + F(4, 7) + \\
 + F(3, 6) + F(6, 9) - F(1, 2, 4, 5) - F(2, 3, 5, 6) - \\
 - F(4, 5, 7, 8) - F(5, 6, 8, 9) - F(1, 4, 7) - \\
 - F(3, 6, 9) - F(4) - F(6)]. \quad (1-58)
 \end{aligned}$$

Таким образом, при любом расположении в одной плоскости двух прямоугольников  $k$  и  $i$  с параллельными сторонами определение «взаимной» величины  $F(k \times i)$  приводится к определению нескольких «собственных» величин вида  $F(k)$ .

Так, определение взаимных индуктивностей упомянутых выше массивных колец прямоугольного сечения можно свести к определению собственных индуктивностей нескольких колец такого рода, если в формулах (1-50) — (1-58) под  $F(k \times i)$  принимать произведение  $s_k s_i M_{ki}$ , а под  $F(k)$  — произведение  $s_k^2 L_k$ , где  $L_k$  — собственная индуктивность  $k$ -го кольца.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 1-29

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 1-30

Если учесть, что собственные и взаимные индуктивности колец ( $L_k$  и  $M_{ki}$ ) выражаются через собственные и взаимные индуктивности ( $L_h$  и  $M_{hi}$ ) катушек тех же размеров формулами:

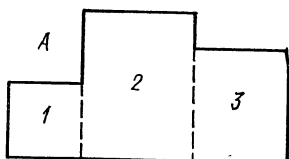
$$L'_k = \frac{L_h}{w_k^2}; \quad M'_{ki} = \frac{M_{hi}}{w_h w_i}, \quad (1-59)$$

где  $w_h$  и  $w_i$  — числа витков катушек  $h$  и  $i$  (§ 1-14), то формулы (1-50) — (1-58) можно распространить и на катушки, понимая под  $F(k \times i)$  произведение  $\frac{s_k s_i}{w_h w_i} M_{hi}$ , а под  $F(k)$  — произведение  $\frac{s_k^2}{w_k^2} L_h$ . Для катушек с одинаковой плотностью витков  $w/s$  все множители перед  $M_{hi}$  и  $L_h$  в формулах (1-50) — (1-58) одинаковы  $\left( \frac{s_h s_i}{w_h w_i} = \frac{s_k^2}{w_k^2} \right)$ , их можно сократить и, следовательно, в этом случае можно положить  $F(k \times i) = M_{hi}$  и  $F(k) = L_h$ .

Возможность свести вычисление «взаимных» величин  $F(k \times i)$  к вычислению нескольких «собственных» величин  $F(k)$  в ряде случаев весьма ценна с расчетной точки зрения.

В самом деле, величины  $F(k \times i)$  в общем случае являются функциями шести параметров — двух сторон одного прямоугольника, двух сторон другого и двух координат, определяющих взаимное расположение прямоугольников. При таком числе параметров табулирование значений величин  $F(k \times i)$  становится практически невозможным, а их

вычисление по неизбежно сложным формулам требует значительного времени. Напротив, величины  $F(k)$  определяются только двумя параметрами — сторонами прямоугольника или даже одним — отношением этих сторон и потому могут быть относительно просто вычислены или найдены из таблиц, составление которых при одном или двух параметрах не представляет особых затруднений. В силу сказанного возможность свести вычисление величин  $F(k \times i)$  к вычис-



лению нескольких величин  $F(k)$  во многих случаях существенно уменьшает время, необходимое для выполнения расчетов.

Рассмотрим теперь какую-нибудь плоскую фигуру ( $A$ ), ограниченную ломаной линией со взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 1-31). Такая фигура всегда может быть представлена в виде совокупности нескольких прямоугольников (например, прямоугольников 1, 2 и 3 на рис. 1-31). Двойной интеграл

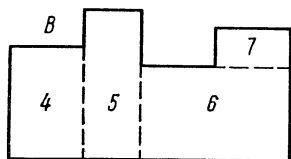


Рис. 1-31

$$F(A) = \int_s \int_s \varphi ds' ds'', \quad (1-60)$$

взятый дважды по площади  $s$  этой фигуры, может быть представлен в виде суммы

$$F(A) = \sum_{k=1}^n F(k) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n F(k \times i), \quad i \neq k, \quad (1-61)$$

члены которой — или величины вида  $F(k)$ , или же могут быть выражены через величины такого вида по формулам (1-50) — (1-58).

Точно так же, рассматривая две лежащие в одной плоскости фигуры  $A$  и  $B$  со взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 1-31) и разбивая каждую из них на отдельные прямоугольники 1, 2, ...,  $n$  и  $(n+1)$ ,  $(n+2)$ , ...,  $(n+m)$ , можно интеграл вида

$$F(A \times B) = \int_{s_A} \int_{s_B} \varphi ds' ds'' \quad (1-62)$$

представить как сумму

$$F(A \times B) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=n+1}^{n+m} F(k \times i), \quad (1-63)$$

каждый член которой также выражается через величины вида  $F(k)$ .

Таким образом, не только для прямоугольников, но и для любых лежащих в одной плоскости фигур со взаимно перпендикулярными сторонами вычисление интегралов вида (1-60) или (1-62) может быть сведено к вычислению величин вида  $F(k)$ . В этом и заключается метод, основанный на применении теоремы о четырех прямоугольниках.

Необходимо, однако, иметь в виду, что вычисление величин  $F(k \times i)$  по формулам (1-50) — (1-58) становится весьма неудобным или даже совсем неприемлемым, когда расстояние между прямоугольниками значительно превосходит их линейные размеры. В этом случае отдельные члены, через которые выражается величина  $F(k \times i)$ , во много раз больше результата их суммирования, так что расчет необходимо вести со степенью точности, значительно превышающей степень точности, требуемую от результата. В связи с этим возникает необходимость в достаточно точных значениях величин  $F(k)$ , и весь расчет становится весьма громоздким. В указанных случаях вычисление величин  $F(k \times i)$  удобнее вести по методу, изложенному в следующем параграфе.

### 1-11. ВЫЧИСЛЕНИЕ «ВЗАИМНЫХ» ВЕЛИЧИН ДЛЯ ДВУХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ МЕТОДОМ РЯДА ТЕЙЛОРА

Как было указано в предыдущем параграфе, расчет индуктивностей во многих случаях требует вычисления интегралов вида (1-48), распространенных по площадям двух лежащих в одной плоскости прямоугольников с параллельными сторонами. Если функция  $\varphi$ , входящая в (1-48), в пределах площади каждого из прямоугольников изменяется незначительно, то в первом, грубом, приближении можно считать ее постоянной, и тогда  $F(k \times i) = s_k s_i \varphi_{ki}$ , где  $\varphi_{ki}$  — значение функции  $\varphi$  для центров обоих прямоугольников. Для более точного определения  $F(k \times i)$  можно пользоваться методом, основанным на разложении функции  $\varphi$  в ряд Тейлора. Этот метод применительно к рассматриваемому случаю (рис. 1-32) приводит к следующей общей формуле:

$$F(k \times i) = 16 \frac{\text{sh}(AD_{xk})}{D_{xk}} \frac{\text{sh}(BD_{yh})}{D_{yh}} \frac{\text{sh}(aD_{xi})}{D_{xi}} \frac{\text{sh}(bD_{yi})}{D_{yi}} \varphi_{ki}, \quad (1-64)$$

где  $2A$ ,  $2B$ ,  $2a$ ,  $2b$  — стороны прямоугольников;  $D_x = \partial/\partial x$  и  $D_y = \partial/\partial y$  — символы дифференцирования по координатам

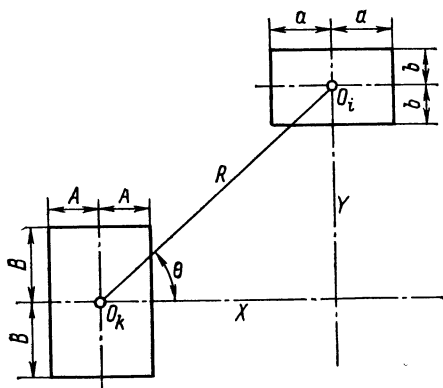


Рис. 1-32

там  $x$  и  $y$ , причем  $D_x$  и  $D_y$  снабжены индексами  $k$  и  $i$ , чтобы отличать дифференцирование по координатам точек  $k$ -го прямоугольника от дифференцирования по координатам точек  $i$ -го прямоугольника. Индекс  $ki$  у  $\Phi$  показывает, что производные должны быть взяты в центре  $O_k$  одного и в центре  $O_i$  другого прямоугольника.

Разложив гиперболические синусы, входящие в формулу (1-64), в ряды по степеням их аргументов и перемножив эти ряды, получим

$$\begin{aligned}
 F(k \times i) = s_k s_i \bigg( & 1 + \frac{A^2 D_{xk}^2 + a^2 D_{xi}^2}{6} + \frac{B^2 D_{yk}^2 + b^2 D_{yi}^2}{6} + \\
 & + \frac{3A^4 D_{xk}^4 + 10A^2 a^2 D_{xk}^2 D_{xi}^2 + 3a^4 D_{xi}^4}{360} + \\
 & + \frac{A^2 B^2 D_{xk}^2 D_{yk}^2 + A^2 b^2 D_{xk}^2 D_{yi}^2 + B^2 a^2 D_{xi}^2 D_{yk}^2 + a^2 b^2 D_{xi}^2 D_{yi}^2}{36} + \\
 & + \frac{3B^4 D_{yk}^4 + 10B^2 b^2 D_{yk}^2 D_{yi}^2 + 3b^4 D_{yi}^4}{360} + \dots \bigg) \Phi_{ki}, \quad (1-65)
 \end{aligned}$$

где степени вида  $D_x^p$  и  $D_y^p$  следует понимать как символы  $p$ -кратного дифференцирования по соответствующим координатам. Формула (1-65) сводит задачу вычисления  $F(k \times i)$  к определению частных производных от  $\Phi$  по  $x$  и  $y$ .

Если производные по координатам  $x_k$  и  $y_k$  равны соответствующим производным по координатам  $x_i$  и  $y_i$  или отли-

чаются от них только знаком, как, например, если  $\varphi$  есть функция только от расстояния  $r$  между двумя точками одного и другого прямоугольника, то формула (1-65) существенно упрощается:

$$F(k \times i) = s_k s_i \left[ 1 + \frac{A^2 + a^2}{6} D_x^2 + \frac{B^2 + b^2}{6} D_y^2 + \right. \\ \left. + \frac{(A^2 + a^2)(B^2 + b^2)}{36} D_x^2 D_y^2 + \frac{3A^4 + 10A^2 a^2 + 3a^4}{360} D_x^4 + \right. \\ \left. + \frac{3B^4 + 10B^2 b^2 + 3b^4}{360} D_y^4 + \dots \right] \varphi_{ki}. \quad (1-66)$$

Формула (1-65) лишена отмеченного в предыдущем параграфе недостатка метода, основанного на теореме о четырех прямоугольниках. Эта формула не содержит разностей близких величин, и для прямоугольников, удаленных на значительное расстояние друг от друга, второй, третий и последующие члены в формуле (1-65) значительно меньше первого члена, а потому могут быть вычислены со степенью точности, даже меньшей, чем требуемая от результата.

Формула (1-65) удобна, однако, лишь в тех случаях, когда расстояние между центрами прямоугольников не слишком мало по сравнению с их размерами, так как в противном случае ряд (1-65) сходится медленно и для обеспечения достаточной точности расчета потребовалось бы сохранение большого числа членов этого ряда.

Область, в которой применение формулы (1-65) является целесообразным, зависит от вида функции  $\varphi$  и легко устанавливается в каждом конкретном случае. При малых расстояниях между прямоугольниками становится возможным применение метода, изложенного в § 1-10, и, следовательно, оба метода взаимно дополняют друг друга.

Проиллюстрируем формулу (1-66), применив ее к определению среднего геометрического расстояния  $g_{ki}$  площадей прямоугольников  $k$  и  $i$  друг от друга. По определению (§ 1-8) имеем

$$s_k s_i \ln g_{ki} = \int_{s_k} \int_{s_i} \ln r \, ds_k ds_i, \quad (1-67)$$

где  $r$  — расстояние между точками одного и другого прямоугольника. Следовательно, в рассматриваемом случае следует положить  $\varphi = \ln r$ , и тогда  $F(k \times i) = s_k s_i \ln g_{ki}$ .

Так как функция  $\varphi = \ln r$  удовлетворяет уравнению

$$(D_x^2 + D_y^2) \varphi = 0,$$



то нетрудно показать, что

$$D_x^{2s} D_y^{2t} = (-1)^t D_x^{2(s+t)}.$$

Поэтому в данном случае достаточно определить только производные от  $\varphi$  по  $x$ . Дифференцируя  $\ln r$  несколько раз по  $x$ , находим

$$D_x^2 \varphi_{ki} = \frac{1}{R^2} (1 - 2u^2);$$

$$D_x^4 \varphi_{ki} = -\frac{6}{R^4} (1 - 8u^2 + 8u^4),$$

где  $R$  — расстояние между центрами прямоугольников;  $u = X/R = \cos \theta$  (рис. 1-32). Подставив значения производных в формулу (1-66) и ограничившись членами с производными не выше четвертого порядка, получим

$$\begin{aligned} \ln \frac{g_{ki}}{R} = & \frac{(A^2 + a^2) - (B^2 + b^2)}{6R^2} (1 - 2u^2) - \\ & \frac{(3A^4 + 10A^2a^2 + 3a^4) + (3B^4 + 10B^2b^2 + 3b^4) - 10(A^2 + a^2)(B^2 + b^2)}{60R^4} \times \\ & \times (1 - 8u^2 + 8u^4), \end{aligned} \quad (1-68)$$

где  $2A$ ,  $2B$ ,  $2a$ ,  $2b$  — стороны прямоугольников.

## 1-12. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ИНДУКТИВНОСТЕЙ

Выше уже было отмечено, что лишь в простейших случаях удастся выполнить в общем виде интегрирование тех основных выражений для индуктивностей, которые были приведены в § 1-2 и 1-3. Поэтому иногда приходится, отказавшись от получения общего буквенного выражения, ограничиться численным расчетом искомой индуктивности для заданных размеров контура или провода.

Обычно в подобных случаях расчет заключается в применении методов численного интегрирования, причем исходные выражения предварительно видоизменяют и упрощают таким образом, чтобы они требовали лишь однократного или, в крайнем случае, двукратного численного интегрирования. Само интегрирование выполняют или аналитически — с помощью формул механических квадратур (см. приложение 3), или графоаналитически, построив кривую подынтегральной функции и определив графически площадь этой кривой между соответствующими ординатами.

Приводимый ниже пример иллюстрирует применение метода численного интегрирования к расчету взаимной индуктивности двух линейных проводов, причем для возможности оценки результата рассмотрен случай, допускающий решение в конечном виде.

**Пример 1-1.** Определить взаимную индуктивность криволинейного провода, изогнутого по полуокружности, и прямолинейного провода, совпадающего с диаметром этой полуокружности (рис. 1-33, а).

Точное решение этой задачи может быть получено с помощью формулы (2-119), если положить в ней  $\beta = \pi/2$  и удвоить найденный результат (взаимная индуктивность полуокружности и диаметра вдвое больше взаимной индуктивности полуокружности и радиуса). Тогда получим  $M = \frac{\mu_0}{\pi} R$ .

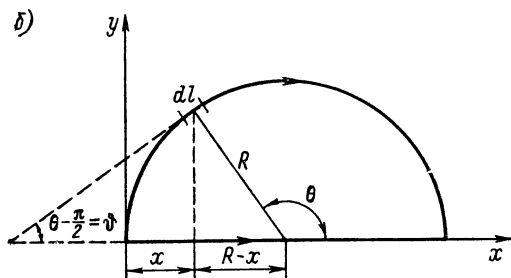
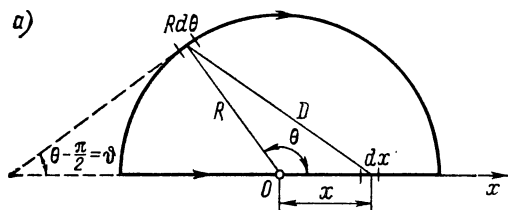


Рис. 1-33

Для определения  $M$  методом численного интегрирования воспользуемся обозначениями рис. 1-33 и представим общее выражение (1-20) в виде

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-R}^{+R} dx \int_0^{\pi} \frac{R \sin \theta}{D} d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-R}^{+R} F(x) dx, \quad (1-69)$$

где

$$D = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \theta}$$

и

$$F(x) = \int_0^{\pi} \frac{R \sin \theta}{D} d\theta = \int_4^{\pi} f(x, \theta) d\theta, \quad (1-70)$$

причем

$$f(x, \theta) = \frac{R \sin \theta}{D}. \quad (1-71)$$

Вычислим значения  $f(x, \theta)$  для всех значений  $x$  от  $-R$  до  $+R$  через  $0,2R$  и для всех значений  $\theta$  от  $0$  до  $\pi$  через  $\pi/18$ . Сведем результаты вычис-

Таблица 1-1. Значения  $f(x, \theta)$  при  $x = 0,4R$

$\theta, \dots^\circ$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\frac{2x \cos \theta}{R}$	$\frac{D^2}{R^2}$	$\frac{D}{R}$	$f(x, \theta)$
0	0,000	1,000	0,800	0,360	0,600	0,000
10	0,174	0,985	0,788	0,372	0,610	0,285
20	0,342	0,940	0,752	0,408	0,638	0,535
30	0,500	0,866	0,694	0,466	0,683	0,733
40	0,643	0,766	0,612	0,548	0,740	0,868
50	0,766	0,643	0,514	0,646	0,804	0,952
60	0,866	0,500	0,400	0,760	0,872	0,992
70	0,940	0,342	0,274	0,886	0,943	0,998
80	0,985	0,174	0,139	1,020	1,010	0,975
90	1,000	0,000	0,000	1,160	1,080	0,928
100	0,985	-0,174	-0,139	1,299	1,142	0,863
110	0,940	-0,342	-0,274	1,434	1,198	0,783
120	0,866	-0,500	-0,400	1,560	1,250	0,693
130	0,766	-0,643	-0,514	1,674	1,295	0,592
140	0,643	-0,766	-0,612	1,772	1,332	0,483
150	0,500	-0,866	-0,694	1,854	1,363	0,367
160	0,342	-0,940	-0,752	1,912	1,383	0,247
170	0,174	-0,985	-0,788	1,948	1,397	0,125
180	0,000	-1,000	-0,800	1,960	1,400	0,000

лений в таблицы, каждая из которых отвечает определенному значению  $x$  (см., например, табл. 1-1, для которой  $x = 0,4R$ )\*.

Имея таблицу значений  $f(x, \theta)$ , можно найти значение функции  $F(x)$  для того значения  $x$ , для которого эта таблица составлена. При отыскании  $F(x)$  можно пользоваться любой из формул механических квадратур.

Пользуясь параболической формулой (приложение 3), находим

$$F(0,4R) = \frac{1}{3} \frac{\pi}{18} [2(f_0 + f_2 + \dots + f_{18}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{17}) - (f_0 + f_{18})] = \frac{\pi}{54} [2(0 + 0,535 + \dots + 0) + 4(0,285 + 0,733 + \dots + 0,125) - (0 + 0)] = 0,636\pi.$$

Определяя таким же путем значения  $F(x)$  для других значений  $x$ , получим табл. 1-2.

Применяя к интегралу от функции  $F(x)$  параболическую формулу, найдем

$$M = 1,003 \frac{\mu_0 R}{\pi},$$

т. е. значение, весьма близкое к истинному.

В связи с приведенным примером следует отметить, что для кривых сложной формы расчет связан, вообще говоря, с более длительными вычислениями.

\* Все расчеты в данном примере выполнены на логарифмической линейке.

Таблица 1-2. Значения  $F(x)/\pi$ 

Номер точки	$\frac{x}{R}$	$\frac{F(x)}{\pi}$	Номер точки	$\frac{x}{R}$	$\frac{F(x)}{\pi}$
0	-1,0	0,650	5	0,0	0,636
1	-0,8	0,638	6	0,2	0,636
2	-0,6	0,636	7	0,4	0,636
3	-0,4	0,636	8	0,6	0,636
4	-0,2	0,636	9	0,8	0,638
5	0,0	0,636	10	1,0	0,650

Напротив, если один из проводов является прямолинейным или представляет собой замкнутое круговое кольцо, то одно интегрирование может быть выполнено в конечном виде и объем вычислений существенно сокращается.

Рассмотрим сначала первый из этих случаев. Пусть необходимо определить взаимную индуктивность провода произвольной формы и прямолинейного провода (рис. 1-34). Уравнение оси криволинейного провода будем считать

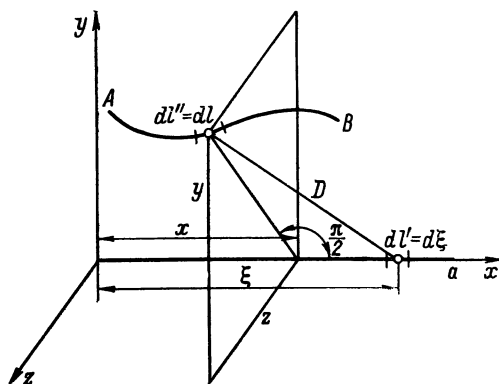


Рис. 1-34

заданным. Совместив прямолинейный провод с осью  $x$  и учитывая, что в данном случае  $dl' dl'' \cos \vartheta = d\xi dl \cos \vartheta = d\xi dx$ , где  $dx$  — проекция элемента длины  $dl'' = dl$  на ось  $x$ , можем написать

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \cos \vartheta dl \int_0^a \frac{d\xi}{D} = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \cos \vartheta dl \int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2 + z^2}}, \quad (1-72)
 \end{aligned}$$

где  $x, y, z$  — переменные координаты элемента длины  $dl$ . После первого интегрирования этого выражения получаем

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int f(x, y, z) \cos \vartheta dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \int f(x, y, z) dx, \quad (1-73)$$

где

$$f(x, y, z) = \text{Arsh} \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \text{Arsh} \frac{a-x}{\sqrt{y^2 + z^2}}. \quad (1-74)$$

Если второе интегрирование в конечном виде невозможно, то для определения  $M$  достаточно проинтегрировать выражение (1-73) с помощью параболической формулы. Задача, таким образом, требует лишь однократного численного интегрирования.

**Пример 1-2.** Решить пример 1-1 с помощью формулы (1-73). Совместим оба рассматриваемых провода с плоскостью ( $x, y$ ), расположив оси координат так, как показано на рис. 1-33, б. Учитывая, что взаимная индуктивность полуокружности и диаметра вдвое больше взаимной индуктивности полуокружности и радиуса, и полагая в общей формуле (1-73)  $z = 0$ , можно написать

$$M = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int f(x, y) \cos \vartheta dl = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (1-75)$$

Таблица 1-3. Значения  $F(\theta) \sin \theta$

Номер точки	$\theta$	$\frac{\theta}{2}$	$\text{ctg } \theta$	$\text{Arsh} (\text{ctg } \theta)$	$\text{ctg } \frac{\theta}{2}$	$\text{Arsh} \left( \text{ctg } \frac{\theta}{2} \right)$	$F(\theta)$	$\sin \theta$	$F(\theta) \sin \theta$
0	0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0,693	0,000	0,000
1	15°	7° 30'	3,732	2,028	7,596	2,725	0,697	0,259	0,181
2	30°	15° 00'	1,732	1,317	3,732	2,028	0,711	0,500	0,356
3	45°	22° 30'	1,000	0,881	2,414	1,615	0,734	0,707	0,519
4	60°	30° 00'	0,577	0,549	1,732	1,317	0,768	0,866	0,665
5	75°	37° 30'	0,268	0,265	1,303	1,080	0,815	0,966	0,787
6	90°	45° 00'	0,000	0,000	1,000	0,881	0,881	1,000	0,881
7	105°	52° 30'	-0,268	-0,265	0,767	0,707	0,972	0,966	0,938
8	120°	60° 00'	-0,577	-0,549	0,577	0,549	1,098	0,866	0,951
9	135°	67° 30'	-1,000	-0,881	0,414	0,403	1,284	0,707	0,908
10	150°	75° 00'	-1,732	-1,317	0,268	0,265	1,582	0,500	0,791
11	165°	82° 30'	-3,732	-2,028	0,132	0,132	2,160	0,259	0,558
12	180°	90° 00'	$-\infty$	$-\infty$	0,000	0,000	$\infty$	0,000	0,000

где  $\theta = \pi/2 + \vartheta$ ;  $dl = -R d\theta$ ;

$$F(\theta) = f(x, y) = \operatorname{Arsh} \frac{x}{y} + \operatorname{Arsh} \frac{R-x}{y} =$$

$$= -\operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \theta) + \operatorname{Arsh} \left( \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right). \quad (1-76)$$

Вычислив значения  $F(\theta) \sin \theta$  для всех значений  $\theta$  от 0 до  $180^\circ$  через  $15^\circ$  (табл. 1-3) и применив параболическую формулу, найдем

$$M = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \frac{1}{3} \frac{\pi}{12} [2(0 + 0,356 + 0,665 + \dots + 0)] +$$

$$+ [4(0,181 + \dots + 0,558) - (0 + 0)] = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \frac{\pi}{36} \cdot 22,8 = 0,995 \frac{\mu_0 R}{\pi},$$

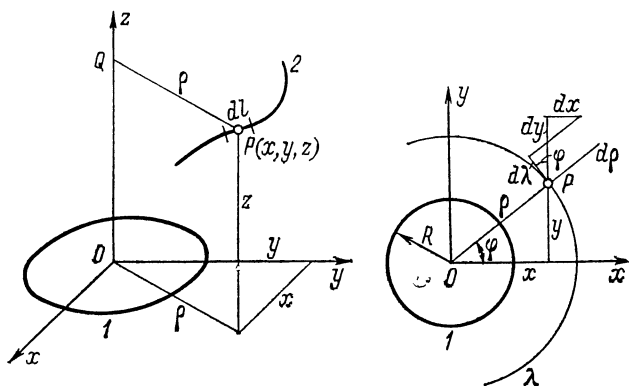


Рис. 1-35

что в пределах точности расчета на логарифмической линейке совпадает с точным ответом  $\mu_0 R/\pi^*$ .

Перейдем теперь ко второму из упомянутых случаев. Рассмотрим круговой контур 1 радиуса  $R$  и провод 2 произвольной формы (рис. 1-35). Выберем прямоугольную систему координат с началом в центре  $O$  кругового контура и с осью  $z$ , перпендикулярной к его плоскости. Рассмотрим элемент длины  $dl'' = dl$  провода 2, расположенный в точке  $P(x, y, z)$ . Разложим  $dl$  на составляющие:  $dz$  по оси  $z$ ,  $d\rho$  по прямой  $QP$ , перпендикулярной к оси  $z$ , и  $d\lambda$  по дуге окружности  $\lambda$ , проходящей через точку  $P$  и имеющей центром точку  $Q$ . Очевидно, что взаимная индуктивность элемента  $dz$  и контура 1 равна нулю в силу того, что  $dz$  пер-

\* Значения  $F(\theta)$  при  $\theta = 0$  и  $F(\theta) \sin \theta$  при  $\theta = 180^\circ$  найдены путем раскрытия получающихся неопределенностей.

пендикулярен к плоскости этого контура, а взаимная индуктивность элемента  $d\rho$  и контура  $l$  равна нулю вследствие симметрии контура относительно направления  $d\rho$ . Следовательно, взаимная индуктивность  $dM$  элемента  $dl$  и контура  $l$  равна взаимной индуктивности  $dM_\lambda$  элемента  $d\lambda$  и этого контура. С другой стороны, вследствие коаксиальности окружности  $\lambda$  и контура  $l$  и вытекающей отсюда симметрии можно написать

$$\frac{dM_\lambda}{M_\lambda} = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\lambda}{2\pi\rho}, \quad (1-77)$$

где  $M_\lambda$  — взаимная индуктивность контуров  $\lambda$  и  $l$ .

Из рис. 1-35 непосредственно видно, что

$$d\lambda = dy \cos \varphi - dx \sin \varphi = (\cos \beta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) dl, \quad (1-78)$$

где  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$  — направляющие косинусы элемента  $dl$  по осям  $x$  и  $y$ , а  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ . Поэтому

$$dM = dM_\lambda = M_\lambda \frac{\cos \beta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi}{2\pi\rho} dl \quad (1-79)$$

и, следовательно,

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_l M_\lambda \frac{\cos \beta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi}{\rho} dl. \quad (1-80)$$

Взаимная индуктивность  $M_\lambda$  двух коаксиальных круговых контуров может быть определена по общим формулам, таблицам и кривым § 5-7, 5-8, и, следовательно, определение взаимной индуктивности провода произвольной формы и кругового контура может быть сведено к задаче однократного численного интегрирования (см. пример 1-3).

**Пример 1-3.** Определить взаимную индуктивность двух лежащих в одной плоскости контуров: кругового контура радиуса  $R = 1$  м и квадратного контура со стороной  $2a = 1$  м (рис. 1-36).

В силу симметрии имеем  $M = 8 M_{12}$ , где  $M_{12}$  — взаимная индуктивность контура  $l$  и провода  $AB$ . Из рис. 1-36 видно, что в данном случае  $y = a$ ;  $\cos \alpha = -1$ ;  $\cos \beta = 0$ ;  $\varphi = \arctg \frac{a}{x}$ ;  $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ;

$d\lambda = -\sin \varphi dx = -\frac{a dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ;  $\rho = \sqrt{a^2 + x^2}$  и, следовательно,

$$M = 8M_{12} = \frac{4a}{\pi} \int_0^a \frac{M_\lambda dx}{a^2 + x^2}.$$

Таблица 1-4. Значения  $M_\lambda/\rho^2$ 

$x, \text{ м}$	$\rho^2 = \frac{a^2 + x^2}{\text{м}^2}$	$\rho, \text{ м}$	$M_\lambda, \text{ мкГн}$	$M_\lambda/\rho^2, \text{ мкГн/м}^2$
0,0	0,25	0,500	0,546	2,19
0,1	0,26	0,510	0,572	2,20
0,2	0,29	0,538	0,647	2,23
0,3	0,34	0,583	0,778	2,29
0,4	0,41	0,640	0,981	2,40
0,5	0,50	0,707	1,275	2,55

Для выполнения интегрирования составляем табл. 1-4, причем значения  $M_\lambda$  для каждого значения  $\rho$  берем из табл. 5-5.

Имея значения подынтегральной функции и применяя формулу трапеций, находим

$$M = \frac{4a}{\pi} 0,1 \left[ \frac{1}{2} (2,19 + 2,55) + 2,20 + 2,23 + 2,29 + 2,40 \right] = \frac{0,2}{\pi} \cdot 13,86 = 0,880 \text{ мкГн.}$$

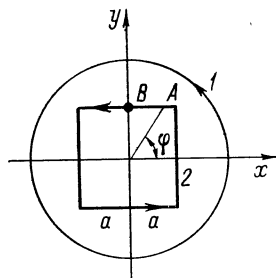


Рис. 1-36

Переходя к вопросу о расчете собственных индуктивностей, заметим, что основные формулы (1-9), (1-11) и соответствующие формулы § 1-3 требуют многократного интегрирования, выполнить которое численным методом было бы практически совершенно невозможно ввиду его чрезвычайной громоздкости. Поэтому для расчета собственных индуктивностей методом численного интегрирования следует применять формулу (1-24), требующую лишь двукратного интегрирования вдоль оси провода. Так как величины  $G$ ,  $A$  и  $Q$ , входящие в эту формулу, могут быть определены по формулам § 2-10, то задача сводится, по существу, лишь к определению величины  $N$  [формула (1-28)].

В приводимом ниже примере показан процесс вычисления этой величины методом численного интегрирования, причем для возможности оценки результата рассмотрен случай, допускающий решение в общем виде.

**Пример 1-4.** Определить величину  $N$  для провода, изогнутого по дуге окружности радиуса  $R = 1 \text{ м}$  при угле  $\theta = 55^\circ$  (рис. 1-10).

Точное решение этой задачи может быть получено с помощью формулы (2-51), которая при  $\theta = 55^\circ$  и  $R = 1 \text{ м}$  дает

$$N = \frac{\mu_0}{2\pi} [0,960 (\ln 8 - 2) - 4 \cdot 0,581 + 4 \cdot 0,462] = -0,399 \frac{\mu_0}{2\pi}.$$



Для определения  $N$  методом численного интегрирования разобьем всю дугу на 11 участков по  $5^\circ$  каждый и вычислим значения величины  $W$  для каждой из точек деления по приближенной формуле (1-29). Пусть расчет надо произвести с точностью до 0,01. Тогда, учитывая, что погрешность формулы (1-29) порядка  $(\sigma/R)^2$ , нужно выбрать дугу  $\sigma$  так, чтобы отношение  $\sigma/R$  было не более  $\sqrt{0,01} = 0,1$ , т. е. чтобы центральный угол  $\psi$ , соответствующий этой дуге, был не более  $0,1 \frac{180}{\pi} = 5,73^\circ$ .

Примем  $\psi = 5^\circ$ . Пользуясь обозначениями рис. 1-10, для величины  $V$ , входящей в формулу (1-29), имеем

$$V = \int_0^{l_1 - \sigma} \frac{\cos \vartheta}{D} dl_2 = \int_0^{\vartheta_1 - \psi} \frac{\cos \vartheta}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta_2 = \int_0^{\vartheta_1 - \psi} f(\vartheta_2) d\vartheta_2, \quad (1-81)$$

где  $f(\vartheta_2)$  при фиксированном  $\vartheta_1$  есть функция только от  $\vartheta_2$ . Вычислим для примера значение  $V$  при  $\vartheta_1 = 25^\circ$ . Для этого найдем значения подынтегральной функции  $f(\vartheta_2)$  при  $\vartheta_1 = 25^\circ$  и при  $\vartheta_2$ , изменяющемся от 0 до  $\vartheta_1 - \psi = 25^\circ - 5^\circ = 20^\circ$  через  $2^\circ 30'$ .

Результаты расчета сведем в табл. 1-5, после чего интеграл (1-81) найдем по параболической формуле

$$V(25^\circ) = \frac{1}{3} \frac{\pi}{72} [2(2,10 + 2,71 + 3,70 + 5,64 + 11,45) + 4(2,37 + 3,13 + 4,48 + 7,56) - (2,10 + 11,45)] = 1,569.$$

Подставляя это значение  $V$  в формулу (1-29) и учитывая, что

$$\ln 2h = \ln \left( 4R \sin \frac{\psi}{2} \right) = \ln (4 \sin 2^\circ 30') = -1,746,$$

найдем

$$W(25^\circ) = V(25^\circ) + \ln 2h = 1,569 - 1,746 = -0,177.$$

Таким же путем могут быть найдены значения  $W$  для других значений угла  $\vartheta_1$ . Эти значения даны в табл. 1-6 для всех  $\vartheta_1$  от  $5^\circ$  до  $55^\circ$ . При  $\vartheta_1 = 0$

Таблица 1-5. Значения  $f(\vartheta_2)$  при  $\vartheta_1 = 25^\circ$

№ пп.	$\vartheta_2$	$\vartheta$	$\frac{\vartheta}{2}$	$\cos \vartheta$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$	$f(\vartheta_2)$
0	0	$25^\circ$	$12^\circ 30'$	0,906	0,216	2,10
1	$2^\circ 30'$	$22^\circ 30'$	$11^\circ 15'$	0,924	0,195	2,37
2	$5^\circ$	$20^\circ$	$10^\circ 00'$	0,940	0,1736	2,71
3	$7^\circ 30'$	$17^\circ 30'$	$8^\circ 45'$	0,954	0,1522	3,13
4	$10^\circ$	$15^\circ$	$7^\circ 30'$	0,966	0,1305	3,70
5	$12^\circ 30'$	$12^\circ 30'$	$6^\circ 15'$	0,976	0,1089	4,48
6	$15^\circ$	$10^\circ$	$5^\circ 00'$	0,985	0,0872	5,64
7	$17^\circ 30'$	$7^\circ 30'$	$3^\circ 45'$	0,991	0,0655	7,56
8	$20^\circ$	$5^\circ$	$2^\circ 30'$	0,996	0,0436	11,45

Таблица 1-6. Значения  $W$ 

№ пп.	$\vartheta_1, \dots^\circ$	$W$	№ пп.	$\vartheta_1, \dots^\circ$	$W$
0	0	—	6	30	-0,016
1	5	-1,746	7	35	+0,115
2	10	-1,059	8	40	+0,223
3	15	-0,663	9	45	+0,312
4	20	-0,387	10	50	+0,386
5	25	-0,177	11	55	+0,445

$W = -\infty$ , вследствие чего численное интегрирование в области, близкой к  $\vartheta_1 = 0$ , становится невозможным. Поэтому выражение (1-28) для  $N$  представим в виде суммы

$$N = N_1 + N_2, \quad (1-82)$$

где

$$N_1 = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \int_0^{5^\circ} W d\vartheta_1; \quad N_2 = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \int_{5^\circ}^{55^\circ} W d\vartheta_1. \quad (1-83)$$

Применяя ко второму интегралу параболическую формулу, найдем  $N_2 = -\frac{\mu_0}{2\pi} 0,161$ . Для вычисления первого интеграла учтем, что при малых углах  $\vartheta$  можно написать  $\cos \vartheta = 1$ ,  $\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{\vartheta}{2}$ , и тогда

$$V = \int_0^{\vartheta_1 - \psi} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta_2 = \int_0^{\vartheta_1 - \psi} \frac{d\vartheta_2}{\vartheta_1 - \vartheta_2} = -\ln(\vartheta_1 - \vartheta_2) \Big|_0^{\vartheta_1 - \psi} =$$

$$= \ln \vartheta_1 - \ln \psi;$$

$$W = V + \ln 2h = \ln \vartheta_1 - \ln \psi + \ln \left( 4 \sin \frac{\psi}{2} \right) =$$

$$= \ln \vartheta_1 - \ln \psi + \ln 2\psi = \ln \vartheta_1 + \ln 2.$$

Подставив это значение  $W$  в выражение для  $N_1$ , получим

$$N_1 = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \frac{\pi}{36} \left( \ln \frac{\pi}{18} - 1 \right) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot 0,240.$$

Таким образом,  $N = N_1 + N_2 = -0,401 \frac{\mu_0}{2\pi}$ , что в пределах точности расчета на логарифмической линейке совпадает с найденным ранее результатом  $-0,399 \frac{\mu_0}{2\pi}$ .

### 1-13. О РАСЧЕТЕ ИНДУКТИВНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ

Рассмотрим систему, состоящую из произвольного числа ( $n$ ) бесконечно длинных прямолинейных параллельных проводов произвольного и, вообще говоря, неодинакового поперечного сечения (рис. 1-37). Будем предполагать, что ток в каждом проводе распределен по его сечению равномерно и что система *нейтральна*, т. е. алгебраическая

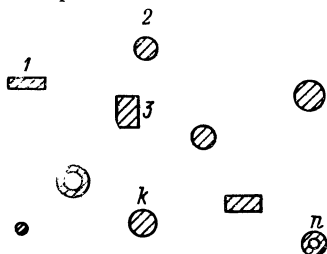


Рис. 1-37

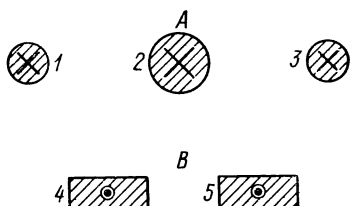


Рис. 1-38

сумма токов всех проводов равна нулю. При постоянном токе последнее условие выражается равенством

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (1-84)$$

а при переменном синусоидальном токе — равенством

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0, \quad (1-85)$$

причем токам одного направления приписывается один знак (например, плюс), а токам другого направления — другой (минус); точка над буквой  $I_k$  обозначает комплекс. При постоянном токе совокупность всех проводов с токами одного направления можно рассматривать как один провод сложного поперечного сечения. Например, для системы из пяти проводов, сечения которых показаны на рис. 1-38, можно считать, что провода 1, 2, 3 образуют один (прямой) провод A, а провода 4, 5 — другой (обратный) провод B. Если при этом плотности токов во всех проводах с токами одного направления одинаковы, то индуктивность рассматриваемой системы может быть найдена по общей формуле \*

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{g_{AB}^2}{g_A g_B}, \quad (1-86)$$

\* В этом параграфе все формулы относятся к индуктивностям на единицу длины системы.

где  $g_A$  и  $g_B$  — соответственно средние геометрические расстояния площадей  $s_A$  и  $s_B$  поперечных сечений сложных проводов  $A$  и  $B$  от самих себя (например, для рис. 1-38  $s_A = s_1 + s_2 + s_3$ ;  $s_B = s_4 + s_5$ ), а  $g_{AB}$  — среднее геометрическое расстояние площадей  $s_A$  и  $s_B$  друг от друга (об определении средних геометрических расстояний площадей, состоящих из нескольких частей, см. в § 10-2). В общем случае, когда плотности тока в системах постоянного тока различны, а тем более для систем переменного тока, у которых фазы токов отдельных проводов неодинаковы и деление проводов на «прямые» и «обратные» теряет смысл, формула (1-86) неприменима. В подобных случаях вопрос об индуктивностях требует несколько более подробного рассмотрения.

Окружим рассматриваемую систему проводов бесконечно тонкой цилиндрической оболочкой радиуса  $R$  (рис. 1-39) и рассмотрим петлю, образованную каким-либо проводом системы (например, проводом  $l$ ) и оболочкой. Индуктивность этой петли в соответствии с общей формулой (1-86) равна

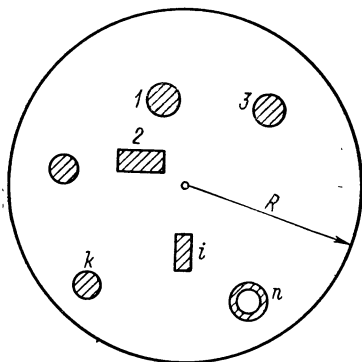


Рис. 1-39

$$L_{10} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{g_{10}^2}{g_1 g_0}, \quad (1-87)$$

где  $g_0$  и  $g_1$  — средние геометрические расстояния площадей поперечных сечений оболочки и провода  $l$  от самих себя, а  $g_{10}$  — среднее геометрическое расстояние этих площадей друг от друга. Так как (§ 10-3)  $g_{10}$  равно  $R$ , а  $g_0$  также равно  $R$  и притом независимо от формы поперечного сечения провода и его положения внутри оболочки, то

$$L_{10} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_1}.$$

Аналогично для индуктивности петли, образованной проводом  $k$  и оболочкой, имеем

$$L_{k0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_k} \quad (1-88)$$

и для взаимной индуктивности двух таких петель

$$M_{ki} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_{hi}}, \quad (1-89)$$

где  $g_{hi}$  — среднее геометрическое расстояний площадей поперечных сечений проводов  $k$  и  $i$  друг от друга.

Так как для произвольной системы, подчиненной условию (1-84) или (1-85), суммарный ток оболочки, служащей обратным проводом всех рассматриваемых петель, всегда равен нулю, то введение оболочки ничего не меняет в физической картине поля системы, и, следовательно, любую такую систему всегда можно рассматривать как совокупность  $n$  отдельных петель вида «провод—оболочка». Величины вида (1-88) и (1-89), определяющие собственные и взаимные индуктивности таких петель, можно условно называть собственными и взаимными индуктивностями проводов  $k$  и  $i$ . Чтобы отличать их от собственных ( $L_k$ ) и взаимных ( $M_{ki}$ ) индуктивностей проводов (участков), о которых была речь в § 1-3, будем называть величины вида (1-88) и (1-89) *условными индуктивностями проводов* и обозначать буквами  $\Lambda$ , а не  $L$  и  $M$ .

Таким образом, для условных собственных и взаимных индуктивностей проводов  $k$  и  $i$  можем написать

$$\Lambda_k = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_k}; \quad \Lambda_{ki} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_{hi}}. \quad (1-90)$$

Наличие в этих формулах радиуса оболочки  $R$  не должно вызывать недоумений, так как при определении действительных индуктивностей системы эта величина в конечный результат не войдет.

Для иллюстрации сказанного определим индуктивность системы, состоящей из двух проводов 1 и 2 (прямого и обратного). Рассматривая петлю, образованную проводами 1 и 2, как последовательное встречное соединение петель «провод 1 — оболочка» и «провод 2 — оболочка», получим

$$L_{12} = \Lambda_1 + \Lambda_2 - 2\Lambda_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{g_{12}^2}{g_{1g_2}} \quad (1-91)$$

в полном соответствии с общей формулой (1-86). Радиус оболочки, как и следовало ожидать, в конечное выражение не вошел.

Из приведенного примера видно, что условными индуктивностями  $\Lambda_k$ ,  $\Lambda_i$  и  $\Lambda_{ki}$  можно оперировать так, как если бы они были действительными собственными и взаимными

индуктивностями проводов, в чем, собственно, и заключается основной смысл введения этих понятий\*.

Пусть, например, необходимо найти индуктивность линии с расщепленными проводами, сечение которой показано на рис. 1-40.

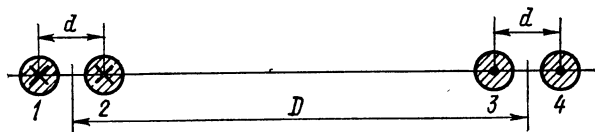


Рис. 1-40

Энергию линии на единицу ее длины можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} (\Lambda_1 i_1^2 + \Lambda_2 i_2^2 + \Lambda_3 i_3^2 + \Lambda_4 i_4^2) + \Lambda_{12} i_1 i_2 + \\ + \Lambda_{34} i_3 i_4 - \Lambda_{13} i_1 i_3 - \Lambda_{14} i_1 i_4 - \Lambda_{23} i_2 i_3 - \Lambda_{24} i_2 i_4,$$

где

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_1};$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{34} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_{12}};$$

$$\Lambda_{13} = \Lambda_{24} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_{13}};$$

$$\Lambda_{14} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_{14}}; \quad \Lambda_{23} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{g_{23}},$$

причем  $g_1 = re^{-1/4}$ ;  $g_{12} = d$ ;  $g_{13} = D$ ;  $g_{14} = D + d$ ;  $g_{23} = D - d$ .

Если токи в проводах 1, 2, 3, 4 одинаковы и вдвое меньше общего тока линии  $i$ , т. е.  $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i/2$ , то

$$W = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi} \ln \frac{g_{13}^2 g_{14} g_{23}}{g_1^2 g_{12}^2}$$

и

$$L = \frac{2W}{i^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \ln \frac{D^2 (D^2 - d^2)}{d^2 r^2} + \frac{1}{2} \right].$$

---

\* Необходимо, конечно, помнить о выполнении требования нейтральности системы.

Правильность этого результата легко проверить с помощью формулы (1-86), рассматривая провода 1 и 2 как один общий прямой провод  $A$ , а провода 3 и 4 как общий обратный провод  $B$  и применяя формулы § 10-2 и 10-3.

Если по проводам системы протекают переменные токи, фазы которых неодинаковы, то понятие общей индуктивности системы теряет непосредственный смысл. В этом случае вводят понятие об эквивалентных (или рабочих) индуктивностях отдельных проводов \*. *Эквивалентной индуктивностью*  $L_k$  провода  $k$  называют величину

$$L_k = \frac{\Delta \dot{U}_{kr}}{j\omega \dot{I}_k}, \quad (1-92)$$

где  $\Delta \dot{U}_{kr}$  — реактивное падение напряжения на единицу длины провода  $k$ ;  $\dot{I}_k$  — ток в нем \*\*.

Эквивалентная индуктивность провода зависит не только от геометрии системы, и в частности от положения рассматриваемого провода относительно других, но, вообще говоря, и от соотношения между токами системы.

Пусть, например, мы имеем трехфазную линию, состоящую из трех проводов 1, 2, 3, токи в которых образуют симметричную трехфазную систему

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_3}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_3} = \alpha = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 r_1 + j\omega (\Lambda_{11} \dot{I}_1 + \Lambda_{12} \dot{I}_2 + \Lambda_{31} \dot{I}_3) = \\ &= \dot{I}_1 r_1 + j\omega \dot{I}_1 \left( \Lambda_{11} + \alpha \Lambda_{12} + \frac{\Lambda_{31}}{\alpha} \right); \\ \Delta \dot{U}_{1r} &= j\omega \dot{I}_1 \left[ \Lambda_{11} - \frac{1}{2} (\Lambda_{12} + \Lambda_{31}) \right], \end{aligned}$$

откуда для индуктивности фазы 1 получаем

$$L_1 = \frac{\Delta \dot{U}_{1r}}{j\omega \dot{I}_1} = \Lambda_{11} - \frac{1}{2} (\Lambda_{12} + \Lambda_{31}). \quad (1-93)$$

\* Их не следует смешивать с условными индуктивностями  $\Lambda$ .

\*\* Иногда определяют  $L_k$  как отношение полного падения напряжения  $\Delta \dot{U}_k$  в проводе к произведению  $j\omega \dot{I}_k$ . Так как, однако, при этом величина  $L_k$  в некоторых случаях оказывается комплексной, то представляется более целесообразным определять  $L_k$  формулой (1-92).

Аналогично

$$L_2 = \Lambda_2 - \frac{1}{2} (\Lambda_{23} + \Lambda_{12}); \quad (1-94)$$

$$L_3 = \Lambda_3 - \frac{1}{2} (\Lambda_{31} + \Lambda_{23}). \quad (1-95)$$

Если система токов несимметрична, результат будет иным. Пусть, например,  $\dot{I}_2 = -j\dot{I}_1$ ;  $\dot{I}_3 = (-1 + j)\dot{I}_1$ . Тогда  $\Delta \dot{U}_1 = \dot{I}_1 r_1 + j\omega \dot{I}_1 [\Lambda_1 - j\Lambda_{12} - (1-j)\Lambda_{31}]$ , откуда

$$L_1 = \Lambda_1 - \Lambda_{31}.$$

Аналогично

$$L_2 = \Lambda_2 - \Lambda_{23};$$

$$L_3 = \Lambda_3 - \frac{1}{2} (\Lambda_{31} + \Lambda_{23}).$$

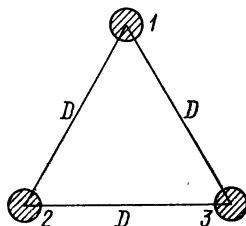


Рис. 1-41

Эти значения  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  в общем случае не совпадают с найденными выше [формулы (1-93), (1-94) и (1-95)].

Если, однако, трехфазная линия состоит из трех симметрично расположенных одинаковых проводов (рис. 1-41), то  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$ ;  $\Lambda_{12} = \Lambda_{23} = \Lambda_{31}$ , и так как для нейтральной системы всегда  $\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = -\dot{I}_1$ , то, как нетрудно убедиться,

$$L_1 = L_2 = L_3 = \Lambda_1 - \Lambda_{12} \quad (1-96)$$

и притом независимо от степени и характера несимметрии системы токов.

Аналогичным путем могут быть найдены эквивалентные индуктивности и в более сложных случаях. Некоторые формулы, относящиеся к трехфазным системам, даны в § 3-15 и 3-16.

#### 1-14. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА КАТУШЕК

Катушку можно рассматривать как сложный контур, имеющий форму цилиндрической, призматической, плоской или иной спирали, витки которой в зависимости от типа катушки имеют ход в осевом или перпендикулярном к оси направлении (рис. 1-42, а и в). Однако расчет индуктивностей катушек с учетом спиральности витков связан с весьма значительными трудностями. Поэтому при расчете индуктивностей спиральностью витков, как правило, пренебре-



гают и рассматривают катушку как совокупность отдельных замкнутых плоских витков той или иной формы, лежащих в одной или нескольких параллельных плоскостях (см., например, рис. 1-42, б и г, на которых показаны расчетные схемы катушки, соответствующие рис. 1-42, а и в). Подобное упрощение задачи существенно облегчает расчет и вместе с тем, как показывает специальное исследование, приводит лишь к весьма незначительной погрешности.

Все приводимые в книге формулы для индуктивностей катушек выведены в пренебрежении спиральностью витков.

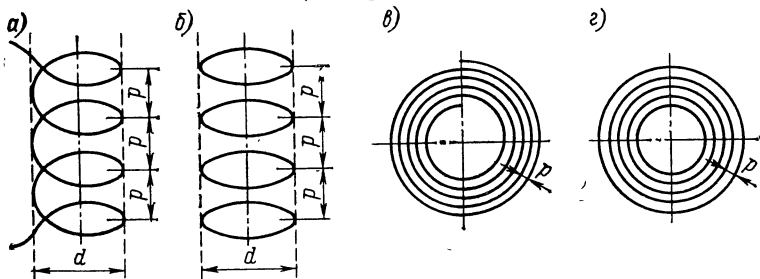


Рис. 1-42

Расчет собственных и взаимных индуктивностей катушек может быть произведен двумя принципиально отличными друг от друга методами, которые назовем соответственно *методом суммирования* и *методом массивного витка*.

При расчете методом суммирования собственная индуктивность катушки вычисляется как сумма собственных и взаимных индуктивностей всех ее витков; взаимная индуктивность двух катушек определяется как сумма взаимных индуктивностей всех витков одной катушки со всеми витками другой. Этот метод, приводящий для многослойных катушек к весьма сложным формулам, обычно не имеет никаких преимуществ по сравнению с методом массивного витка и поэтому в настоящее время почти не применяется. В несколько упрощенной форме этот метод иногда используют для числового расчета индуктивностей катушек сложной формы.

При расчете индуктивностей методом массивного витка индуктивности катушек (рис. 1-43, а) сравнивают с индуктивностями соответствующих массивных витков (для цилиндрических катушек — массивных колец), имеющих такую же форму и размеры, как обмотки рассматриваемых катушек.

Для возможности сравнения коэффициент заполнения катушек принимают равным единице, т. е. при расчете предполагают, что витки имеют бесконечно тонкую изоляцию и плотно заполняют все пространство, занятое обмоткой (см., например, рис. 1-43, в, где тонкими линиями показаны границы сечения «расчетных» витков).

При сделанном предположении и одной и той же плотности тока магнитные поля катушки (рис. 1-43, в) и соответствующего массивного витка (рис. 1-43, б) будут одинаковы, а следовательно, будут одинаковы и интегралы, входящие в формулу (1-2) для полного потока, сцепляющегося с катушкой (или соответственно с массивным витком). С другой стороны, при равенстве плотностей тока ток в катушке, имеющей  $w$  витков, в  $w$  раз меньше тока в соответствующем массивном витке, и из формулы

$$L = \frac{\Psi_L}{i} = \frac{1}{i^2} \int \Phi_L di \quad (1-97)$$

следует, что индуктивность  $L_p$  «расчетной» катушки (т. е. катушки с коэффициентом заполнения, равным единице) в  $w^2$  раз больше индуктивности  $L'$  соответствующего массивного витка:

$$L_p = w^2 L'. \quad (1-98)$$

Точно так же взаимная индуктивность  $M_p$  двух «расчетных» катушек, имеющих  $w$  и  $W$  витков, в  $wW$  раз больше взаимной индуктивности  $M'$  соответствующих массивных витков:

$$M_p = wW M'. \quad (1-99)$$

Формулы (1-98) и (1-99) сводят расчет индуктивностей катушек к расчету индуктивностей соответствующих массивных витков. Следует, однако, иметь в виду, что действительные индуктивности катушек несколько отличаются от рассчитанных по этим формулам, так как витки обмотки обычно имеют не прямоугольное, а круговое поперечное

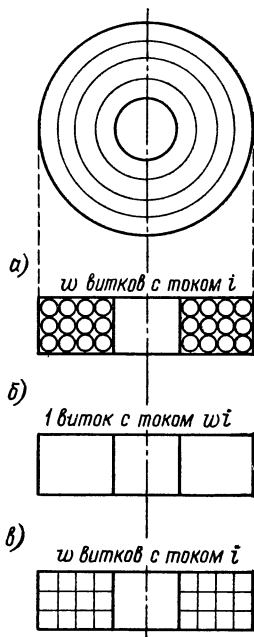


Рис. 1-43

сечение, и между отдельными витками всегда имеется некоторая воздушная или иная прослойка, необходимая для изоляции одного витка от другого. Это обстоятельство в большинстве случаев почти не сказывается на результате расчета взаимной индуктивности катушек. Однако при расчете собственных индуктивностей различие между индуктивностями действительной и расчетной катушек иногда приходится учитывать, для чего в формулу (1-98) вносят поправку, обычно называемую *поправкой на изоляцию*.

Если обозначить эту поправку через  $\Delta L$ , то вместо (1-98) будем иметь

$$L = L_p + \Delta L = \omega^2 L' + \Delta L. \quad (1-100)$$

Отличие действительной индуктивности катушки от ее расчетной индуктивности обусловлено тем, что расчетные витки имеют не такое поперечное сечение, как действительные. Если учесть, что индуктивность катушки можно рассматривать как сумму собственных и взаимных индуктивностей ее витков, то поправку  $\Delta L$  можно представить в виде

$$\Delta L = \Delta_1 L + \Delta_2 L, \quad (1-101)$$

где первая поправка ( $\Delta_1 L$ ) учитывает различие между собственными индуктивностями действительных и расчетных витков, а вторая ( $\Delta_2 L$ ) — различие между их взаимными индуктивностями.

Выражения для поправок  $\Delta_1 L$  и  $\Delta_2 L$  зависят от формы витков и их поперечных сечений, а также от типа обмотки.

Покажем процесс определения обеих поправок на примере однослойной цилиндрической катушки с витками кругового поперечного сечения. Пусть средний диаметр катушки равен  $d$ , диаметр голого провода  $r$ , а шаг обмотки  $p$  (рис. 1-44, а). Тогда расчетная катушка будет состоять из витков с тем же средним диаметром  $d$  и прямоугольным поперечным сечением  $pr$ , причем шаг обмотки будет равен  $p$  (рис. 1-44, б).

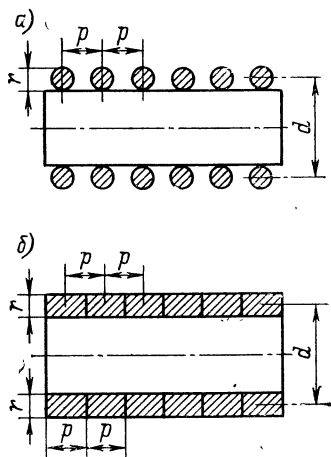


Рис. 1-44

Согласно формуле (5-15) собственные индуктивности действительного и расчетного витков могут быть рассчитаны из выражений:

$$L_1 = \frac{\mu_0 d}{2} \left( \ln \frac{4d}{g} - 2 \right); \quad L_{1p} = \frac{\mu_0 d}{2} \left( \ln \frac{4d}{g_p} - 2 \right), \quad (1-102)$$

где  $g$  — среднее геометрическое расстояние площади поперечного сечения действительного витка от самой себя;  $g_p$  — то же для расчетного витка. Вычитая  $L_{1p}$  из  $L_1$ , имеем

$$\Delta L_1 = L_1 - L_{1p} = \frac{\mu_0 d}{2} \ln \frac{g_p}{g} = \frac{\mu_0 d}{2} (\ln g_p - \ln g). \quad (1-103)$$

Согласно формулам § 10-3 для площади круга

$$\ln g = \ln \frac{r}{2} - \frac{1}{4} = \ln r - \frac{1}{4} - \ln 2 = \ln r - 0,9431,$$

а для площади прямоугольника  $\ln g_p = \ln k (p + r)$ , где  $k$  — коэффициент, определяемый по табл. 10-3.

Таким образом,

$$\Delta L_1 = \frac{\mu_0 d}{2} \left( \ln \frac{p+r}{r} + \ln 2k + \frac{1}{4} \right) \quad (1-104)$$

и, следовательно,

$$\Delta_1 L = w \Delta L_1 = \frac{\mu_0 w d}{2} \left( \ln \frac{p+r}{r} + \ln 2k + \frac{1}{4} \right). \quad (1-105)$$

При определении поправки  $\Delta_2 L$  ограничимся учетом разницы во взаимных индуктивностях, во-первых, соседних витков и, во-вторых, витков, расположенных один от другого через виток. Разницей во взаимных индуктивностях более удаленных друг от друга витков ввиду ее малости пренебрежем. В соответствии со сказанным в конце § 5-7 взаимные индуктивности соседних витков действительной катушки и соответствующих расчетных витков могут быть найдены из выражений:

$$M_{12} = \frac{\mu_0 d}{2} \left( \ln \frac{4d}{g_{12}} - 2 \right); \quad M_{12p} = \frac{\mu_0 d}{2} \left( \ln \frac{4d}{g_{12p}} - 2 \right),$$

где  $g_{12}$  — среднее геометрическое расстояний площадей поперечных сечений витков 1 и 2;  $g_{12p}$  — то же для соответствующих расчетных витков. Следовательно, поправка для соседних витков

$$\Delta M_{12} = M_{12} - M_{12p} = \frac{\mu_0 d}{2} \ln \frac{g_{12p}}{g_{12}}, \quad (1-106)$$

причем  $g_{12} = p$ , а  $g_{12p}$  можно найти по формуле (10-44) и табл. 10-4 и 10-5.

Аналогичным путем для двух витков 1 и 3, расположенных через один, найдем

$$\Delta M_{13} = \frac{\mu_0 d}{2} \ln \frac{g_{13p}}{g_{13}}, \quad (1-107)$$

где  $g_{13} = 2p$ , а  $g_{13p}$  можно определить по той же формуле (10-44), взяв расстояние между центрами прямоугольников равным  $2p$ .

Общая поправка  $\Delta_2 L$  вычисляется по формуле

$$\Delta_2 L = 2 (\omega - 1) \Delta M_{12} + 2 (\omega - 2) \Delta M_{13}. \quad (1-108)$$

Отметим, что поправка  $\Delta_1 L$  обычно в несколько раз больше, чем  $\Delta_2 L$ , так что в большинстве случаев можно ограничиться только первой из них.

Формулы для вычисления  $\Delta_1 L$  и  $\Delta_2 L$  в различных случаях даны в § 6-9.

## 1-15. О РАСЧЕТЕ ИНДУКТИВНОСТЕЙ ПРИ НИЗКОЙ И ВЫСОКОЙ ЧАСТОТАХ

Как было указано выше, при расчете индуктивностей различают случай низкой частоты, соответствующий приблизительно равномерному распределению токов по сечениям проводов, и случай высокой частоты, когда неравномерность распределения тока по сечениям значительна и должна быть учтена при расчете.

В предельном случае весьма высокой частоты распределение тока по сечению проводов настолько неравномерно, что ток в каждом проводе можно считать сосредоточенным в весьма тонком слое вблизи его поверхности.

Определение индуктивностей при низкой частоте обычно производят, пренебрегая неравномерностью распределения тока по сечениям проводов, а следовательно, и разницей между значениями индуктивностей при переменном и постоянном токе.

С наибольшими трудностями связан расчет индуктивностей при высокой частоте, когда основные формулы (1-6) и (1-7) непосредственно неприменимы (§ 1-2). Взаимная индуктивность линейных контуров и в этом случае может быть определена по формуле (1-8), для собственной же индуктивности контуров аналогичной простой формулы нет. Обычно при высокой частоте ее определяют

приближенно, разбивая магнитный поток  $\Psi$ , сцепленный с контуром, на две части: внешний поток  $\Psi_e$ , линии которого охватывают весь провод, и внутренний поток  $\Psi_i$ , линии которого полностью или частично замыкаются внутри провода, соответственно чему делится и полная индуктивность контура  $L = \Psi/i$ .

Следует, однако, заметить, что строгое и однозначное разделение полного потока  $\Psi$ , сцепленного с контуром, на внутренний и внешний, а следовательно, и общей индуктивности  $L$  на внутреннюю и внешнюю возможно лишь для осесимметричных систем (типа коаксиального кабеля кругового сечения), в общем же случае разбиение потоков и индуктивностей на внутренние и внешние в известной мере условно и зависит от способа определения (введения) этих понятий. Обычно внешний поток и внешнюю индуктивность  $L_e = \Psi_e/i$ , сравнительно мало зависящие от характера распределения тока по сечению проводника, считают одинаковыми для всех частот\* и при изменении частоты учитывают лишь изменение внутренней индуктивности  $L_i = \Psi_i/i$ . При этом внутреннюю индуктивность определяют как деленную на  $\omega$  мнимую часть комплекса полного внутреннего сопротивления провода, под которым понимают величину

$$Z_i = r_i + j\omega L_i = \dot{P}/I^2, \quad (1-109)$$

где  $\dot{P}$  — комплекс, сопряженный с комплексом  $\dot{P}$  мощности потока электромагнитной энергии, проникающей внутрь провода сквозь его боковую поверхность;  $I$  — действующее значение тока в проводе. Величина  $\dot{P}$  вычисляется как интеграл от нормальной составляющей комплексного вектора Пойнтинга по боковой поверхности провода.

Метод, основанный на представлении собственной индуктивности в виде суммы внешней и внутренней, очевидно, тем больше соответствует физической картине поля контура и, следовательно, тем точнее, чем отчетливее выражен поверхностный эффект в проводе. Этот метод применим также при постоянном токе и низкой частоте, если контур выполнен из материала с высокой магнитной проницаемостью ( $\mu \gg \mu_0$ ).

---

\* Для осесимметричных систем внешний поток  $\Psi_e$  и внешняя индуктивность  $L_e$  вообще не зависят от степени неравномерности распределения тока в проводах, образующих систему, и для этого случая поправка  $\Delta L_e$  равна нулю точно.

Формулы, позволяющие определить внутреннюю индуктивность провода при различных формах его поперечного сечения, даны для этого случая в § 2-10.

Определение индуктивностей проводов и контуров при высокой частоте удается произвести лишь в весьма небольшом числе простейших случаев. Обычно приходится ограничиваться рассмотрением предельного случая в е с ь м а в ы с о к о й ч а с т о т ы, когда распределение тока по сечениям столь неравномерно, что токи можно считать сосредоточенными в весьма тонких слоях вблизи поверхностей проводников.

В этом предельном случае почти все магнитное поле, связанное с контуром, расположено вне провода, по которому идет ток, и лишь весьма незначительная часть магнитного потока замыкается внутри провода, образуя внутренний поток контура  $\Psi_i$ . Этот поток, сосредоточенный в весьма тонком поверхностном слое, в большинстве случаев настолько мал, что им и соответствующей ему внутренней индуктивностью  $L_i = \Psi_i/i$  при весьма высокой частоте можно пренебречь. Обычно полагают  $\Psi_i = 0^*$ . Кроме того, как уже отмечалось выше (§ 1-5), для дальнейшего упрощения задачи обычно вводят то или иное дополнительное предположение о характере распределения тока по поверхностям рассматриваемых проводов.

Если пренебречь влиянием, которое оказывают на распределение тока в проводе конечность его длины, наличие соседних проводов, а для криволинейных проводов еще и их кривизна, то можно считать, что ток в прямолинейном или криволинейном проводе конечной длины распределен так же, как и в уединенном бесконечно длинном прямолинейном проводе того же поперечного сечения. В этом случае задача определения индуктивности провода при весьма высокой частоте сводится к определению величины  $N$  из формулы (1-28) и  $G$  из формулы (1-31), причем для определения величины  $\tilde{g}$ , как было разъяснено в § 1-5, необходимо иметь решение соответствующей плоской краевой задачи для уединенного провода рассматриваемого поперечного сечения.

В ряде случаев можно еще более упростить задачу, сделав предположение, что ток весьма высокой частоты распределен по поверхностям проводов равномерно. При этом величина  $G$  должна по-прежнему определяться из формулы (1-31), а  $\tilde{g} =$

---

\* Об учете внутреннего потока  $\Psi_i$  и определении внутренней индуктивности  $L_i$  см. ниже (в конце этого параграфа).

$= g$ , где  $g$  — среднее геометрическое расстояние периметра поперечного сечения провода от самого себя (находится по формулам гл. 10).

Очевидно, что для проводов кругового поперечного сечения оба варианта расчета совпадают.

Чтобы дать представление о погрешности, вносимой отличием истинного распределения тока от равномерного, рассмотрим три примера, позволяющих оценить влияние неравномерности, вызванной тремя основными факторами: кривизной провода, наличием соседних проводов и отличием сечения провода от кругового.

В качестве первого примера рассмотрим круговое кольцо кругового поперечного сечения. Ток весьма высокой частоты, проходя по кольцу, распределяется по его поверхности неравномерно. Как показывает специальное исследование [16, § 29], плотность тока имеет наибольшее значение на внутренней стороне кольца и наименьшее — на наружной его стороне, причем отношение этих плотностей тока  $j_i/j_e$  тем больше, чем меньше отношение радиуса кольца  $R$  к радиусу его поперечного сечения  $r$ . При  $R/r = 10$  отношение  $j_i/j_e$  равно 2,27.

Индуктивность кольца при весьма высокой частоте может быть найдена по формуле (§ 5-2):

$$L = \mu_0 R \left[ \left( 1 - \frac{r^2}{4R^2} \ln \frac{8R}{r} + \frac{r^2}{2R^2} \right) \ln \frac{8R}{r} - 2 - \frac{r^2}{16R^2} \right], \quad (1-110)$$

учитывающей неравномерность распределения тока по поверхности кольца и верной до членов порядка  $(r/R)^2$  включительно. С другой стороны, формула, выведенная в предположении, что ток распределен по поверхности кольца равномерно, имеет вид

$$L = \mu_0 R \left[ \left( 1 + \frac{r^2}{4R^2} \right) \ln \frac{8R}{r} - 2 \right] \quad (1-111)$$

и отличается от формулы (1-110) лишь членами порядка  $r^2/R^2$ .

Для массивного кольца с  $R/r = 10$  формула (1-110) дает  $L = 2,3551\mu_0 R$ , а формула (1-111) дает  $L = 2,3931\mu_0 R$ , так что погрешность формулы (1-111) составляет лишь около 1,6 %, несмотря на то, что при  $R/r = 10$  ток распределен по поверхности кольца весьма неравномерно ( $j_i/j_e = 2,27$ ). Таким образом, предположение о равномерности распределения тока приводит к относительно небольшой ошибке даже



тогда, когда это распределение заметно отличается от равномерного.

В рассмотренном примере неравномерность распределения тока была обусловлена криволинейностью провода. Следующий пример относится к случаю, когда причиной неравномерности является влияние соседнего провода с током.

Рассмотрим двухпроводную линию с проводами кругового поперечного сечения (рис. 3-5). Вследствие взаимного влияния проводов ток высокой частоты, проходящий по линии, распределяется по поверхности каждого из проводов неравномерно.

Несложный расчет показывает, что плотность тока  $j_i$  в наиболее близких друг к другу точках проводов относится к плотности тока  $j_e$  в наиболее удаленных друг от друга точках, как  $(d + 2r)/(d - 2r)$ , где  $d$  — расстояние между осями проводов;  $r$  — радиус сечения провода. При малых расстояниях между проводами, когда это отношение велико, распределение токов по периметрам сечений проводов резко неравномерно (например, при  $d/r = 3$  отношение  $j_i/j_e$  равно пяти, а при  $d/r = 10$  равно 1,5). Несмотря на это, формула

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r}, \quad (1-112)$$

выведенная без учета эффекта близости, т. е. в предположении равномерного распределения тока по периметрам сечений проводов, отличается от точной формулы

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d + \sqrt{d^2 - 4r^2}}{2r},$$

выведенной с учетом эффекта близости, весьма незначительно. В самом деле, представим последнюю формулу в виде

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left[ \ln \frac{d}{2r} + \ln \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{2r}{d} \right)^2} \right) \right] \quad (1-113)$$

и, предполагая, что  $d > 2r$ , разложим второй логарифм в ряд по степеням  $2r/d$ :

$$\ln \left[ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{2r}{d} \right)^2} \right] = \ln 2 - \frac{r^2}{d^2} - \frac{3}{2} \frac{r^4}{d^4} \dots$$

Тогда формула (1-113) примет вид

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r} - \frac{\mu_0 l}{\pi} \frac{r^2}{d^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{r^2}{d^2} \dots \right). \quad (1-114)$$

Сравнение формул (1-112) и (1-114) показывает, что эффект близости приводит к уменьшению индуктивности линии на величину

$$\Delta = \frac{\mu_0 l}{\pi} \frac{r^2}{d^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{r^2}{d^2} \dots \right). \quad (1-115)$$

Отношение  $\Delta$  к значению  $L$ , определенному по формуле (1-112), дано в виде кривой на рис. 1-45, где приведена

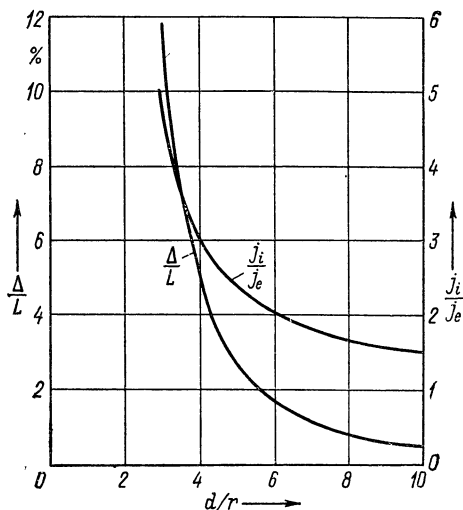


Рис. 1-45

также кривая  $j_i/j_e$ . Из рис. 1-45 видно, что погрешность от пренебрежения эффектом близости становится меньше 1 % уже при  $d/r = 8$ , хотя при этом  $j_i/j_e > 1,5$ .

В качестве третьего примера рассмотрим прямолинейный провод, имеющий форму тонкой (теоретически бесконечно тонкой) ленты длиной  $l$  и шириной  $2a$  ( $a \ll l$ ). Легко показать, что при весьма высокой частоте линейная плотность тока в ленте равна

$$j = \frac{l}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}},$$

где  $x$  — расстояние от рассматриваемой точки ленты до ее оси. Из приведенной формулы видно, что распределение тока по сечению ленты существенно неравномерно, а на

краях ( $x = a$ )  $j = \infty$ . Несмотря на это, учет неравномерности распределения тока сравнительно мало сказывается на результате расчета, так как величины  $\tilde{g}$  и  $g$ , определяющие индуктивность провода при учете и неучете неравномерности распределения тока (§ 1-5), мало отличаются друг от друга:  $\tilde{g} = 1/2 a$ ;  $g = 0,446 a$ . Применяя для определения индуктивности формулы:

$$L(\tilde{g}) = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{\tilde{g}} - 1 \right) \text{ и } L(g) = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left( \frac{2l}{g} - 1 \right),$$

находя их разность и относя ее к  $L(\tilde{g})$ , получим

$$\delta = \frac{L(g) - L(\tilde{g})}{L(\tilde{g})} = \frac{\ln \tilde{g}/g}{\ln \frac{2l}{\tilde{g}} - 1}.$$

Пусть, например,  $l = 50 a$ , тогда  $\delta = 2,7 \%$  (см. также рис. 2-2).

Из приведенных примеров видно, что даже существенная неравномерность распределения тока по периметрам поперечных сечений проводов сравнительно мало сказывается на значении индуктивностей, причем наибольшее влияние оказывает эффект близости, вызванный наличием несимметрично расположенных соседних проводов с током.

Таким образом, во всех случаях, когда более точное решение задачи невозможно, предположение о равномерности распределения токов высокой частоты по поверхностям проводов можно рассматривать как первое приближение, вполне допустимое в большинстве инженерных расчетов. Указанное предположение может, однако, оказаться неприемлемым для проводов со сложной формой поперечного сечения и проводов, весьма близко расположенных друг к другу. Каждый из таких сомнительных случаев требует специального рассмотрения.

Все приведенные в настоящей книге формулы, относящиеся к случаю весьма высокой частоты, дают лишь внешние индуктивности проводов и контуров. При желании учесть потоки внутри проводов следует к внешней индуктивности каждого провода, найденной одним из указанных способов, прибавить его внутреннюю индуктивность  $L_i$ , которая может быть определена из формулы (1-109).

Для линейных проводов из материала с постоянной магнитной проницаемостью активное и внутреннее индуктивное сопротивление при весьма высокой частоте равны друг

другу и в соответствии с формулой (1-109) могут быть найдены из выражения

$$r = \omega L_i = l \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} \frac{\int_{\lambda} j^2 d\lambda}{\left( \int_{\lambda} j d\lambda \right)^2}, \quad (1-116)$$

где  $l$  — длина провода;  $\lambda$  — периметр его поперечного сечения;  $j$  — линейная плотность тока на поверхности провода, предполагаемая неизменной в направлении оси провода; интегрирование в числителе и знаменателе производится по периметру поперечного сечения провода. Величина  $j$  должна быть взята из решения той краевой задачи, из которой определяется и внешняя индуктивность  $L_e$ . Однако обычно упрощают расчет, используя для определения  $j$  решение соответствующей задачи для бесконечно длинного прямолинейного провода (или системы таких проводов).

Пусть, например, провод имеет эллиптическое поперечное сечение с полуосями  $a$  и  $b$  (рис. 1-12). Тогда плотность тока  $j$  на поверхности провода определяется выражением

$$j = \frac{A}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}}, \quad (1-117)$$

где  $\varepsilon$  — эксцентриситет эллипса;  $A$  — некоторая постоянная. Подставляя это выражение в формулу (1-116) и учитывая, что

$$d\lambda = \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx,$$

имеем

$$\int_{\lambda} j^2 d\lambda = \frac{4A^2}{a} K; \quad \int_{\lambda} j d\lambda = 2\pi A,$$

и, следовательно,

$$L_i = l \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}} \frac{K}{\pi^2 a}, \quad (1-118)$$

где  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ .

Аналогичным путем определяется внутренняя индуктивность провода прямоугольного сечения (§ 2-7). В более сложных случаях определение закона изменения плотности тока по периметру сечения провода и последующее интегри-

рование в формуле (1-116), как правило, связаны со значительными трудностями. В подобных случаях можно пользоваться приближенной формулой

$$L_i = \frac{l}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}}, \quad (1-119)$$

получаемой из (1-116) в предположении, что плотность тока постоянна по периметру поперечного сечения провода. Так как для проводов из немагнитных материалов внутренняя

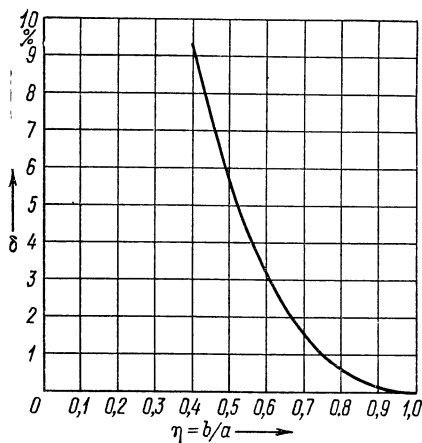


Рис. 1-46

индуктивность при весьма высокой частоте, как правило, значительно меньше, чем внешняя, то допускаемая при таком предположении ошибка сравнительно мало сказывается на общей индуктивности провода.

Некоторое представление о возможной погрешности формулы (1-119) дает рис. 1-46, на котором эта погрешность ( $\delta$ ) дана для провода эллиптического сечения в зависимости от отношения полуосей эллипса  $a$  и  $b$ .

Для проводов из ферромагнитных материалов внутренняя индуктивность  $L_i$  при весьма высокой частоте может быть найдена по формуле

$$L_i = 0,6 \frac{l}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu_e}{\omega\gamma}}, \quad (1-120)$$

где  $\mu_e$  — абсолютная магнитная проницаемость материала, определяемая по основной кривой намагничивания при значении напряженности магнитного поля  $H$ , равном действующему значению напряженности магнитного поля на той поверхности провода, через которую электромагнитное поле проникает в провод (например, для наружного провода кабеля, изображенного на рис. 3-1,  $a$ ,  $\mu_e$  следует определять при  $H = I/(2\pi q)$ , где  $I$  — действующее значение тока в кабеле). Для возможности пользования формулой (1-120) необходимо, чтобы рассматриваемый провод не имел глубо-

ких прорезей и полостей, сообщающихся с внешним пространством весьма узкими щелями\*.

Учет поверхностного эффекта и эффекта близости при расчете индуктивностей катушек представляет собой задачу, еще не получившую удовлетворительного разрешения\*\*. Следует, однако, отметить, что неравномерность распределения тока по сечениям отдельных витков весьма мало сказывается на взаимной индуктивности катушек и может иметь существенное значение лишь для собственной индуктивности катушек.

В случае резко неравномерного распределения тока собственная индуктивность катушки может изменяться на величину, имеющую тот же порядок, что и поправка на изоляцию (§ 1-14).

### **1-16. О РАСЧЕТЕ ИНДУКТИВНОСТЕЙ ЭКРАНИРОВАННЫХ ПРОВОДОВ, КОНТУРОВ И КАТУШЕК**

Магнитные и электромагнитные экраны, применяемые для защиты проводов, контуров и катушек от воздействия внешних постоянных и переменных магнитных полей и для ослабления собственных магнитных полей, создаваемых отдельными элементами электрической цепи в окружающем их пространстве, обычно располагаются в непосредственной близости от экранируемых объектов и изменяют собственное магнитное поле этих объектов, а следовательно, и их собственные и взаимные индуктивности\*\*\*.

Аналогичные эффекты вызывают различные элементы конструкции, имеющие вид плоских или изогнутых пластин и оболочек и, независимо от их основного назначения, играющие роль магнитных или электромагнитных экранов.

В ряде случаев изменение индуктивностей, обусловленное наличием экранов или экранирующих элементов конструкции, может быть значительным и должно быть учтено или, по крайней мере, оценено при расчете. Этому вопросу посвящена гл. 11, где даны формулы и кривые, которые позволяют определить изменения собственных и взаимных индук-

---

\* Весь нормальный сортамент фасонной стали этому требованию удовлетворяет.

\*\* Эта задача осложняется еще тем, что при высокой частоте существенную роль начинают играть емкостные явления.

\*\*\* При переменном токе наличие экранов приводит также к изменению активных сопротивлений.

ктивностей, обусловленные магнитными и электромагнитными экранами различной формы.

Определения терминов «магнитный экран» и «электромагнитный экран» даны в ГОСТ 18311—80. Однако следует иметь в виду, что деление экранов на магнитные и электромагнитные в известной мере условно: при переменном токе в магнитном экране из проводящего материала возникают вихревые токи, вследствие чего такой экран является одновременно и электромагнитным; с другой стороны, «магнитный эффект» всегда, хотя и в слабой степени, присущ и электромагнитному экрану, материал которого имеет магнитную проницаемость  $\mu$ , строго говоря, отличную от магнитной постоянной  $\mu_0$ .

Однако практически экраны по своим физическим свойствам всегда близки к одной из двух расчетных схем — экрану из непроводящего материала с высокой магнитной проницаемостью и экрану из немагнитного материала ( $\mu = \mu_0$ ) с высокой удельной электрической проводимостью; именно к этим расчетным схемам относятся применяемые в дальнейшем термины «магнитный экран» и «электромагнитный экран».

Решение задач экранирования, и в частности определение вносимых экранами собственных и взаимных индуктивностей, связано с необходимостью расчета по сложным формулам даже для экранов сравнительно простой формы. Поэтому при инженерных расчетах, не требующих большой точности, обычно упрощают задачу определения вносимых индуктивностей, рассматривая магнитные экраны как идеально проницаемые, а электромагнитные — как идеально проводящие, т. е. полагая в первом случае  $\mu = \infty$ , а во втором  $\gamma = \infty$ . Все формулы и кривые, приведенные в гл. 11, относятся именно к этим двум предельным случаям, определяющим, очевидно, верхнюю границу возможных значений вносимых индуктивностей. Если обозначить вносимые индуктивности реального и идеального экранов соответственно через  $\Delta L$  и  $\Delta L_\infty$ , то соотношение между ними можно представить в виде  $\Delta L = \Delta L_\infty (1 - \eta)$ , где  $\eta$  — поправка, учитывающая отличие реального экрана от идеального.

Общее представление о величине этой поправки дает табл. 1-7, в которой приведены приближенные выражения, определяющие поправку  $\eta$  для случая воздействия точечного магнитного диполя на плоский и сферический экраны (рис. 1-47, а, б) и линейного магнитного дипо-

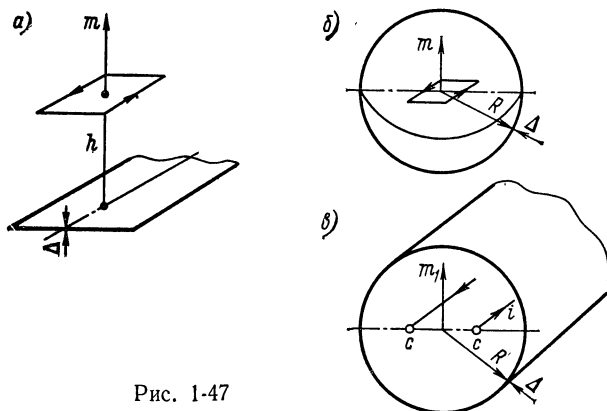


Рис. 1-47

ля на бесконечно длинный цилиндрический экран (рис. 1-47, в)\*.

Для возможности сопоставления в таблице даны также выражения, определяющие модуль  $k_s$  коэффициента экранирования, т. е. отношения абсолютных величин напряженности поля в экранируемой области при наличии и отсутствии экрана (для плоского экрана величина  $k_s$  определена в точке, являющейся зеркальным изображением точки расположения диполя). Все данные табл. 1-7 относятся к тонкостенным экранам с высокой эффективностью экранирования ( $k_s \ll 1$ ). Через  $\Delta$  обозначена толщина экрана, через  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость материала магнитного экрана и через  $\delta = \sqrt{2}/\sqrt{\omega\mu_0\gamma}$  — глубина проникновения электромагнитного поля в стенку электромагнитного экрана ( $\omega$  — угловая частота изменения поля,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\gamma$  — удельная электрическая проводимость материала экрана).

\* Точечным магнитным диполем, как известно, называется источник поля, получаемый из плоского контура с током  $i$  и площадью  $s$  при уменьшении до нуля всех линейных размеров контура и одновременном неограниченном возрастании тока  $i$  по закону  $i = m/s$ , где  $m = \text{const}$  — магнитный момент контура.

Под линейным магнитным диполем понимается источник поля, получаемый из двухпроводной линии с бесконечно тонкими проводниками (нитями) при уменьшении до нуля расстояния  $s$  между нитями и одновременном неограниченном возрастании тока  $i$  в линии по закону  $i = m_1/s$ , где  $m_1 = \text{const}$  — магнитный момент линии на единицу ее длины. Моментам  $m$  и  $m_1$  приписывается направление, нормальное к плоскостям контура и линии и связанное с направлениями тока  $i$  правилом правого винта (рис. 1-47).



Таблица 1-7. Поправка  $\eta$  для экранов различной формы

Экран	Плоский		Сферический		Цилиндрический	
	$\epsilon$	$k_3$	$\eta$	$k_5$	$\eta$	$k_3$
Магнитный	$k_3$	$\frac{1}{2 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\Delta}{h}}$	$k_5$	$\frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\Delta}{R}}$	$k_5$	$\frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\Delta}{R}}$
Электро- магнитный ( $\Delta < \delta$ )	$\frac{4}{3} k_3^2$	$\frac{3}{2} \frac{\delta^2}{h\Delta}$	$k_3^2$	$\frac{3}{2} \frac{\delta^2}{R\Delta}$	$k_3^2$	$\frac{\delta^2}{R\Delta}$
Электро- магнитный ( $\Delta > \delta$ )	$\frac{3}{2} \frac{\delta}{h}$	$\frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{h} e^{-\frac{\Delta}{\delta}}$	$\frac{3}{2} \frac{\delta}{R}$	$\frac{6}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{R} e^{-\frac{\Delta}{\delta}}$	$\sqrt{2} \frac{\delta}{R}$	$\frac{4}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{R} e^{-\frac{\Delta}{\delta}}$

Определим в качестве примера поправку  $\eta$  для плоского контура с током, расположенного параллельно плоскому магнитному экрану ( $\Delta = 4$  мм,  $\mu = 400 \mu_0$ ) на расстоянии  $h = 10$  см от него. Если размеры контура позволяют рассматривать его как точечный магнитный диполь, то соответствующая этому случаю формула табл. 1-7 дает  $\eta = k_3 = 0,1$ . При тех же размерах системы для электромагнитного экрана из меди ( $\mu = \mu_0$ ,  $\gamma = 5,7 \cdot 10^7$  См/м) при частоте  $f = 50$  Гц глубина проникновения  $\delta$  составляет около 0,94 см, так что  $\Delta < \delta$ , и, пользуясь соответствующей формулой табл. 1-7, находим  $k_3 = 0,33$ ,  $\eta = 0,109$ . Таким образом, в обоих случаях поправка составляет около 10 %. Так как вносимая индуктивность обычно меньше собственной индуктивности контура или катушки без экрана, то из приведенного примера, как и из общего рассмотрения табл. 1-7, следует, что в инженерных расчетах, не требующих высокой степени точности, при определении вносимых индуктивностей поправку на отличие реального экрана от идеального можно вовсе не вносить или же определять приближенно, пользуясь табл. 1-7.

#### 1-17. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ И РАСЧЕТА ИНДУКТИВНОСТЕЙ

Энергетические методы, т. е. методы, основанные на использовании энергетических соотношений, применяются в электростатике для оценки и расчета емкости уединенных

проводников и емкости между двумя проводниками [2, 10]. С соответствующими изменениями эти методы могут быть также использованы для оценки и расчета собственных индуктивностей проводов и контуров различной формы.

Некоторые из этих методов рассматриваются в настоящем параграфе.

**1. Принципы Дирихле и Томсона.** Рассмотрим какой-нибудь контур с током при резко выраженном поверхностном эффекте, что по принятой в настоящей книге терминологии соответствует случаю весьма высокой частоты. Обозначим ток в контуре через  $i$ , сцепленный с ним магнитный поток через  $\Psi$ , а индуктивность контура через  $L$ . Пусть в области  $\Omega$  вне контура векторы  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{B}''$  характеризуют два каких-нибудь поля, вообще говоря, не совпадающих с истинными полями  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , создаваемыми в этой области током  $i$  контура. Подчиним поля  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{B}''$  следующим условиям:

- 1) в области  $\Omega$  выполняется равенство  $\text{rot } \mathbf{H}' = 0$ ;
- 2) циркуляция вектора  $\mathbf{H}'$  по любой кривой, охватывающей контур, равна циркуляции истинного вектора  $\mathbf{H}$  по этой кривой, т. е. току  $i$ ;
- 3) в области  $\Omega$  выполняется равенство  $\text{div } \mathbf{B}'' = 0$ ;
- 4) нормальная составляющая  $B_n''$  вектора  $\mathbf{B}''$  на поверхности проводника, образующего контур, равна нулю;
- 5) поток вектора  $\mathbf{B}''$ , сцепленный с контуром, равен потоку истинного вектора  $\mathbf{B}$ .

Кроме того, если область  $\Omega$  содержит бесконечно удаленные точки, будем считать оба поля ( $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{B}''$ ) исчезающими на бесконечности.

Можно показать, что при указанных условиях справедливы следующие неравенства, которые, как и соответствующие неравенства в электростатике [10], назовем принципами Дирихле и Томсона:

$$L \leq \frac{\mu}{i^2} \int_{\Omega} (\mathbf{H}')^2 d\Omega; \quad (1-121)$$

$$\frac{1}{L} \leq \frac{1}{\mu \Psi^2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}'')^2 d\Omega. \quad (1-122)$$

Так как по принятым условиям напряженность поля  $\mathbf{H}'$  должна быть пропорциональна току  $i$ , а магнитная индукция  $\mathbf{B}''$  — потоку  $\Psi$ , то неравенства (1-121) и (1-122) дают соответственно верхнюю и нижнюю оценки индуктивности  $L$ . При этом в качестве полей  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{B}''$  могут быть взяты любые поля, удовлетворяющие указанным выше условиям.

Различным полям  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{B}''$  соответствуют различные оценки индуктивности, в большей или меньшей степени близкие к истинному значению  $L$ , и чем ближе эти поля к истинному, тем точнее оценки.

Знак равенства в формулах (1-121) и (1-122) соответствует случаю, когда фиктивные поля  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{B}''$  совпадают с истинными полями  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ .

Таким образом, неравенства (1-121) и (1-122) могут быть использованы для количественной оценки и расчета индуктивностей при весьма высокой частоте.

Пусть  $\mathbf{H}'$  в формуле (1-121), выражающей принцип Дирихле, означает напряженность магнитного поля, создаваемого в области  $\Omega$  рассматриваемым контуром при любой (высокой или низкой) частоте или вообще при произвольно заданном распределении тока  $i$  по площади или периметру поперечного сечения контура, а  $L'$  — соответствующую этому полю индуктивность контура. Тогда из неравенства (1-121) следует, что  $L \leq L'$ . Таким образом, индуктивность  $L$ , соответствующая истинному распределению тока весьма высокой частоты по периметру поперечного сечения контура, всегда меньше индуктивности  $L'$  при любом другом распределении тока по сечению. Из этого неравенства следуют некоторые общие оценки, относящиеся к рассматриваемому случаю:

1) индуктивность  $L$  контура при весьма высокой частоте дает нижнюю оценку индуктивности  $L'$  того же контура при любой другой частоте; наоборот, любое из значений  $L'$  может рассматриваться как верхняя оценка индуктивности  $L$ ;

2) рассмотренный в § 1-15 метод расчета, основанный на предположении, что ток весьма высокой частоты распределен по периметру поперечного сечения провода равномерно, всегда приводит к преувеличенным значениям индуктивности; это утверждение справедливо и по отношению к уточненному методу расчета, при котором распределение тока по периметру сечения принимается таким же, как и у бесконечно длинного прямолинейного провода того же сечения; следовательно, оба метода дают верхнюю оценку индуктивности контура при весьма высокой частоте;

3) верхнюю оценку индуктивности какого-либо контура  $K$  при весьма высокой частоте можно получить, определив (для любой частоты) индуктивность любого другого контура  $K_1$ , по форме и размерам вписывающегося в габариты контура  $K$ ; нижнюю оценку можно получить, найдя индуктивность при

весьма высокой частоте любого контура  $K_2$ , в габариты которого вписывается контур  $K$  (рис. 1-48).

Следует иметь в виду, что упомянутые здесь общие оценки, непосредственно вытекающие из принципа Дирихле, в ряде случаев могут оказаться довольно грубыми. В подобных случаях более точные оценки можно иногда получить с помощью специальных методов, рассмотренных в двух следующих пунктах этого параграфа.

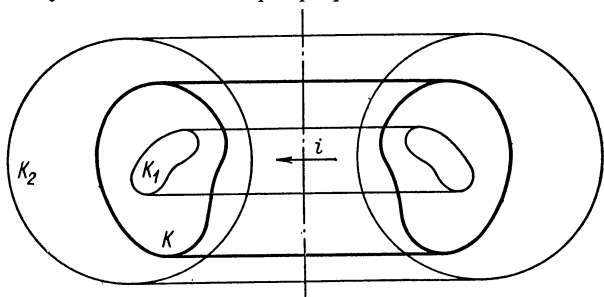


Рис. 1-48

**2. Метод предписанных поверхностей и линий.** Принципы Дирихле и Томсона [неравенства (1-121) и (1-122)], как уже отмечалось, можно использовать для двухсторонней оценки индуктивностей контуров при весьма высокой частоте. Одним из методов такой оценки является метод предписанных поверхностей и линий. Идея этого метода заключается в том, что при выборе поля  $\mathbf{H}'$  заранее задаются формой поверхностей (для двумерных задач — линий) равного скалярного потенциала, а при выборе поля  $\mathbf{B}''$  — формой линий этого вектора, после чего из всех полей, отвечающих предписанным требованиям, выбирают такие, при которых неравенства (1-121) и (1-122) дают наилучшую оценку индуктивности.

Продemonстрируем применение этого метода на примере однофазного кабеля с произвольной формой поперечного сечения прямого и обратного проводов (рис. 1-49). Отнесем сечение кабеля к полярной системе координат  $\rho, \theta$ , расположив ее начало внутри сечения внутреннего провода, и пусть  $\rho = r(\theta)$  и  $\rho = R(\theta)$  будут уравнениями границ области  $\Omega$  со стороны внутреннего и внешнего проводов.

Магнитное поле  $\mathbf{H}'$  в области  $\Omega$  будем характеризовать скалярным потенциалом  $v$ , который представим в виде  $v = i\phi(\rho, \theta)$ , где  $i$  — ток кабеля. Для однозначности этого потенциала в области  $\Omega$  введем непроницаемую перего-

родку [15], которую совместим с частью луча  $\theta = 0$  между границами области. Если принять, что  $\varphi = 0$  при  $\theta = 0$ , то при  $\theta = 2\pi$  будем иметь  $\varphi = 1$ . В остальном выбор функции  $\varphi(\rho, \theta)$  произволен. Мы рассмотрим случай, когда  $\varphi$  не зависит от  $\rho$  и, следовательно, линии равного потенциала совпадают с лучами  $\theta = \text{const}$ , а напряженность  $\mathbf{H}' = -\text{grad } v$  фиктивного поля имеет только составляющую  $H_\theta$ ; при этом

$$H' = |H'_\theta| = \frac{i}{\rho} \frac{d\varphi}{d\theta},$$

и из формулы (1-121) для индуктивности кабеля на единицу его длины находим

$$L \leq \mu \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right|^2 d\Omega = \mu \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right|^2 F(\theta) d\theta, \quad (1-123)$$

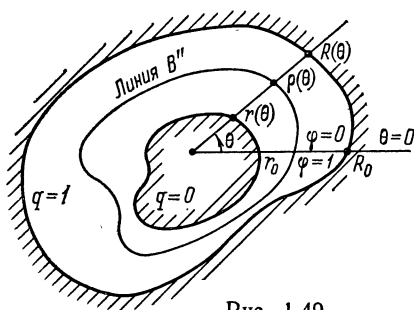


Рис. 1-49

где  $d\Omega = \rho d\rho d\theta$ ;  $F(\theta) = \ln \frac{R(\theta)}{r(\theta)}$ .

Если принять  $\varphi(\theta) = \theta/(2\pi)$ , то последняя формула дает

$$L \leq \frac{\mu}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta.$$

Эта оценка верхнего предела индуктивности кабеля не является, однако,

наилучшей. Обозначив интеграл в правой части формулы (1-123) через  $J_1$ , а интеграл  $\int_0^{2\pi} d\theta / \sqrt{F(\theta)}$  через  $J_2$  и применяя неравенство Шварца, имеем

$$J_1 J_2 \geq \left[ \int_0^{2\pi} \sqrt{F(\theta)} \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right| \frac{1}{\sqrt{F(\theta)}} d\theta \right]^2 = 1,$$

откуда  $J_1 \geq 1/J_2$ , причем равенство имеет место только при пропорциональности или равенстве подынтегральных функций интегралов  $J_1$  и  $J_2$ . При этом для индуктивности  $L$  получим

$$L \leq \mu \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\ln R/r} \right)^{-1}, \quad (1-124)$$

что в рассматриваемом случае и дает наиболее точную верхнюю оценку индуктивности. Аналогично находится и нижняя оценка. Если ввести параметр  $q$ , изменяющийся от 0 при  $\rho = r$  до 1 при  $\rho = R$ , и определить семейство линий вектора  $\mathbf{B}''$  уравнением

$$\rho(\theta) = (1 - q)r(\theta) + qR(\theta), \quad (1-125)$$

то, используя, как и выше, неравенство Шварца, можно получить наилучшую нижнюю оценку индуктивности в виде

$$L \geq \mu \int_{r_0}^{R_0} \frac{d\rho_0}{\Lambda}, \quad (1-126)$$

где

$$\Lambda = (R_0 - r_0) \oint |\text{grad } q| d\lambda; \quad (1-127)$$

$$|\text{grad } q| = \frac{1}{(R-r)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\rho^2} \left[ r' + (\rho - r) \frac{R' - r'}{R - r} \right]^2 \right\};$$

$d\lambda$  — элемент длины линии вектора  $\mathbf{B}''$ , проходящей через точку  $(\rho_0, 0)$  на луче  $\theta = 0$ , а индексами 0 отмечены величины, относящиеся к этому лучу; штрихи у  $r$  и  $R$  означают производные по углу  $\theta$ .

Из формул (1-124) и (1-126) видно, что нахождение верхней и нижней оценок индуктивности требует однократного или двукратного интегрирования, которое, как правило, приходится выполнять численно.

Расчет существенно упрощается, если границы области гомотетичны. Пусть центр гомотетии совпадает с началом координат, а коэффициент гомотетии равен  $k$ . Тогда  $\ln R/r = \ln k$ , и формула (1-124) дает

$$L \leq \frac{\mu}{2\pi} \ln k. \quad (1-128)$$

Для этого случая

$$\Lambda = \rho_0 \oint \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{1/2} dl, \quad (1-129)$$

где  $dl$  — элемент длины внутренней границы области  $\Omega$ , откуда

$$L \geq \mu \frac{\rho_0}{\Lambda} \ln k. \quad (1-130)$$

Найдем в качестве простого примера верхнюю и нижнюю оценки индуктивности кабеля, прямой и обратный провода

которого (рис. 1-50) представляют собой гомотетичные эллипсы с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $A = ka$ ,  $B = kb$ . Верхняя оценка определяется формулой (1-128). Для получения нижней оценки совместим луч  $\theta = 0$  с большими полуосями эллипсов, после чего выражение для  $\Lambda$  примет вид

$$\Lambda = 4\rho_0 \int_0^{\pi/2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^4}{4} \frac{\sin^2 2\theta}{T^4} \right) d\theta,$$

где  $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ ;  $T = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}$ . Выполнив указанное в этой формуле интегрирование, при  $b/a = 1/\sqrt{2}$ ,  $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$  найдем  $\Lambda/\rho_0 = 6,66$  и соответственно

$$L \geq \frac{\mu}{6,66} \ln k. \quad (1-131)$$

Отношение правых частей неравенств (1-128) и (1-131) равно  $6,66/(2\pi) = 1,06$ , и, следовательно, индуктивность кабеля можно в данном случае оценить с погрешностью, не превышающей 3 %.

В заключение отметим, что в силу известной связи между индуктивностью и емкостью идеальной линии [формула (1-146)], зная верхнюю оценку емкости линии (кабеля), можно найти нижнюю оценку ее индуктивности, и наоборот.

**3. Вариационный метод Ритца.** Из принципа Томсона [формула (1-122)] следует, что интеграл

$$I = \int_{\Omega} (\mathbf{B}'')^2 d\Omega \quad (1-132)$$

в правой части формулы (1-122) принимает минимальное значение  $I_{\min}$ , когда фиктивное поле  $\mathbf{B}''$  совпадает с истинным полем  $\mathbf{B}$  рассматриваемого контура. При этом

$$L = \mu \Psi^2 / I_{\min}. \quad (1-133)$$

Таким образом, задача определения индуктивности контура при весьма высокой частоте может быть сведена к за-

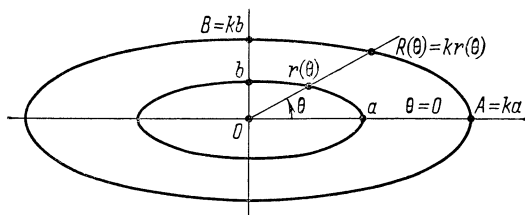


Рис. 1-50

даче отыскания векторной функции  $\mathbf{B}''$ , минимизирующей интеграл (1-132). Так как точное решение этой вариационной задачи чаще всего невозможно, обычно ограничиваются приближенным ее решением. Среди различных методов, применяемых в подобных случаях, одним из наиболее простых и эффективных является метод Ритца, который мы рассмотрим здесь применительно к проводам и системам с плоскопараллельным магнитным полем. В этом случае векторы поля  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  лежат в параллельных плоскостях, одну из которых можно совместить с плоскостью  $xy$ ; при этом векторный потенциал поля  $\mathbf{A}$  имеет только одну составляющую  $A_z$ , параллельную оси  $z$ , и

$$(\mathbf{B}'')^2 = \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)^2 = \text{grad}^2 A_z,$$

так что

$$I = \int_{\Omega} \text{grad}^2 A_z d\Omega. \quad (1-134)$$

По методу Ритца приближенное значение функции  $A_z$ , минимизирующей интеграл (1-132), ищется в виде суммы

$$A_z = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots, \quad (1-135)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — линейно независимые функции, выбранные так, чтобы сумма (1-135) удовлетворяла граничным условиям задачи независимо от значений параметров  $a_1, a_2, \dots$ . Значения этих параметров определяют из условия

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1-136)$$

обеспечивающего минимум интеграла (1-132). Если сумма (1-135) содержит  $n$  членов, то условие (1-136) дает систему  $n$  уравнений, из которой и можно найти все параметры  $a_k$ .

Продemonстрируем применение метода Ритца на уже рассмотренном в п. 2 примере однофазного кабеля, имеющего сечение в виде двух гомотетичных эллипсов с полуосями  $a, b$  и  $A = ka, B = kb$  (рис. 1-50). Если принять, что векторный потенциал  $A_z$  на наружном проводе равен нулю, то на внутреннем проводе он равен магнитному потоку  $\Psi$  на единицу длины кабеля. В соответствии с методом Ритца, полагая  $n = 2$ , будем искать  $A_z$  в виде

$$A_z = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$$

и в качестве функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  выберем



$$\varphi_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - k^2; \quad \varphi_2 = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - k^2 \right).$$

Нетрудно видеть, что при этом удовлетворить граничным условиям для  $A_z$  можно только при

$$a_1 = \Psi/(1 - k^2),$$

после чего остается неизвестным только параметр  $a_2$ . Дифференцируя  $A_z$  по  $x$  и  $y$ , подставляя результат в (1-134) и выполнив интегрирование по области  $\Omega$ , заключенной между эллипсами, получим

$$I = \pi \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \left[ \Psi^2 \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} a_2 \frac{\Psi}{1 - k^2} (k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1) + \right. \\ \left. + \frac{a_2^2}{3} (k^8 - 2k^6 + 2k^2 - 1) \right].$$

Приравнявая нулю производную  $\partial I / \partial a_2$ , найдем

$$a_2 = \Psi \frac{k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1}{(k^2 - 1)(k^8 - 2k^6 + 2k^2 - 1)}; \\ I_{\min} = \pi \Psi^2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \left( \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} - \frac{1}{3} \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \right); \\ L = \frac{\mu}{\pi} \left[ \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \left( \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} - \frac{1}{3} \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \right) \right]^{-1}.$$

При  $b/a = 1/\sqrt{2}$  и  $k = 2$  последняя формула дает  $L = 1,023\mu$ , в то время как нижняя оценка по методу предписанных поверхностей и линий составляет в этом случае  $1,041\mu$ , так что оба значения  $L$  отличаются друг от друга на 1,7 %.

В качестве другого примера применения метода Ритца рассмотрим задачу определения внутренней индуктивности  $L_i$  прямолинейного провода из материала с весьма высокой магнитной проницаемостью ( $\mu \gg \mu_0$ ). Если ток в проводе можно считать распределенным по его сечению равномерно (что имеет место при постоянном токе и низкой частоте), то  $z$  — составляющая векторного потенциала магнитного поля внутри провода удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J A_z, \quad (1-137)$$

где  $J = i/s$  — плотность тока.

В силу условия  $\mu \gg \mu_0$  можно считать, что одна из магнитных линий совпадает с границей поперечного сечения провода (рис. 1-51), которая, таким образом, является линией равного значения  $A_z$  [15], причем это значение можно принять равным нулю. Если решить уравнение (1-137) при указанном граничном условии и найти энергию магнитного поля внутри провода на единицу его длины

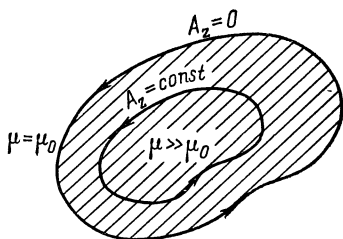


Рис. 1-51

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_z J d\Omega = \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \text{grad}^2 A_z d\Omega, \quad (1-138)$$

то из равенства

$$W = \frac{1}{2} L_i i^2$$

определится и внутренняя индуктивность  $L_i$ . При этом решение уравнения (1-137), а следовательно, и определение  $L_i$  можно свести к задаче минимизации некоторого интеграла, который в данном случае имеет вид

$$I = \int_{\Omega} (\text{grad}^2 \tilde{A} - 2J \tilde{A} \mu) d\Omega. \quad (1-139)$$

Минимум интеграла  $I$ , как и раньше, достигается, когда  $\tilde{A}$  является решением уравнения (1-137), т. е. совпадает с истинным значением  $A_z$ . В этом случае

$$\frac{I_{\min}}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} (\text{grad}^2 A_z - 2\mu J A_z) d\Omega = W - 2W = -W$$

и, следовательно,

$$L_i = -I_{\min}/(\mu i^2). \quad (1-140)$$

Приведем решение рассматриваемой задачи для случая, когда провод имеет прямоугольное поперечное сечение (рис. 1-52). Приближенное значение минимизирующей функции ищем по методу Ритца, т. е. в виде (1-135), выбрав в качестве  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  функции

$$\varphi_1 = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2); \quad \varphi_2 = (a^4 - x^4)(b^4 - y^4), \quad (1-141)$$

каждая из которых удовлетворяет граничному условию задачи ( $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  при  $x = \pm a$  или  $y = \pm b$ ). В первом приближении, положив  $a_2 = 0$ , будем иметь

$$\tilde{A} = a_1 (a^2 - x^2) (b^2 - y^2).$$

Подставив  $\tilde{A}$  в (1-139), выполнив указанные в этой формуле операции, из условия  $\partial I / \partial a_1 = 0$  найдем

$$a_1 = \frac{5}{32} \frac{\mu i}{ab (a^2 + b^2)}$$

и соответственно

$$I_{\min} = -\frac{5}{72} \mu^2 i^2 \frac{ab}{a^2 + b^2};$$

$$L_i = \frac{5}{75} \mu \frac{ab}{a^2 + b^2} = 0,0694 \mu \frac{ab}{a^2 + b^2}. \quad (1-142)$$

Если сохранить в формуле (1-135) два члена, то более точное значение  $L_i$  будет

$$L_i = 0,0703 \mu \frac{ab}{a^2 + b^2}. \quad (1-143)$$

Истинное значение  $L_i$ , которое можно получить, решая уравнение Пуассона (1-137) методом разделения переменных, определяется формулой

$$L_i = \frac{\mu}{12} \frac{a}{b} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{th} (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{a}}{(2n+1)^5} \right]. \quad (1-144)$$

Формулы показывают, что в данном случае метод Ритца приводит к более простым выражениям для внутренней ин-

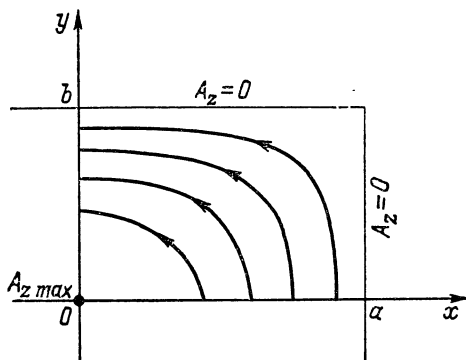


Рис. 1-52

дуктивности провода, чем метод разделения переменных. Из формул (1-142) и (1-143) видно, в частности, что максимального значения величина  $L_i$  достигает при  $a = b$ , т. е. для провода квадратного сечения. В этом случае формулы (1-142) и (1-143) дают соответственно  $L_i = 0,0347 \mu$  и  $L_i =$

$= 0,0351\mu$ , в то время как по точной формуле (1-144)  $L_i/\mu = 0,03517$ , так что погрешность формулы (1-142) составляет 1,3 %, а формулы (1-143) — около 0,2 %.

Для сравнения отметим, что внутренняя индуктивность провода кругового сечения  $L_i = \mu/(8\pi) = 0,0398\mu$  — на 13 % больше, чем у провода квадратного сечения.

## 1-18. МЕТОД ПОЛОСОК

Индуктивность контура при весьма высокой частоте может быть определена с учетом неравномерности распределения тока по поверхности проводника, если воспользоваться методом полосок, в известной мере аналогичным методу площадок, применяемому в электростатике [2].

Рассмотрим какой-либо контур и представим выражение для индуктивности этого контура при весьма высокой частоте (§ 1-2) в виде

$$\int_{\lambda} \overline{M} j \, d\lambda = Li = \Psi, \quad (1-145)$$

где  $\Psi$  — магнитный поток контура;  $i$  — ток в нем. Эта формула может рассматриваться как интегральное уравнение относительно линейной плотности тока  $j$ , и идея метода полосок заключается в приближенном решении этого уравнения путем его замены соответствующей системой линейных алгебраических уравнений.

Для получения такой системы поверхность  $S$  рассматриваемого контура разбивают на ряд полосок, границы которых совпадают с линиями тока на поверхности  $S$ . При этом ширина полосок (не обязательно одинаковая для различных полосок) выбирается достаточно малой для того, чтобы плотность тока в пределах каждой полоски можно было считать постоянной по ее ширине. Каждой полоске приводится в соответствие характерная нить тока (например, нить, проходящая через середину поперечного сечения полоски), после чего магнитный поток, сцепленный с нитью  $k$ , можно приближенно представить в виде

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{i=1}^n M_{ik} i_i,$$

где  $n$  — число полосок;  $L_k$  — собственная индуктивность полоски  $k$ ;  $M_{ik}$  ( $i \neq k$ ) — взаимная индуктивность полосок  $i$  и  $k$ . При этом собственные индуктивности  $L_k$  определяются в соответствии с принятым условием постоянства

плотности тока по ширине полоски, а взаимные индуктивности  $M_{ik}$  обычно принимают равными взаимным индуктивностям  $\bar{M}_{ik}$  соответствующих характерных нитей обеих полосок.

Так как все потоки  $\Psi_k$  должны быть одинаковы и равны потоку  $\Psi$ , сцепляющемуся с рассматриваемым контуром, то выражение (1-145) дает следующую систему  $n$  уравнений для неизвестных токов  $i_i$ :

$$L_k i_k + \sum_{i=1}^n M_{ik} i_i = \Psi, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq k,$$

решая которую, найдем все токи  $i_i$  и общий ток  $i = \sum_{i=1}^n i_i$  контура. Отношение  $\Psi/i$  дает приближенное значение собственной индуктивности контура, причем это значение тем ближе к истинному, чем больше число полосок  $n$  и чем меньше ширина каждой из них. В принципе метод полосок применим к контурам любой формы, однако наиболее просто он реализуется в случае плоских контуров, в частности двухпроводных линий и круговых колец (рис. 1-53, а, б). В первом из этих случаев величины  $L_k$  и  $M_{ik}$  могут быть найдены по соответствующим формулам, данным в § 3-4, 3-9, 3-12, 3-13, а во втором — по формулам § 5-4, 5-6, 5-7, 5-8.

Определим в качестве примера собственную индуктивность симметричной двухпроводной линии, состоящей из двух бесконечно тонких лент (рис. 3-9, а), при  $d = 1$ ,  $c = 2$  и различном числе полосок  $n$ .

При  $n = 1$  плотность тока в соответствии со сказанным выше должна быть принята постоянной по высоте обеих лент, и формула (3-41) в рассматриваемом случае ( $\gamma = c/d = 2$ ) дает  $L^{(1)} = \frac{\mu_0}{\pi} 1,018$ .

При  $n = 2$  в силу симметрии системы вновь придем к равномерному распределению тока и к тому же значению индуктивности. Разбивая каждую из лент на три полоски одинаковой высоты  $c/3 = 2/3$  ( $n = 3$ )

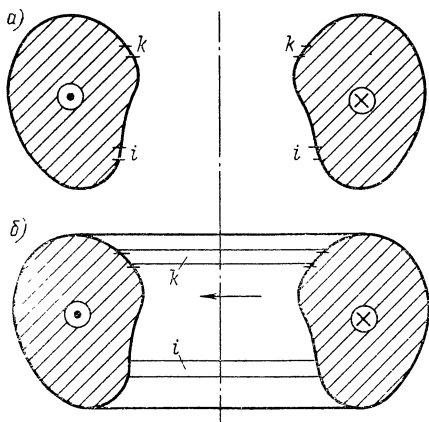


Рис. 1-53

и учитывая, что токи в верхней ( $k = 1$ ) и нижней ( $k = 3$ ) полосках одинаковы ( $i_1 = i_3$ ), получим систему уравнений

$$(L_1 + M_{31}) i_1 + M_{21} i_2 = \Psi;$$

$$(M_{12} + M_{32}) i_1 + L_2 i_2 = \Psi,$$

из которой найдем токи  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i = 2i_1 + i_2$  и индуктивность

$$L^{(3)} = \frac{\Psi}{i} = \frac{L_1^2 + L_1 M_{31} - 2M_{12}^2}{3L_1 + M_{31} - 4M_{12}}.$$

Определив индуктивности полосок  $L_1 = L_2 = L_3$  по формуле (3-43) при  $d = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 2/3$  и взаимные индуктивности  $M_{12} = M_{21}$  и  $M_{13} = M_{31}$  по формуле (3-115) при  $d = 1$ ,  $h = 2/3$  и  $h = 4/3$ , получим для индуктивности  $L$  значение

$$L^{(3)} = \frac{\mu_0}{\pi} 0,950. \text{ Истинное значение индуктивности, определенное по формуле (3-46), равно } L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} 0,968.$$

Таким образом, погрешность расчета при  $n = 1$  и  $n = 2$  составляет около 5 %, а при  $n = 3$  — менее 2 %.

В заключение отметим, что метод полосок допускает различные модификации. В частности, при фиксированном общем числе полосок  $n$  в ряде случаев можно получить более точный результат за счет рационального выбора ширины полосок в различных частях поверхности проводника.

## 1-19. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

В некоторых случаях собственные и взаимные индуктивности проводов и контуров при весьма высокой частоте могут быть определены с помощью соотношений, связывающих эти величины с аналогичными величинами, интегрально характеризующими электростатическое поле (емкость, собственные и взаимные потенциальные коэффициенты [2, 15]).

Рассмотрим, например, идеальную однофазную линию (линию без потерь) с проводами произвольного поперечного сечения, расположенными один внутри или вне другого (однофазный кабель, двухпроводная или многопроводная

линия). Из теории электромагнитного поля известно, что электромагнитные волны распространяются вдоль идеальных проводников в идеальном диэлектрике со скоростью  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ , где  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика [15]. С другой стороны, из теории длинных линий известно [4], что скорость движения волн вдоль идеальной однородной линии равна  $v = 1/\sqrt{LC}$ , где  $L$  и  $C$  — индуктивность и емкость линии на единицу ее длины. Сопоставляя оба выражения для скорости, приходим к важному соотношению

$$LC = \mu\epsilon, \quad (1-146)$$

связывающему индуктивность идеальной линии с емкостью между ее проводниками. Эта зависимость позволяет свести определение индуктивности линии при весьма высокой частоте к определению емкости между ее проводниками, т. е. к известной и достаточно хорошо изученной задаче электростатики [2].

Не менее примечательное соотношение имеет место между индуктивностями и потенциальными коэффициентами прямолинейных проводов конечной длины. Пусть  $L_h$  и  $M_{ih}$  — собственные и взаимные индуктивности таких проводов, найденные в предположении, что ток распределен по периметру поперечного сечения каждого провода равномерно, а  $\alpha_h$  и  $\alpha_{ih}$  — собственные и взаимные потенциальные коэффициенты этих проводов, определенные по методу средних потенциалов. Тогда справедливы зависимости:

$$\frac{L_h}{\alpha_h} = \epsilon\mu l_h^2; \quad \frac{M_{ih}}{\alpha_{ih}} = \epsilon\mu l_h l_i \cos \theta, \quad (1-147)$$

где  $l_i$  и  $l_h$  — длины проводов;  $\theta$  — угол между ними. Формулы (1-147) позволяют определить  $L_h$  и  $M_{ih}$ , если известны  $\alpha_h$  и  $\alpha_{ih}$ , и наоборот.

Эти формулы справедливы также и в том случае, когда при определении индуктивностей  $L_h$  и  $M_{ih}$  ток предполагается распределенным по периметру поперечного сечения каждого провода не равномерно, а как в бесконечно длинном прямолинейном проводе того же сечения; потенциальные коэффициенты  $\alpha_h$  и  $\alpha_{ih}$  должны быть в этом случае определены по соответствующему уточненному методу средних потенциалов (ЖТФ, 1971, № 7).

---

## ИНДУКТИВНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДОВ

---

### 2-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Приведенные в настоящей главе формулы и таблицы для расчета собственных и взаимных индуктивностей прямолинейных и криволинейных проводов в сочетании с методом участков (§ 1-4) дают возможность рассчитывать индуктивности плоских и пространственных контуров различной формы.

Все рассматриваемые провода предполагаются **линейными**, т. е. имеющими поперечное сечение, линейные размеры которого достаточно малы по сравнению с другими размерами проводов и расстояниями между ними.

В соответствии с этим при расчете взаимной индуктивности провода рассматриваются как бесконечно тонкие нити соответствующей формы \*.

2. Собственная индуктивность прямолинейного провода может быть определена с удовлетворительной степенью точности при любой встречающейся на практике форме поперечного сечения провода. Взаимная индуктивность двух прямолинейных проводов также может быть найдена при любом взаимном их расположении в пространстве. Применяя метод участков, можно, следовательно, определить собственную индуктивность любого контура, состоящего из прямолинейных участков, а также взаимную индуктивность двух любых контуров этого вида.

3. Задача расчета индуктивностей значительно усложняется при наличии у контуров криволинейных участков, так как выражения собственных и взаимных индуктивностей криволинейных проводов известны лишь для некоторых простейших частных случаев. Поэтому в случае, когда контуры имеют криволинейные участки, единственным методом расчета чаще всего оказывается метод численного интегрирования, изложенный в § 1-12.

---

\* Для параллельных проводов одинаковой длины даны также выражения, справедливые при конечной толщине проводов и малых расстояниях между ними (§ 2-11).



4. Значения собственных индуктивностей проводов при низкой частоте в первом приближении принимаются равными их значениям при постоянном токе, т. е. при равномерном распределении тока по сечениям проводов. В ряде случаев можно уточнить расчет, внося поправку  $\Delta L_i$ , учитывая отличие истинного распределения тока от равномерного. По величине этой поправки можно судить также о погрешности, возникающей при неучете неравномерности распределения тока по сечениям проводов.

5. Все приводимые в этой главе формулы для собственных индуктивностей проводов при весьма высокой частоте выведены без учета потока внутри провода, т. е. в предположении, что ток сосредоточен в бесконечно тонком поверхностном слое. При этом, если не оговорено противное, предполагается, что ток распределен по поверхности провода конечной длины так же, как в уединенном бесконечно длинном прямолинейном проводе того же поперечного сечения.

При желании учесть магнитный поток внутри провода к величине  $L$ , найденной указанным путем, следует прибавить внутреннюю индуктивность провода  $L_i$ , которая в общем случае может быть определена так, как указано в § 1-15. Для проводов кругового, эллиптического и прямоугольного поперечного сечения необходимые расчетные формулы приведены в соответствующих параграфах.

6. Формулы для собственных индуктивностей полых проводов при весьма высокой частоте совпадают с соответствующими формулами для сплошных проводов. Оговорки требуют лишь формулы для  $L_i$ , которыми следует пользоваться только при условии, что толщина стенки полого провода не меньше половины длины электромагнитной волны  $\lambda_c = 2\pi \sqrt{2}/\sqrt{\omega \mu \gamma}$  внутри провода.

## 2.2. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - \frac{3}{4} \right), \quad (2-1)$$

где  $l$  — длина провода;  $r$  — радиус его поперечного сечения. Для коротких проводов более точное значение можно найти по формуле

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - \frac{3}{4} + \frac{128}{45\pi} \frac{r}{l} - \frac{r^2}{4l^2} \right). \quad (2-2)$$

Если магнитная проницаемость материала провода  $\mu \neq \mu_0$ , то вместо формулы (2-1) следует пользоваться формулой

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - 1 \right) + L_i, \quad (2-3)$$

где

$$L_i = \frac{\mu l}{8\pi} \quad (2-4)$$

— внутренняя индуктивность провода.

2. При весьма высокой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - 1 \right), \quad (2-5)$$

где  $l$  — длина провода;  $r$  — радиус его поперечного сечения.

Для коротких проводов более точное значение  $L$  можно найти по формуле

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - 1 + \frac{4}{\pi} \frac{r}{l} - \frac{r^2}{2l^2} \right). \quad (2-6)$$

При желании учесть магнитный поток внутри провода следует к величине  $L$ , найденной по этим формулам, прибавить внутреннюю индуктивность провода, определяемую формулой

$$L_i = \frac{l}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}}, \quad (2-7)$$

если  $\mu = \text{const}$ .

Для проводов из ферромагнитного материала

$$L_i = 0,6 \frac{l}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_e}{\omega\gamma}}, \quad (2-8)$$

причем  $\mu_e$  — абсолютная магнитная проницаемость, определяемая по основной кривой намагничивания вещества провода при напряженности поля, равной  $I/(2\pi r)$ , где  $I$  — действующее значение тока в проводе.

3. При любой частоте и  $\mu \neq \mu_0$

$$L = L_\infty + L_i, \quad (2-9)$$

где  $L_\infty$  — индуктивность провода при весьма высокой частоте [формула (2-5)];

$$L_i = \frac{\mu l}{8\pi} \zeta \quad (2-10)$$

— внутренняя индуктивность провода;  $l$  — его длина;  $\zeta$  — величина, значения которой даны в табл. 2-1 в зависимости от значений величины  $kr$ , причем  $k = \sqrt{\omega\mu\gamma}$ ;  $r$  — радиус поперечного сечения провода.

Для определения  $\zeta$  при  $kr < 2$  можно пользоваться формулой

$$\zeta = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{13}{275}x^8 + \dots, \quad (2-11)$$

а при  $kr > 5$  — формулой

$$\zeta = \frac{1}{x} - \frac{3}{64x^3} - \frac{3}{128x^4} \dots, \quad (2-12)$$

где

$$x = kr/\sqrt{8}. \quad (2-13)$$

При любом значении  $kr$

$$\zeta = \frac{4}{kr} \frac{\text{ber } kr \text{ ber}' kr + \text{bei } kr \text{ bei}' kr}{(\text{ber}' kr)^2 + (\text{bei}' kr)^2}, \quad (2-14)$$

Таблица 2-1. Значения  $\zeta$  для провода кругового сечения

$kr$	$\zeta$	$kr$	$\zeta$	$kr$	$\zeta$	$kr$	$\zeta$
0	1,0000	3,6	0,7493	8,4	0,3346	21,0	0,1346
0,5	0,9998	3,8	7173	8,6	3269	22,0	1285
0,6	9997	4,0	6863	8,8	3196	23,0	1229
0,7	9994	4,2	6568	9,0	3126	24,0	1178
0,8	9989	4,4	6289	9,2	3058	25,0	1131
0,9	9983	4,6	6028	9,4	2994	26,0	1087
1,0	9974	4,8	5785	9,6	2932	28,0	1010
1,1	9962	5,0	5560	9,8	2873	30,0	0942
1,2	9946	5,2	5351	10,0	2816	32,0	0884
1,3	9927	5,4	5157	10,5	2682	34,0	0832
1,4	9902	5,6	4976	11,0	2562	36,0	0785
1,5	9871	5,8	4809	11,5	2452	38,0	0744
1,6	9834	6,0	4652	12,0	2350	40,0	0707
1,7	9790	6,2	4506	12,5	2257	42,0	0673
1,8	9739	6,4	4368	13,0	2170	44,0	0643
1,9	9680	6,6	4239	13,5	2090	46,0	0615
2,0	9611	6,8	4117	14,0	2016	48,0	0589
2,2	9448	7,0	4002	14,5	1947	50,0	0566
2,4	9248	7,2	3893	15,0	1882	60,0	0471
2,6	9013	7,4	3790	16,0	1765	70,0	0404
2,8	8745	7,6	3692	17,0	1661	80,0	0354
3,0	8452	7,8	3599	18,0	1569	90,0	0314
3,2	8140	8,0	3511	19,0	1487	100,0	0,0283
3,4	7818	8,2	3426	20,0	1413	$\infty$	0
3,6	0,7493	8,4	0,3346	21,0	0,1346		

где  $\operatorname{ber} kr$  и  $\operatorname{bei} kr$  — функции Томсона, т. е. вещественная и мнимая составляющие функции Бесселя  $J_0$  первого рода нулевого порядка от комплексного аргумента  $z = kre^{j3\pi/4}$ ;  $\operatorname{ber}' kr$  и  $\operatorname{bei}' kr$  — их производные по  $kr$ . Значения этих функций могут быть взяты из таблиц приложения 8 или из работы [9].

**Пример 2-1.** Прямолинейный медный провод длиной  $l = 20$  см, имеет круговое поперечное сечение, радиус которого  $r = 0,2$  см. Определить индуктивность провода при низкой частоте, при весьма высокой частоте и при частоте  $f = 10\,000$  Гц.

**Решение.** В данном случае

$$r/l = 0,2/20 = 0,01; \quad l/r = 100; \quad (r/l)^2 = 10^{-4}.$$

1. При низкой частоте, применяя формулу (2-1), имеем

$$L = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 0,2 \left( \ln 200 - \frac{3}{4} \right) = 4 \cdot 10^{-8} (5,298 - 0,75) = \\ = 1,819 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Более точная формула (2-2) дает

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,2 \left( \ln 200 - 0,75 + \frac{128}{45\pi} \cdot 0,01 - \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} \right) = \\ = 4 \cdot 10^{-8} (5,298 - 0,75 + 0,009) = 1,823 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Уточнение, даваемое формулой (2-2) по сравнению с формулой (2-1), в данном случае весьма невелико (около 0,2 %).

2. При весьма высокой частоте, применяя формулу (2-5), получим

$$L = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 0,2 (\ln 200 - 1) = 4 \cdot 10^{-8} (5,298 - 1) = 1,719 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Более точная формула (2-6) дает

$$L = 4 \cdot 10^{-8} \left( 5,298 - 1 + \frac{4}{\pi} \cdot 0,01 - \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \right) = \\ = 4 \cdot 10^{-8} (4,298 + 0,013) = 1,724 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Значение индуктивности, определенное по формуле (2-6), больше определенного по формуле (2-5) на 0,2 %.

3. При частоте  $f = 10\,000$  Гц находим индуктивность по формуле (2-9). Для определения входящей в формулу величины  $\zeta$  вычисляем  $k$ :

$$k = \sqrt{\omega \mu \gamma} = \sqrt{2\pi \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 2,140 \cdot 10^3,$$

откуда

$$kr = 2,140 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 4,280.$$

По табл. 2-1 находим  $\zeta = 0,6456$ .

Следовательно,

$$L = 4 \cdot 10^{-8} \left( 5,298 - 1 + \frac{0,6456}{4} \right) = 4 \cdot 10^{-8} (4,298 + 0,161) = \\ = 1,784 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Величину  $\zeta$ , входящую в формулу (2-9), можно найти по формуле (2-12). В данном случае

$$x = \frac{4,28}{\sqrt{8}} = 1,513; \quad \frac{3}{64x^3} = 0,01353; \quad \frac{3}{128x^4} = 0,0045;$$

$$\frac{1}{x} = 0,6609,$$

Следовательно,

$$\zeta = 0,6609 - 0,0135 - 0,0045 = 0,6419.$$

Для проверки определим  $\zeta$  по точной формуле (2-14). При  $kr = 4,280$  из таблиц функций Томсона [9] находим

$$\operatorname{ber} kr = -3,497; \quad \operatorname{bei} kr = 2,050;$$

$$\operatorname{ber}' kr = -3,522; \quad \operatorname{bei}' kr = -1,279.$$

Подставляя эти значения в формулу (2-14), получаем

$$\zeta = \frac{4}{4,280} \frac{9,694}{14,04} = 0,6453.$$

Из приведенных расчетов видно, что значения  $\zeta$ , найденные различными способами, сравнительно мало отличаются друг от друга. Проще всего  $\zeta$  определяется по табл. 2-1.

## 2-3. ИНДУКТИВНОСТЬ ПОЛОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{rc} - 1 \right), \quad (2-15)$$

где  $l$  — длина провода;  $r$  — внешний радиус его поперечного сечения (рис. 2-1);  $c$  — величина, значения которой даны в табл. 10-1 в зависимости от отношения внутреннего радиуса  $q$  к внешнему радиусу  $r$ .

Если магнитная проницаемость вещества провода  $\mu \neq \mu_0$ , то

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - 1 - \frac{\mu}{\mu_0} \ln c \right). \quad (2-16)$$

2. При весьма высокой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - 1 \right), \quad (2-17)$$

где  $l$  — длина провода;  $r$  — внешний радиус его поперечного сечения (рис. 2-1).

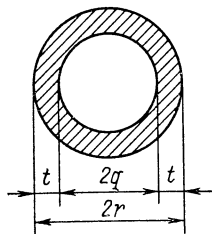


Рис. 2-1

При желании учесть магнитный поток внутри провода следует к величине  $L$ , найденной по этой формуле, прибавить внутреннюю индуктивность провода  $L_i$ , определяемую формулой (2-7) при  $\mu = \text{const}$  и формулой (2-8) при  $\mu$ , зависящем от магнитного состояния вещества.

3. При любой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - 1 \right) + L_i = L_\infty + L_i, \quad (2-18)$$

где  $l$  — длина провода;  $r$  — внешний радиус его поперечного сечения;  $L_\infty$  — индуктивность провода при весьма высокой частоте;  $L_i$  — внутренняя индуктивность провода. Для провода с малой толщиной стенки  $t$  ( $t = r - q \ll r$ )

$$L_i = \frac{\mu l}{2\pi m r} \frac{\text{sh } mt - \sin mt}{\text{ch } mt - \cos mt}, \quad (2-19)$$

где  $m = \sqrt{2\omega\mu\gamma}$ . При  $mt < 3$  можно написать

$$L_i = \frac{\mu l}{2\pi} \frac{t}{r} \left( 1 - \frac{m^4 t^4}{630} + \frac{m^8 t^8}{249480} \dots \right). \quad (2-20)$$

При больших значениях  $kq$  и  $kt$  внутренняя индуктивность полого провода может быть найдена по формуле

$$L_i = \frac{\mu l}{8\pi x} \left\{ 1 - \frac{3}{64x^2} - \frac{3}{128x^3} + \dots + 2e^{-mt} \cos mt \left[ 1 - \frac{3}{256x^2} \left( 7 - 6 \frac{r}{q} + 3 \frac{r^2}{q^2} \right) \dots \right] - 2e^{-mt} \sin mt \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{t}{qx} + \frac{3}{256x^2} \left( 7 - 6 \frac{r}{q} + 3 \frac{r^2}{q^2} \right) \dots \right] + \text{члены порядка } e^{-2mt} \dots \right\}, \quad (2-21)$$

где  $x = mr/4 = \sqrt{\omega\mu\gamma/8} r$ .

В общем случае  $L_i$  равно разделенной на  $j\omega$  мнимой части выражения

$$Z_i = \frac{j\omega l}{2\pi k r} \frac{\text{ber } kr + j \text{bei } kr - T (\text{hei } kr - j \text{her } kr)}{\text{ber}' kr + j \text{bei}' kr - T (\text{hei}' kr - j \text{hei}' kr)}, \quad (2-22)$$

где

$$T = \frac{\text{ber}' kq + j \text{bei}' kq}{\text{hei}' kq - j \text{her}' kq}; \quad (2-23)$$

$k = \sqrt{\omega\mu\gamma}$ ;  $\text{ber } kr$  и  $\text{bei } kr$  — вещественная и мнимая составляющие бесселевой функции  $J_0(z_r)$  первого рода нулевого порядка от комплексного

числа  $z_r = k r e^{j \frac{3\pi}{4}}$ ;  $\text{ber}' kr$  и  $\text{bei}' kr$  — их производные по  $kr$ ;  $\text{her } kr$  и  $\text{hei } kr$  — вещественная и мнимая составляющие функции Ханкеля  $H_0^{(1)}(z_r)$  нулевого порядка от того же аргумента  $z_r$ ;  $\text{her}' kr$  и  $\text{hei}' kr$  — их производ-

ные по  $kr$ ;  $\text{ber}' kq$ ,  $\text{bei}' kq$ ,  $\text{her}' kq$ ,  $\text{hei}' kq$  — то же, что  $\text{ber}' kr$ ,  $\text{bei}' kr$ ,  $\text{her}' kr$ ,  $\text{hei}' kr$ , но с заменой  $r$  на  $q$ . Значения всех указанных здесь функций и их производных можно взять из таблиц, приведенных в приложениях 8 и 9.

**Пример 2-2.** Прямолинейный медный грубчатый провод длиной  $l = 100$  см имеет сечение, внешний и внутренний радиусы которого равны соответственно  $r = 0,5$  см,  $q = 0,3$  см. Определить индуктивность провода при низкой частоте, при весьма высокой частоте и при частоте  $f = 2500$  Гц.

**Решение.** В данном случае

$$r/l = 5 \cdot 10^{-3}; \quad l/r = 200; \quad q/r = 0,6.$$

1. При низкой частоте применяем формулу (2-15). По табл. 10-1 находим  $c = 0,8778$  и

$$L = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \left( \ln \frac{400}{0,8778} - 1 \right) = 2 \cdot 10^{-7} \times \\ \times (\ln 455,7 - 1) = 10,24 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

2. При  $f = \infty$ , применяя формулу (2-17), имеем

$$L = 2 \cdot 10^{-7} (\ln 400 - 1) = 2 \cdot 10^{-7} (5,991 - 1) = 9,982 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

3. При частоте  $f = 2500$  Гц, применяем формулу (2-18), причем внутреннюю индуктивность  $L_i$  определяем тремя различными способами.

1) Применяем формулу (2-19). В данном случае

$$t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad m = \sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 1,513 \cdot 10^3;$$

$$mt = 1,513 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 3,026;$$

$$mr = 1,513 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 7,566;$$

$$\text{h } mt = 10,28; \quad \text{ch } mt = 10,33;$$

$$\frac{\sin mt = 0,12;}{10,16}; \quad \frac{\cos mt = -0,09}{11,32};$$

$$L_i = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2\pi \cdot 7,566} \frac{10,16}{11,32} = 0,2373 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

2) Применяем формулу (2-21). В данном случае

$$x = \frac{7,566}{4} = 1,891; \quad x^2 = 3,576; \quad x^3 = 6,762;$$

$$1 - \frac{3}{64x^2} - \frac{3}{128x^3} = 1 - 0,0131 - 0,0035 = 0,9834;$$

$$7 - 6 \frac{r}{q} + 3 \frac{r^2}{q^2} = 5,333; \quad \frac{3}{256x^2} = 0,003275;$$

$$5,333 \cdot 0,003275 = 0,0175; \quad 1 - 0,0175 = 0,9825;$$

$$\frac{3}{8} \frac{l}{qx} = 0,1322; \quad 1 - 0,1322 + 0,0175 = 0,8853;$$

$$\begin{aligned}
e^{-mt} &= 0,04851; \quad \cos mt = -0,9933; \quad \sin mt = 0,1153; \\
-2 \cdot 0,04831 \cdot 0,9933 \cdot 0,9825 &= -0,0947; \quad \mu l / (8\pi x) = 0,2644 \cdot 10^{-7}; \\
-2 \cdot 0,04831 \cdot 0,1153 \cdot 0,8853 &= -0,0099; \\
0,9834 - 0,0947 - 0,0099 &= 0,8788; \\
L_i &= 0,2644 \cdot 10^{-7} \cdot 0,8788 = 0,2324 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}
\end{aligned}$$

3) Применяем точную формулу (2-22). В данном случае

$$k = \sqrt{\omega \mu \gamma} = m / \sqrt{2} = 1,070 \cdot 10^3; \quad kr = 5,35; \quad kq = 3,21.$$

По таблицам, данным в приложениях 8 и 9, находим

$$\begin{aligned}
\operatorname{ber} kr &= -7,504; \quad \operatorname{bei} kr = -1,757; \\
\operatorname{ber}' kr &= -3,333; \quad \operatorname{bei}' kr = -6,402; \\
\operatorname{her} kr &= +6,578 \cdot 10^{-3}; \quad \operatorname{hei} kr = +4,045 \cdot 10^{-3}; \\
\operatorname{her}' kr &= -2,377 \cdot 10^{-3}; \quad \operatorname{hei}' kr = -8,893 \cdot 10^{-3}; \\
\operatorname{ber}' kq &= -1,879; \quad \operatorname{bei}' kq = 0,7419; \\
\operatorname{her}' kq &= +4,643 \cdot 10^{-2}; \quad \operatorname{hei}' kq = -1,8216 \cdot 10^{-2};
\end{aligned}$$

$$T = \frac{-1,879 + j0,7419}{(-1,8216 - j4,643) \cdot 10^{-2}} = 40,50 e^{j1,569};$$

$$T (\operatorname{hei} kr - j \operatorname{her} kr) = 0,2663 + j0,1633;$$

$$T (\operatorname{hei}' kr - j \operatorname{her}' kr) = -0,09631 - j0,3196;$$

$$\frac{\mu l j \omega}{2\pi kr} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{5,35} j \omega = j \omega \cdot 0,3739 \cdot 10^{-7};$$

$$\begin{aligned}
Z_i &= j \omega \cdot 0,3739 \frac{-7,504 - j1,757 + 0,2663 + j0,1633}{-3,333 - j6,402 - 0,09631 - j0,3196} 10^{-7} = \\
&= j \omega \cdot 0,3739 \frac{-7,238 - j1,594}{-3,429 - j6,722} 10^{-7} = j \omega \cdot 0,3739 \cdot 0,9689 e^{-j0,882} \cdot 10^{-7};
\end{aligned}$$

$$L_i = 0,3739 \cdot 0,9689 \cos(0,882) \cdot 10^{-7} = 0,2302 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Приведенные расчеты показывают, что значения  $L_i$ , найденные различными способами, сравнительно мало отличаются друг от друга. Общую индуктивность провода при частоте  $f = 2500$  Гц находим, суммируя полученные выше значения  $L_\infty = 9,982 \cdot 10^{-7}$  Гн и  $L_i = 0,2302 \cdot 10^{-7}$  Гн, после чего окончательно имеем

$$L = 10,212 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

## 2-4. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{4l}{a+b} - \frac{3}{4} \right), \quad (2-24)$$



где  $l$  — длина провода;  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса, являющегося его поперечным сечением.

При низкой частоте можно учесть влияние неравномерности распределения тока по сечению провода, прибавив к значению  $L$ , даваемому формулой (2-24), величину

$$\Delta L_i = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{x^4}{24} j(\epsilon), \quad (2-25)$$

где

$$x = \frac{ka}{\sqrt{8}}; \quad k = \sqrt{\omega\mu_0\gamma}; \quad \epsilon = \frac{a-b}{a+b};$$

$$j(\epsilon) = \frac{(1-\epsilon)(1+\epsilon^2/3)(1+4\epsilon^2+\epsilon^4)}{1+\epsilon^2}.$$

Формула (2-25) применима при  $k(a+b) < 4$ .

## 2. При весьма высокой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{4l}{a+b} - 1 \right), \quad (2-26)$$

где  $l$  — длина провода;  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса, являющегося его поперечным сечением.

При желании учесть магнитный поток внутри провода следует к величине  $L$ , найденной по формуле (2-26), прибавить внутреннюю индуктивность провода, определяемую (при  $\mu = \text{const}$ ) формулой

$$L_i = \frac{l}{\pi^2 a} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}} K, \quad (2-27)$$

где  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем, равным  $\sqrt{1 - b^2/a^2}$ .

В частности, для круга ( $a = b = r$ ) получаем формулу (2-7).

Для провода из ферромагнитного материала вместо (2-27) следует пользоваться формулой

$$L_i = 0,15 \frac{l}{aE} \sqrt{\frac{\mu_e}{\omega\gamma}}, \quad (2-28)$$

где  $E$  — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $\sqrt{1 - b^2/a^2}$ ;  $\mu_e$  — абсолютная магнитная проницаемость, определенная по основной кривой намагничивания вещества провода при напряженности поля, равной  $I/(4aE)$ ;  $I$  — действующее значение тока в проводе.

## 2-5. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{l}{b} + \frac{1}{2} \right), \quad (2-29)$$

где  $l$  — длина провода;  $b$  — сторона квадрата, являющегося поперечным сечением провода.

При низкой частоте ( $kb < 3$ ) можно учесть влияние неравномерности распределения тока по сечению провода, прибавив к значению  $L$ , даваемому формулой (2-29), величину

$$\Delta L = - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{x^4}{24},$$

где  $x = 0,2kb$ ;  $k = \sqrt{\omega \mu_0 \gamma}$ .

2. При весьма высокой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{\tilde{g}} - 1 \right), \quad (2-30)$$

где  $l$  — длина провода;  $\tilde{g} = 0,5902b$ ;  $b$  — сторона квадрата, являющегося поперечным сечением провода.

При желании учесть магнитный поток внутри провода к индуктивности, найденной по формуле (2-30), следует прибавить внутреннюю индуктивность  $L_i$ , определяемую (при  $\mu = \text{const}$ ) формулой

$$L_i = \frac{l}{\pi b} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}}. \quad (2-31)$$

Для провода из ферромагнитного материала

$$L_i = 0,15 \frac{l}{b} \sqrt{\frac{\mu_e}{\omega\gamma}}, \quad (2-32)$$

причем  $\mu_e$  — абсолютная магнитная проницаемость, определенная по основной кривой намагничивания вещества провода при напряженности поля, равной  $I/(4b)$ , где  $I$  — действующее значение тока в проводе.

## 2-6. ИНДУКТИВНОСТЬ ПОЛОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{b} - 0,459 + \frac{2}{3} \frac{l}{b} \right), \quad (2-33)$$

где  $l$  — длина провода;  $b$  — сторона квадрата, являющегося внешним контуром поперечного сечения провода;  $t$  — толщина стенки; предполагается, что  $t \ll b/3$ .

2. При весьма высокой частоте индуктивность провода может быть найдена по формуле (2-30). Если  $t > \lambda_-/2$ , где  $\lambda_-$  — длина электромагнитной волны в проводе, то поток внутри провода может быть учтен с помощью формул (2-31) и (2-32).

## 2.7. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{b+c} + \frac{1}{2} \right), \quad (2-34)$$

где  $l$  — длина провода;  $b$  и  $c$  — стороны прямоугольника, являющегося его поперечным сечением. В частности, для бесконечно тонкой ленты следует положить в этой формуле  $b = 0$ .

При низкой частоте можно учесть влияние неравномерности распределения тока по сечению провода, прибавив к значению  $L$ , даваемому формулой (2-34), величину

$$\Delta L_i = - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{x^4}{24} f(\epsilon), \quad (2-35)$$

где

$$x = 0,2kc; \quad k = \sqrt{\omega\mu_0\gamma}; \quad \epsilon = \frac{c-b}{c+b} \quad (c > b);$$

$$f(\epsilon) = \frac{(1-\epsilon)^3 (1-\epsilon^2/3) (1+4\epsilon^2+\epsilon^4)}{1+\epsilon}.$$

Формула (2-35) применима при  $k(b+c) < 7$ .

2. При весьма высокой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{\tilde{g}} - 1 \right), \quad (2-36)$$

где  $l$  — длина провода, а  $\tilde{g}$  — величина, значения которой, отнесенные к величине  $c$ , даны на рис. 2-2 в зависимости от отношения сторон  $b$  и  $c$  прямоугольника, являющегося поперечным сечением провода ( $b < c$ ). Точные значения  $\tilde{g}$  можно найти по формуле

$$4\tilde{g} = \frac{c}{E - k'^2 K}, \quad (2-37)$$

где  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем  $k$ , определяемым из уравнения

$$\frac{E' - k^2 K'}{E - k'^2 K} = \frac{b}{c}; \quad (2-38)$$

$K'$  и  $E'$  — полные эллиптические интегралы с дополнительным модулем  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ . В частности, для бесконечно тонкой ленты ( $b = 0$ ) формулы (2-37) и (2-38) дают  $\tilde{g} = c/4$ .

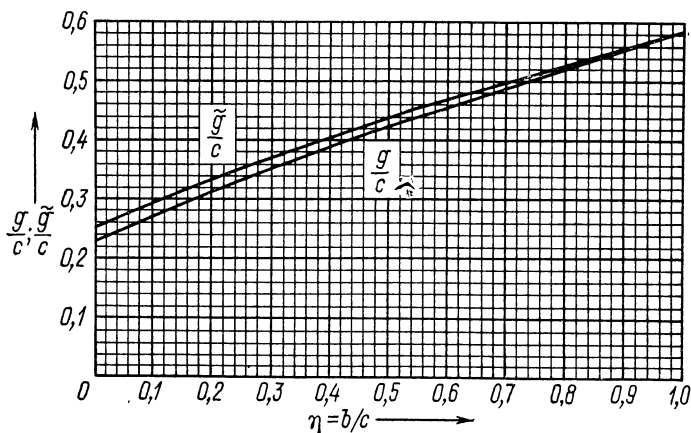


Рис. 2-2

При выводе формулы (2-36) в соответствии со сказанным в § 2-1 предполагалось, что ток распределен по поверхности провода конечной длины так же, как по поверхности бесконечно длинного провода того же поперечного сечения. Если распределение тока по поверхности провода принять равномерным, то формула для  $L$  примет вид

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{g} - 1 \right), \quad (2-39)$$

где  $g$  — среднее геометрическое расстояния периметра прямоугольника со сторонами  $b$  и  $c$  от самого себя. Значения  $g$ , отнесенные к длине стороны  $c$ , даны на рис. 2-2 в зависимости от отношения  $b/c$ . Из рисунка видно, что величины  $g$  и  $\tilde{g}$  мало отличаются друг от друга.

При желании учесть магнитный поток внутри провода к индуктивности, найденной по формуле (2-36) или (2-39),

следует прибавить внутреннюю индуктивность  $L_i$ , определяемую (при  $\mu = \text{const}$ ) по формуле

$$L_i = \frac{l}{V_{bc}} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}} \Phi, \quad (2-40)$$

где

$$\Phi = \frac{2}{\pi^2} (K + K') (E - k'^2 K)^{1/2} (E' - k^2 K')^{1/2}, \quad (2-41)$$

а все прочие обозначения — те же, что в формулах (2-37) и (2-38).

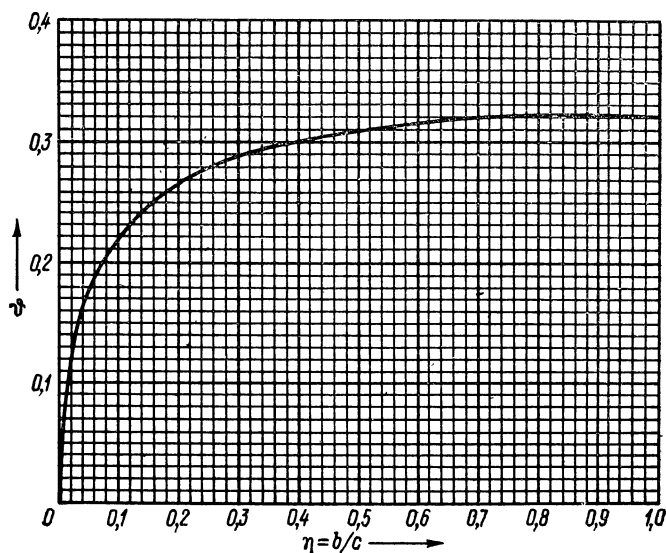


Рис. 2-3

Значения величины  $\Phi$  даны на рис. 2-3 в зависимости от отношения  $b/c$ .

Для провода из ферромагнитного материала вместо (2-40) следует пользоваться формулой

$$L_i = 0,3 \frac{l}{b+c} \sqrt{\frac{\mu_e}{\omega\gamma}}, \quad (2-42)$$

где  $\mu_e$  — абсолютная магнитная проницаемость, определенная по основной кривой намагничивания вещества провода при напряженности поля, равной  $\frac{l}{2(b+c)}$ ;  $I$  — действующее значение тока в проводе.

## 2-8. ИНДУКТИВНОСТЬ ПОЛОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{g_e} - 1 \right), \quad (2-43)$$

где  $l$  — длина провода;  $g_e$  — среднее геометрическое расстояние от самого себя периметра прямоугольника со сторонами  $b_e$  и  $c_e$ , определяемыми из формул:

$$b_e = b \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{t}{b} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{t}{b} \right) \right]; \quad (2-44)$$

$$c_e = c \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{t}{c} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{t}{c} \right) \right]; \quad (2-45)$$

$b$  и  $c$  — стороны прямоугольника, являющегося внешним контуром поперечного сечения провода;  $t$  — толщина стенки провода. Предполагается, что  $t \leq b/3$  ( $b \leq c$ ). Величина  $g_e$  может быть определена с помощью формулы (10-18) или табл. 10-2 при соответствующем изменении обозначений ( $g$ ,  $b$  и  $c$  на  $g_e$ ,  $b_e$  и  $c_e$ ).

2. При весьма высокой частоте индуктивность провода может быть найдена по формуле (2-36) или (2-39). Если  $t > \lambda_{\sim}/2$ , где  $\lambda_{\sim}$  — длина электромагнитной волны в проводе, то поток внутри провода может быть учтен с помощью формулы (2-40) или (2-42).

## 2-9. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{g} - 1 \right), \quad (2-46)$$

где  $l$  — длина провода;  $g$  — среднее геометрическое расстояние площади его поперечного сечения от самой себя (§ 1-8).

Для коротких проводов более точное значение  $L$  может быть найдено по формуле

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{g} - 1 + \frac{a}{l} - \frac{q^2}{4l^2} \right), \quad (2-47)$$

где  $a$  и  $q$  — соответственно среднее арифметическое и среднее квадратичное расстояния площади поперечного сечения провода от самой себя (§ 1-8).

2. При весьма высокой частоте индуктивность провода в общем случае должна быть определена в соответствии со сказанным в § 1-5 и 1-15; формулы для  $\tilde{g}$  см. в § 2-10.

Если форма и соотношение размеров поперечного сечения провода позволяют сделать предположение о приблизительно равномерном распределении тока по периметру поперечного сечения, то индуктивность провода (без учета внутреннего потока) может быть найдена по формулам (2-46) и (2-47), в которых, однако, под  $g$ ,  $a$  и  $q$  следует в этом случае понимать среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратичное расстояния не площади, а периметра поперечного сечения провода от самого себя (§ 1-8). Внутренняя индуктивность провода должна учитываться в соответствии с указаниями § 1-15.

## 2-10. ИНДУКТИВНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОВОДА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Собственная индуктивность линейного провода может быть представлена в виде

$$L = N - G + A - Q, \quad (2-48)$$

где  $N$  — величина, зависящая только от формы и размеров оси провода и не зависящая от формы и размеров поперечного сечения провода и от характера распределения тока по сечению;  $G$ ,  $A$  и  $Q$  — величины, зависящие от формы и размеров поперечного сечения и от характера распределения тока по сечению. Обычно разность  $A - Q$  пренебрежимо мала по сравнению с разностью  $N - G$ , и тогда

$$L = N - G. \quad (2-49)$$

### 1. Значения $N$ для проводов различной формы,

#### 1) Для прямолинейного провода

$$N = \frac{\mu_0 l}{2\pi} (\ln 2l - 1), \quad (2-50)$$

где  $l$  — длина провода.

#### 2) для провода, изогнутого по дуге окружности,

$$N = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \left[ \theta (\ln 8R - 2) + 4 \sin \frac{\theta}{2} - 4I \right], \quad (2-51)$$

где  $R$  — радиус окружности, по дуге которой изогнута ось провода;  $\theta$  — центральный угол, соответствующий длине

Таблица 2-2. Значения  $I$  в формуле (2-51) для провода, изогнутого по дуге окружности

$\theta, \dots^\circ$	$I$	$\theta, \dots^\circ$	$\theta, \dots^\circ$	$I$	$\theta, \dots^\circ$	$\theta, \dots^\circ$	$I$	$\theta, \dots^\circ$
0	0,0000	360	60	0,6107	300	120	0,8458	240
5	0,1052	355	65	0,6385	295	125	0,8572	235
10	0,1803	350	70	0,6645	290	130	0,8676	230
15	0,2439	345	75	0,6889	285	135	0,8774	225
20	0,3000	340	80	0,7117	280	140	0,8852	220
25	0,3506	335	85	0,7330	275	145	0,8925	215
30	0,3968	330	90	0,7529	270	150	0,8988	210
35	0,4393	325	95	0,7715	265	155	0,9041	205
40	0,4786	320	100	0,7887	260	160	0,9083	200
45	0,5151	315	105	0,8047	255	165	0,9117	195
50	0,5492	310	110	0,8195	250	170	0,9141	190
55	0,5809	305	115	0,8332	245	175	0,9155	185
60	0,6107	300	120	0,8458	240	180	0,9160	180

провода;  $I$  — величина, значения которой для различных углов  $\theta$  даны в табл. 2-2.

При угле  $\theta$ , близком к  $2\pi$ , т. е. для почти замкнутого кругового кольца,

$$N = \frac{\mu_0 R}{2\pi} \left[ \theta (\ln 8R - 2) + \vartheta \left( \ln \frac{\vartheta}{2} + 1 \right) \right], \quad (2-52)$$

где  $\vartheta = 2\pi - \theta \ll 1$ .

Для замкнутого кругового кольца ( $\theta = 2\pi$ ;  $\vartheta = 0$ )

$$N = \mu_0 R (\ln 8R - 2). \quad (2-53)$$

3) Для криволинейного провода произвольной формы следует исходить из общего выражения для величины  $N$ , приведенного в § 1-5.

Величина  $N$  для проводов сложной формы, как правило, не выражается через величины, определяющие форму и размеры провода. В подобных случаях  $N$  можно найти методом численного интегрирования (§ 1-12).

## 2. Определение величин $G$ , $A$ и $Q$ .

1) При постоянном токе и низкой частоте

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln g; \quad A = \frac{\mu_0}{2\pi} a; \quad Q = \frac{\mu_0}{8\pi D} q^2, \quad (2-54; 2-55; 2-56)$$

где  $g$ ,  $a$ ,  $q$  — соответственно среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратичное расстояния площади поперечного сечения провода от самой себя;  $l$  — длина оси



провода;  $D$  — расстояние между крайними точками оси провода.

2) При весьма высокой частоте величины  $G$ ,  $A$ ,  $Q$  могут быть определены по формулам (2-54)—(2-56), в которых вместо  $g$ ,  $a$ ,  $q$  следует подставить  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{q}$  (§ 1-5). Выражения для  $\tilde{g}$  при различной форме поперечного сечения провода даны ниже. Ввиду относительной малости величин  $A$  и  $Q$  и трудностей, связанных с определением  $\tilde{a}$  и  $\tilde{q}$ , можно приближенно положить  $\tilde{a} = a$ ,  $\tilde{q} = q$ , где  $a$  и  $q$  — соответственно среднее арифметическое и среднее квадратичное расстояния периметра поперечного сечения провода от самого себя. При желании учесть магнитный поток внутри провода следует уменьшить  $G$  на величину, равную внутренней индуктивности провода  $L_i$ , которая должна быть определена в соответствии с указаниями § 1-15.

Значения  $\tilde{g}$  для различных фигур:  
для окружности радиуса  $r$

$$\tilde{g} = r;$$

для квадрата со стороной  $b$

$$\tilde{g} = 0,5902b;$$

для прямоугольника со сторонами  $b$  и  $c$  ( $b < c$ )

$$\tilde{g} = 0,25 + 0,44b/c - 0,1b^2/c^2$$

(см. также кривую на рис. 2-2);

для дуги окружности радиуса  $r$

$$\tilde{g} = r \sin \frac{\alpha}{4},$$

где  $\alpha$  — центральный угол, под которым видна дуга;

для кругового сегмента радиуса  $r$

$$\tilde{g} = \frac{2\pi r \sin \alpha/2}{(2\pi - \alpha) \sin \left( \frac{2\pi - \alpha}{4\pi - \alpha} \pi \right)},$$

где  $\alpha$  — то же, что и в предыдущем случае; в частности, для полукруга ( $\alpha = \pi$ )

$$\tilde{g} = \frac{4}{3\sqrt{3}} r = 0,770r;$$

для равностороннего треугольника с высотой  $h$

$$\tilde{g} = 0,7870h;$$

для равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом  $b$

$$\tilde{g} = 0,4756b;$$

для прямоугольного треугольника с углом  $\pi/6$  и гипотенузой  $b$

$$\tilde{g} = 0,3779b;$$

для правильного шестиугольника со стороной  $b$

$$\tilde{g} = 0,9204b;$$

для замкнутой кривой, состоящей из дуг двух окружностей, пересекающихся под углом  $\alpha = \pi/n$  ( $a$  и  $b$  — радиусы окружностей):

при  $n = 2$  ( $\alpha = \pi/2$ )

$$\tilde{g} = \sqrt{a^2 + b^2};$$

при  $n = 3$  ( $\alpha = \pi/3$ )

$$\tilde{g} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$$

(если  $a = b$ , то  $\tilde{g} = \frac{3}{2}a$ );

при  $n = 4$  ( $\alpha = \pi/4$ )

$$\tilde{g} = \frac{(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})^{3/2}}{a^2 + b^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}ab}$$

(если  $a = b$ , то  $\tilde{g} = 1,5307a$ );

при  $n = 6$  ( $\alpha = \pi/6$ )

$$\tilde{g} = \frac{6(a^2 + b^2 + ab\sqrt{3})^{5/2}}{(\sqrt{3}a^2 + 4ab + \sqrt{3}b^2)(2\sqrt{3}a^2 + 7ab + 2\sqrt{3}b^2)}$$

(если  $a = b$ , то  $\tilde{g} = 1,553a$ );

для симметричного креста, образованного двумя взаимно перпендикулярными отрезками с общим центром,

$$\tilde{g} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2},$$

где  $2b$  и  $2c$  — длины отрезков;

для эллипса с полуосями  $a$  и  $b$

$$\tilde{g} = (a + b)/2.$$

3) Для провода кругового сечения:  
при постоянном токе и низкой частоте

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln r - \frac{1}{4} \right); \quad (2-57)$$

$$A = \mu_0 \frac{64}{45\pi^2} r; \quad Q = \frac{\mu_0 r^2}{8\pi D}, \quad (2-58; 2-59)$$

где  $l$  и  $D$  — то же, что и в формулах (2-54) и (2-56);  
при весьма высокой частоте

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln r; \quad A = \mu_0 \frac{2}{\pi^2} r; \quad Q = \frac{\mu_0 r^2}{4\pi D}; \quad (2-60; 2-61; 2-62)$$

при желании учесть магнитный поток внутри провода следует уменьшить  $G$  на внутреннюю индуктивность провода  $L_i$ , определяемую в соответствии с указаниями § 1-15;  
при любой частоте

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln r - L_i, \quad (2-63)$$

где

$$L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \zeta \quad \text{при} \quad \mu = \mu_0 \quad (2-64)$$

и

$$L_i = \frac{\mu l}{8\pi} \zeta \quad \text{при} \quad \mu \neq \mu_0, \quad (2-65)$$

$\zeta$  — величина, зависящая от характера распределения тока по сечению провода и определяемая так, как указано в § 2-2.

4) Для полого провода кругового сечения:

при постоянном токе и низкой частоте

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln (cr), \quad (2-66)$$

где  $l$  — длина провода;  $r$  — внешний радиус его сечения;  $c$  — величина, значения которой даны в табл. 10-1 в зависимости от отношения внутреннего радиуса  $q$  к внешнему радиусу  $r$ ;

при весьма высокой частоте

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln r; \quad (2-67)$$

при любой частоте

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln r - L_i, \quad (2-68)$$

где  $L_i$  — внутренняя индуктивность провода, определяемая так, как указано в § 2-3.

5) Для провода из материала с высокой магнитной проницаемостью ( $\mu \gg \mu_0$ ) при постоянном токе и низкой частоте

$$G = G_\infty - L_i,$$

где  $G_\infty$  — значение  $G$  при весьма высокой частоте (см. подпункт 2), а  $L_i$  — внутренняя индуктивность провода при постоянном токе, определяемая при различных поперечных сечениях по следующим формулам:

для круга

$$L_i = \frac{\mu l}{8\pi};$$

для эллипса с полуосями  $a$  и  $b$

$$L_i = \frac{\mu l}{4\pi} \frac{ab}{a^2 + b^2};$$

для квадрата

$$L_i = \frac{\mu l}{\pi} 0,110;$$

для прямоугольника со сторонами  $b$  и  $c$

$$L_i = \frac{\mu l}{\pi} 0,221 \frac{bc}{b^2 + c^2}.$$

**Пример 2-3.** Медный провод прямоугольного поперечного сечения  $6 \times 8$  мм изогнут по дуге окружности радиуса  $R = 20$  см, причем центральный угол  $\theta$ , соответствующий дуге, равен  $120^\circ$ .

Определить индуктивность провода при низкой и весьма высокой частоте.

**Решение.** Для определения индуктивности применяем формулу (2-48). Величину  $N$  вычисляем по формуле (2-51). При  $\theta = 120^\circ$  из табл. 2-2 находим  $I = 0,8458$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,2}{2\pi} [2,094 (\ln 1,6 - 2) + 4 \sin 60^\circ - 4 \cdot 0,8458] = \\ &= -1,249 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.} \end{aligned}$$

1. Определяем величины  $G$ ,  $A$  и  $Q$  при низкой частоте. Для этого находим среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратичное расстояния площади поперечного сечения провода от самой себя.

Среднее геометрическое расстояние  $g$  вычисляем по формуле (10-20):

$$g = 0,2236 (0,008 + 0,006) = 3,130 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Среднее арифметическое расстояние  $a$  находим по формуле (10-64), которая дает  $a = 3,229 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Среднее квадратичное расстояние  $q$  определяем по формуле (10-74), которая дает  $q^2 = 16,67 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$  и  $q = 4,083 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Расстояние  $D$  между крайними точками оси провода

$$D = 2 \cdot 0,2 \cos 30^\circ = 0,3464 \text{ м.}$$

По формулам (2-54)—(2-56) получаем

$$G = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 0,2}{2\pi \cdot 3} \ln(3,130 \cdot 10^{-3}) = -4,832 \cdot 10^{-7} \text{ Гн};$$

$$A = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} 3,229 \cdot 10^{-3} = 6,458 \cdot 10^{-10} \approx 0,006 \cdot 10^{-7} \text{ Гн};$$

$$Q = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8\pi \cdot 0,3464} \cdot 16,67 \cdot 10^{-6} = 2,406 \cdot 10^{-12} \text{ Гн}.$$

Приведенные расчеты показывают, что величина  $Q$  ничтожно мала и ею можно пренебречь. Величина  $A$  влияет только на четвертую значащую цифру. Поэтому при ее вычислении можно было принять  $a = g$ . Подставляя  $N$ ,  $G$  и  $A$  в формулу (2-48), имеем

$$L = (-1,249 + 4,832 + 0,006) \cdot 10^{-7} = 3,589 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

2. Для определения индуктивности провода при весьма высокой частоте предполагаем, что ток распределен по периметру поперечного сечения провода равномерно. Кроме того, учитывая результаты расчета при низкой частоте, пренебрегаем величинами  $A$  и  $Q$ . Среднее геометрическое расстояние периметра поперечного сечения провода от самого себя определяем по табл. 10-2, которая в данном случае ( $b = 0,006$  м,  $c = 0,008$  м) дает

$$g/c = 0,507; \quad g = 4,06 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Следовательно,  $\ln g = -5,51$  и

$$G = - \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 0,2}{2\pi \cdot 3} \cdot 5,51 = -0,838 \cdot 5,51 \cdot 10^{-7} = -4,62 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

Искомая индуктивность

$$L = (-1,25 + 4,62) \cdot 10^{-7} = 3,37 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

## 2-11. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДОВ

1. Провода, расположенные по одной прямой. Взаимная индуктивность проводов, расположенных по одной прямой,

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} [(a + b + d) \ln(a + b + d) +$$

$$+ d \ln d - (a + d) \ln(a + d) - (b + d) \ln(b + d)], \quad (2-69)$$

где  $a$  и  $b$  — длины проводов;  $d$  — ближайшее расстояние между ними (рис. 2-4, а); предполагается, что токи протекают в одном направлении.

Если  $d = 0$  (рис. 2-4, б), то

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} [(a + b) \ln(a + b) - a \ln a - b \ln b]. \quad (2-70)$$

**2. Параллельные провода одинаковой длины, расположенные согласно рис. 2-4, в.** Взаимная индуктивность параллельных проводов, расположенных согласно рис. 2-4, в,

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} F, \quad (2-71)$$

где  $l$  — длина проводов;  $F$  — величина, зависящая от отношения длины  $l$  к расстоянию  $h$  между проводами; предполагается, что токи протекают в одном направлении. Значения  $F$  для  $h \leq l$  даны в табл. 2-3, а для  $h \geq l$  — в табл. 2-4.

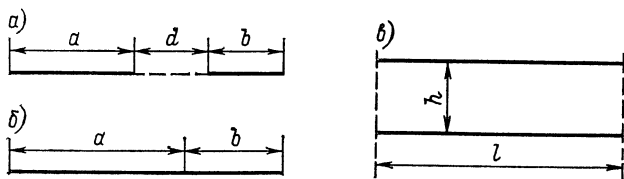


Рис. 2-4

Точное значение  $M$  может быть найдено по формуле

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + h^2}}{h} - \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{l} + \frac{h}{l} \right). \quad (2-72)$$

При  $l \gg h$

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{h} - 1 + \frac{h}{l} - \frac{1}{4} \frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{32} \frac{h^4}{l^4} \dots \right). \quad (2-73)$$

Если, наоборот,  $h \gg l$ , то

$$M = \frac{\mu_0 l^2}{4\pi h} \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{l^2}{h^2} + \frac{1}{40} \frac{l^4}{h^4} \dots \right). \quad (2-74)$$

Если расстояние  $h$  между осями проводов соизмеримо с линейными размерами их поперечных сечений, то, предполагая, что  $l \gg h$ , имеем

$$M = N - G + A - Q, \quad (2-75)$$

где

$$N = \frac{\mu_0 l}{2\pi} (\ln 2l - 1), \quad (2-76)$$

а величины  $G$ ,  $A$  и  $Q$  определяются по формулам:

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln g_{12}; \quad A = \frac{\mu_0}{2\pi} a_{12}; \quad Q = \frac{\mu_0}{8\pi l} q_{12}^2, \quad (2-77)$$

причем при низкой частоте  $g_{12}$ ,  $a_{12}$ ,  $q_{12}$  — соответственно среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее

Таблица 2-3. Значения  $F$  в формуле (2-71) для параллельных проводов одинаковой длины при  $h \leq l$

$h/l$	$F$	$h/l$	$F$	$h/l$	$F$
0,050	2,7382	0,20	1,4926	0,50	0,8256
55	2,6479	21	1,4528	52	0,8016
60	2,5657	22	1,4152	54	0,7789
65	2,4905	23	1,3797	56	0,7574
70	2,4212	24	1,3460	58	0,7370
0,075	2,3570	0,25	1,3139	0,60	0,7176
80	2,2973	26	1,2834	62	0,6992
85	2,2415	27	1,2544	64	0,6817
90	2,1891	28	1,2267	66	0,6650
95	2,1398	29	1,2002	68	0,6490
0,100	2,0932	0,30	1,1749	0,70	0,6338
105	2,0492	31	1,1506	72	0,6193
110	2,0074	32	1,1273	74	0,6054
115	1,9677	33	1,1049	76	0,5920
120	1,9298	34	1,0835	78	0,5792
0,125	1,8937	0,35	1,0628	0,80	0,5670
130	1,8592	36	1,0429	82	0,5552
135	1,8262	37	1,0238	84	0,5439
140	1,7944	38	1,0052	86	0,5330
145	1,7639	39	0,9874	88	0,5225
0,150	1,7346	0,40	0,9702	0,90	0,5124
155	1,7065	41	0,9536	92	0,5027
160	1,6794	42	0,9375	94	0,4934
165	1,6532	43	0,9219	96	0,4843
170	1,6279	44	0,9068	98	0,4756
0,175	1,6035	0,45	0,8922	1,00	0,4672
180	1,5799	46	0,8781		
185	1,5571	47	0,8644		
190	1,5349	48	0,8511		
195	1,5134	49	0,8381		
0,200	1,4926	0,50	0,8256		

квадратичное расстояние площадей поперечных сечений проводов друг от друга, а при весьма высокой частоте  $g_{12}$ ,  $a_{12}$ ,  $q_{12}$  — соответственно среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратичное расстояния между сечениями проводов друг от друга (§ 1-8). В последнем случае предполагается, что токи распределены по периметрам поперечных сечений проводов равномерно.

Если разностью  $A - Q$  можно пренебречь, то

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{g_{12}} - 1 \right). \quad (2-78)$$

**3. Параллельные провода в общем случае.** Определение взаимной индуктивности параллельных проводов в общем

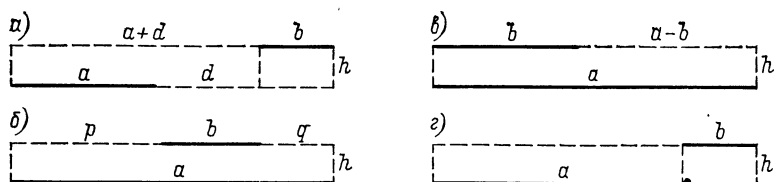


Рис. 2-5

случае (рис. 2-5, а) может быть сведено к определению взаимных индуктивностей нескольких пар проводов, расположенных согласно рис. 2-4, а именно:

$$2M = M_{\alpha} - M_{\beta} - M_{\gamma} + M_{\delta}, \quad (2-79)$$

где  $M_{\alpha}$ ,  $M_{\beta}$ ,  $M_{\gamma}$ ,  $M_{\delta}$  находятся по формулам и таблицам предыдущего пункта при  $l$ , равном соответственно  $\alpha = a +$

Таблица 2-4. Значения  $F$  в формуле (2-71) для параллельных проводов одинаковой длины при  $h \geq l$

$l/h$	$F$	$l/h$	$F$
1,00	0,4672	0,50	0,2451
0,98	4588	48	2357
96	4505	46	2262
94	4421	44	2166
92	4336	42	2071
0,90	0,4251	0,40	0,1975
88	4166	38	1878
86	4080	36	1781
84	3993	34	1684
82	3906	32	1587
0,80	0,3819	0,30	0,1489
78	3731	28	1391
76	3643	26	1293
74	3554	24	1194
72	3464	22	1096
0,70	0,3374	0,20	0,0997
68	3284	18	0898
66	3193	16	0798
64	3102	14	0699
62	3011	12	0599
0,60	0,2918	0,10	0,0500
58	2826	08	0400
56	2733	06	0300
54	2640	04	0200
52	2546	02	0100
0,50	0,2451	0,00	0,0000



$+d+b$ ;  $\beta = a+d$ ;  $\gamma = b+d$ ;  $\delta = d$ ; предполагается, что токи протекают в одном направлении.

В частности, для расположения проводов по рис. 2-5, б

$$2M = M_{b+p} + M_{b+q} - M_p - M_q; \quad (2-80)$$

для расположения по рис. 2-5, в и г соответственно

$$2M = M_a + M_b - M_{a-b}; \quad (2-81)$$

$$2M = M_{a+b} - M_a - M_b. \quad (2-82)$$

В общем случае для точного определения  $M$  можно пользоваться также формулой

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} [\alpha \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + h^2}) - \beta \ln(\beta + \sqrt{\beta^2 + h^2}) - \\ - \gamma \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + h^2}) + \delta \ln(\delta + \sqrt{\delta^2 + h^2}) - \sqrt{\alpha^2 + h^2} + \\ + \sqrt{\beta^2 + h^2} + \sqrt{\gamma^2 + h^2} - \sqrt{\delta^2 + h^2}], \quad (2-83)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $h$  — то же, что и в формуле (2-79).

**Пример 2-4.** Прямолинейный провод длиной  $a = 30$  см и прямолинейный провод длиной  $b = 10$  см расположены параллельно друг другу на расстоянии  $h = 4$  см так, как показано на рис. 2-5, б, причем  $p = 15$  см и  $q = 5$  см. Определить взаимную индуктивность проводов.

**Решение.**

1. Применяем формулу (2-80), определяя каждый из ее членов по формуле (2-71); значения  $F$  берем из табл. 2-3. При этом получаем

$$h/(b+p) = 4/25 = 0,016; \quad F_{b+p} = 1,679;$$

$$h/(b+q) = 4/15 = 0,2667; \quad F_{b+q} = 1,274;$$

$$h/p = 4/15 = 0,2667; \quad F_p = 1,274;$$

$$h/q = 4/5 = 0,8; \quad F_q = 0,5670;$$

$$M_{b+p} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,25 \cdot 1,679 = 8,395 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$M_{b+q} = 2 \cdot 0,15 \cdot 1,274 \cdot 10^{-7} = 3,822 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$M_p = 2 \cdot 0,15 \cdot 1,274 \cdot 10^{-7} = 3,822 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$M_q = 2 \cdot 0,05 \cdot 0,5670 \cdot 10^{-7} = 0,5670 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$M = \frac{1}{2} (8,395 + 3,822 - 3,822 - 0,567) \cdot 10^{-8} = 3,914 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}.$$

2. Применяем формулу (2-83). В данном случае:

$$\alpha = 0,25 \text{ м}; \quad \sqrt{\alpha^2 + h^2} = 0,2530 \text{ м}; \quad \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + h^2}) = -0,6872;$$

$$\beta = 0,15 \text{ м}; \quad \sqrt{\beta^2 + h^2} = 0,1552 \text{ м}; \quad \ln(\beta + \sqrt{\beta^2 + h^2}) = -1,187;$$

$$\gamma = -0,05 \text{ м}; \quad \sqrt{\gamma^2 + h^2} = 0,06403 \text{ м}; \quad \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + h^2}) = -4,267;$$

$$\delta = -0,15 \text{ м}; \sqrt{\delta^2 + h^2} = 0,1552 \text{ м}; \ln (\delta + \sqrt{\delta^2 + h^2}) = -5,251;$$

$$-0,25 \cdot 0,6872 = -0,1718; \quad 0,15 \cdot 1,187 = 0,1781;$$

$$-0,05 \cdot 4,267 = -0,2134; \quad 0,15 \cdot 5,251 = 0,7877;$$

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} (-0,1718 + 0,1781 - 0,2134 + 0,7877 - 0,2530 +$$

$$+ 0,1552 + 0,06403 - 0,1552) = 3,918 \cdot 10^{-8} \text{ Гн.}$$

Этот результат близок к найденному по формуле (2-80).

**4. Прямолинейные провода, сходящиеся в одной точке.** Взаимная индуктивность прямолинейных проводов, сходящихся в одной точке,

$$M = \frac{\mu_0 a}{4\pi} F, \quad (2-84)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны в табл. 2-5 в зависимости от  $\cos \varphi$  и отношения  $b/a$ , причем  $\varphi$  — угол между проводами,  $a$  и  $b$  — длины проводов (рис. 2-6); предполагается, что токи направлены от общей точки.

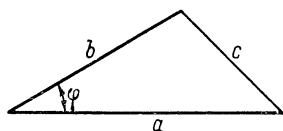


Рис. 2-6

При малых углах  $\varphi$  интерполирование по табл. 2-5 неточно, так как значения  $F$ , отвечающие соседним значениям  $\varphi$ , сильно отличаются друг от друга.

Для точного определения  $M$  может служить формула

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \cos \varphi \left( a \ln \frac{a+b+c}{c+a-b} + b \ln \frac{a+b+c}{c+b-a} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \cos \varphi \left( a \operatorname{Arth} \frac{b}{a+c} + b \operatorname{Arth} \frac{a}{b+c} \right), \quad (2-85)$$

причем

$$\cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi. \quad (2-86)$$

В частности, при  $a = b = l$

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \cos \varphi \ln \left( 1 + \frac{2l}{c} \right) = \frac{\mu_0 l}{\pi} \cos \varphi \operatorname{Arth} \frac{l}{l+c}, \quad (2-87)$$

причем  $\cos \varphi = 1 - \frac{c^2}{2l^2}$ ;  $c = 2l \sin \frac{\varphi}{2}$ .

**5. Непараллельные провода в одной плоскости.** Взаимная индуктивность непараллельных проводов, лежащих в одной плоскости,

$$M = M(x_2, y_2) + M(x_1, y_1) - M(x_1, y_2) - M(x_2, y_1), \quad (2-88)$$

Таблица 2-5. Значения  $F$  в формуле (2-84) для проводов, сходящихся в одной точке

cos $\varphi$	$b/a = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0,95	3,7830	3,5786	3,3406	3,0683	2,7622	2,4221	2,0473	1,6348	1,1776	0,6598
90	3,0594	2,8958	2,7095	2,4980	2,2597	1,9930	1,6957	1,3643	0,9918	0,5630
85	2,6132	2,4744	2,3178	2,1411	1,9422	1,7189	1,4690	1,1877	0,9688	0,4973
0,80	2,2816	2,1609	2,0256	1,8735	1,7028	1,5108	1,2950	1,0512	0,7727	0,4452
0,75	2,0137	1,9071	1,7889	1,6562	1,5073	1,3399	1,1513	0,9374	0,6917	0,4008
70	1,7863	1,6922	1,5876	1,4710	1,3402	1,1932	1,0272	0,8386	0,6209	0,3615
65	1,5872	1,5038	1,4113	1,3083	1,1931	1,0636	0,9172	0,7504	0,5572	0,3258
60	1,4092	1,3352	1,2534	1,1625	1,0609	0,9468	0,8177	0,6703	0,4991	0,2929
0,55	1,2474	1,1820	1,1098	1,0297	0,9404	0,8400	0,7264	0,5964	0,4452	0,2622
0,5	1,0986	1,0411	0,9776	0,9074	0,8291	0,7412	0,6417	0,5277	0,3947	0,2332
4	0,8310	0,7876	0,7398	0,6870	0,6283	0,5625	0,4880	0,4024	0,3020	0,1794
3	0,5938	0,5628	0,5288	0,4913	0,4496	0,4030	0,3501	0,2893	0,2179	0,1301
2	0,3793	0,3595	0,3378	0,3140	0,2876	0,2580	0,2244	0,1856	0,1404	0,0842
0,1	0,1825	0,1730	0,1626	0,1512	0,1385	0,1244	0,1083	0,0898	0,0680	0,0410
0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0,1	-0,1707	-0,1618	-0,1522	-0,1416	-0,1298	-0,1167	-0,1018	-0,0847	-0,0644	-0,0391
2	-0,3316	-0,3144	-0,2956	-0,2750	-0,2523	-0,2269	-0,1982	-0,1650	-0,1257	-0,0765
3	-0,4840	-0,4588	-0,4314	-0,4015	-0,3684	-0,3315	-0,2898	-0,2416	-0,1844	-0,1125
0,4	-0,6290	-0,5963	-0,5608	-0,5220	-0,4791	-0,4314	-0,3772	-0,3148	-0,2406	-0,1472
-0,5	-0,7677	-0,7278	-0,6845	-0,6372	-0,5850	-0,5268	-0,4611	-0,3852	-0,2948	-0,1808
6	-0,9006	-0,8538	-0,8031	-0,7476	-0,6865	-0,6186	-0,5416	-0,4528	-0,3470	-0,2134
7	-1,0284	-0,9750	-0,9172	-0,8540	-0,7844	-0,7070	-0,6194	-0,5182	-0,3976	-0,2450
8	-1,1517	-0,0919	-1,0272	-0,9563	-0,8788	-0,7922	-0,6944	-0,5814	-0,4467	-0,2758
0,9	-1,2709	-1,2048	-1,1335	-0,0557	-0,9701	-0,8748	-0,7671	-0,6428	-0,4943	-0,3058
-1,0	-1,3862	-1,3143	-1,2366	-1,1517	-1,0585	-0,9548	-0,8376	-0,7029	-0,5406	-0,3351

где  $M(x_2, y_2)$  — взаимная индуктивность прямолинейных проводов длиной  $x_2$  и  $y_2$ , сходящихся в одной точке;  $M(x_1, y_1)$  — то же для проводов длиной  $x_1$  и  $y_1$  и т. д., причем  $x_1, x_2, y_1, y_2$  — расстояния, показанные на рис. 2-7. Во всех случаях угол между проводами предполагается равным углу  $\varphi$  между заданными проводами  $a$  и  $b$ . Взаимные индуктивности  $M(x_2, y_2)$ ,  $M(x_1, y_1)$ ,  $M(x_1, y_2)$ ,  $M(x_2, y_1)$  могут быть найдены с помощью табл. 2-5 так, как указано в предыдущем пункте.

Для точного определения взаимной индуктивности  $M$  может служить формула

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \cos \varphi \left( x_2 \operatorname{Arth} \frac{b}{D_{22} + D_{21}} + y_2 \operatorname{Arth} \frac{a}{D_{22} + D_{12}} - x_1 \operatorname{Arth} \frac{b}{D_{11} + D_{12}} - y_1 \operatorname{Arth} \frac{a}{D_{11} + D_{21}} \right), \quad (2-89)$$

где  $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$  — расстояния, показанные на рис. 2-7, причем

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^2 &= x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 \cos \varphi; & D_{12}^2 &= x_1^2 + y_2^2 - 2x_1y_2 \cos \varphi; \\ D_{21}^2 &= x_2^2 + y_1^2 - 2x_2y_1 \cos \varphi; & D_{22}^2 &= x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2-90)$$

Если заданы длины проводов  $a$  и  $b$  и расстояния  $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$  между их концами, то косинус угла  $\varphi$  и расстояния  $x_1, x_2, y_1, y_2$  могут быть найдены по формулам:

$$\cos \varphi = \frac{D_{12}^2 + D_{21}^2 - D_{11}^2 - D_{22}^2}{2ab} = \frac{k^2}{2ab}; \quad (2-91)$$

$$x_1 = \frac{2b^2 (D_{21}^2 - D_{11}^2 - a^2) + k^2 (D_{12}^2 - D_{11}^2 - b^2)}{4a^2b^2 - k^4} a; \quad (2-92)$$

$$y_1 = \frac{2a^2 (D_{12}^2 - D_{11}^2 - b^2) + k^2 (D_{21}^2 - D_{11}^2 - a^2)}{4a^2b^2 - k^4} b; \quad (2-93)$$

$$x_2 = x_1 + a; \quad y_2 = y_1 + b.$$

**Пример 2-5.** Прямолинейный провод длиной  $a = 120$  см и прямолинейный провод длиной  $b = 200$  см расположены так, как показано на рис. 2-7, причем  $x_1 = 80$  см,  $y_1 = 40$  см,  $\cos \varphi = 0,7$ . Определить взаимную индуктивность проводов.

**Решение.**

1. Применяем формулу (2-88), определяя отдельные ее члены по формуле (2-84) и табл. 2-5. Ввиду того что линейное интерполирование по табл. 2-5 дает погрешность в несколько единиц четвертого знака, применяем квадратичное интерполирование (см. приложение 2).

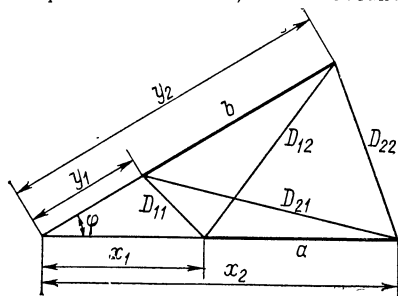


Рис. 2-7

В данном случае  $x_2 = x_1 + a = 200$  см;  $y_2 = y_1 + b = 240$  см;

$$x_2/y_2 = 0,8333; \quad F(x_2, y_2) = 1,624;$$

$$u_1/x_1 = 0,5000; \quad F(x_1, y_1) = 1,193;$$

$$x_1/y_2 = 0,3333; \quad F(x_1, y_2) = 0,9040;$$

$$u_1/x_2 = 0,2000; \quad F(x_2, y_1) = 0,6209;$$

$$M(x_2, y_2) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot 2,4 \cdot 1,624 = 3,898 \cdot 10^{-7} \text{ Гн};$$

$$M(x_1, y_1) = 10^{-7} \cdot 0,8 \cdot 1,193 = 0,954 \cdot 10^{-7} \text{ Гн};$$

$$M(x_1, y_2) = 10^{-7} \cdot 2,4 \cdot 0,9040 = 2,170 \cdot 10^{-7} \text{ Гн};$$

$$M(x_2, y_1) = 10^{-7} \cdot 2,0 \cdot 0,6209 = 1,242 \cdot 10^{-7} \text{ Гн};$$

$$M = (3,898 + 0,954 - 2,170 - 1,242) \cdot 10^{-7} = 1,440 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

2. Применяем формулу (2-89). Подставляя значения  $x_1, x_2, y_1, y_2$  в формулы для  $D_{11}, D_{21}, D_{12}, D_{22}$ , находим

$$D_{11} = 0,5933 \text{ м}; \quad D_{12} = 1,927 \text{ м};$$

$$D_{21} = 1,744 \text{ м}; \quad D_{22} = 1,744 \text{ м};$$

$$\text{Arth} \frac{b}{D_{22} + D_{21}} = 0,6528; \quad 2,0 \cdot 0,6528 = 1,3056;$$

$$\text{Arth} \frac{a}{D_{22} + D_{12}} = 0,3394; \quad 2,4 \cdot 0,3394 = 0,8146;$$

$$\text{Arth} \frac{b}{D_{11} + D_{12}} = 1,0812; \quad -0,8 \cdot 1,0812 = -0,8650;$$

$$\text{Arth} \frac{a}{D_{11} + D_{21}} = 0,5675; \quad -0,4 \cdot 0,5675 = \frac{-0,2270}{1,0282 \text{ м}}.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,7 \cdot 1,0282 = 1,439 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

Этот результат совпадает с найденным по формуле (2-88).

**Пример 2-6.** Прямолинейный провод длиной  $a = 12$  см и прямолинейный провод длиной  $b = 20$  см расположены так, как показано на рис. 2-7, причем  $D_{11} = 5$  см,  $D_{12} = 21,93$  см,  $D_{21} = 15,52$  см,  $D_{22} = 20,22$  см. Определить взаимную индуктивность проводов.

**Решение.** Определяем по формулам (2-91), (2-92) и (2-93)  $\cos \varphi, x_1$  и  $y_1$ :

$$k^2 = 21,93^2 + 15,52^2 - 5^2 - 20,22^2 = 288 \text{ см}^2;$$

$$\cos \varphi = \frac{288}{2 \cdot 12 \cdot 20} = 0,6;$$

$$D_{21}^2 - D_{11}^2 - a^2 = 72 \text{ см}^2; \quad D_{12}^2 - D_{11}^2 - b^2 = 56 \text{ см}^2;$$

$$4a^2b^2 - k^4 = 14,75 \cdot 10^4 \text{ см}^2;$$

$$x_1 = \frac{2 \cdot 400 \cdot 72 + 288 \cdot 56}{14,75 \cdot 10^4} \cdot 12 = 6 \text{ см}; \quad x_2 = 18 \text{ см};$$

$$y_1 = \frac{2 \cdot 144 \cdot 56 + 288 \cdot 72}{14,75 \cdot 10^4} \cdot 20 = 5 \text{ см}; \quad y_2 = 25 \text{ см}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Arth} \frac{b}{D_{22} + D_{21}} &= 0,6329; & 18 \cdot 0,6329 &= 11,39; \\ \operatorname{Arth} \frac{a}{D_{22} + D_{12}} &= 0,2930; & 25 \cdot 0,2930 &= ,325; \\ \operatorname{Arth} \frac{b}{D_{11} + D_{12}} &= 0,9562; & -6 \cdot 0,9562 &= -5,737; \\ \operatorname{Arth} \frac{a}{D_{11} + D_{21}} &= 0,6697; & -5 \cdot 0,6697 &= \frac{-3,349}{9,629 \text{ см.}}\end{aligned}$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,6 \cdot 0,09629 = 1,155 \cdot 10^{-8} \text{ Гн.}$$

**6. Провода одинаковой длины, перпендикулярные прямой, проходящей через их концы.** Взаимная индуктивность проводов одинаковой длины, перпендикулярных прямой, проходящей через их концы,

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} F, \quad (2-94)$$

где

$$\begin{aligned}F &= \cos \varphi \left[ 2 \operatorname{Arth} \frac{l}{\sqrt{4l^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + h^2} + \sqrt{l^2 + h^2}} + \right. \\ &+ \frac{h}{2l} \frac{\varphi}{\sin \varphi} + \frac{h}{l \sin \varphi} \operatorname{arctg} \left( \frac{2l + \sqrt{4l^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + h^2}}{h} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) - \\ &\left. - \frac{h}{l} \frac{2}{\sin \varphi} \operatorname{arctg} \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + h^2}}{h} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right];\end{aligned}$$

$l$  — длина проводов;  $\varphi$  — угол между ними;  $h$  — расстояние между ближайшими концами проводов (рис. 2-8).

Значения  $F$  для различных значений отношения  $h/l$  и различных углов  $\varphi$  даны в табл. 2-6 для случая  $h \leq l$  и в табл. 2-7 для случая  $h \geq l$ .

**7. Два прямолинейных провода в общем случае.** Всегда можно провести две параллельные плоскости так, чтобы в каждой из них лежал один из данных проводов (рис. 2-9). Если  $\varphi$  — угол между проводами ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ),  $x$  и  $y$  — координаты, отсчитываемые от общего перпендикуляра  $O_1 O_2$

к проводам в направлении протекающих по ним токов,  $x_1, x_2, y_1, y_2$  — координаты начал и концов проводов,  $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$  — расстояния между началами и концами проводов, то

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \cos \varphi \left( x_2 \operatorname{Arth} \frac{b}{D_{22} + D_{21}} + y_2 \operatorname{Arth} \frac{a}{D_{22} + D_{12}} - \right. \\ \left. - x_1 \operatorname{Arth} \frac{b}{D_{11} + D_{12}} - y_1 \operatorname{Arth} \frac{a}{D_{11} + D_{21}} + \frac{h}{\sin \varphi} A \right), \quad (2-95)$$

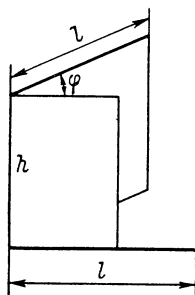


Рис. 2-8

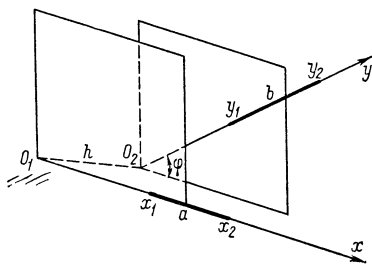


Рис. 2-9

где

$$A = \arctg \left( \frac{x_1 + y_1 + D_{11}}{h} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \\ + \arctg \left( \frac{x_2 + y_2 + D_{22}}{h} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) - \\ - \arctg \left( \frac{x_1 + y_2 + D_{12}}{h} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) - \\ - \arctg \left( \frac{x_2 + y_1 + D_{21}}{h} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right), \quad (2-96)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^2 &= x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 \cos \varphi + h^2; \\ D_{12}^2 &= x_1^2 + y_2^2 - 2x_1y_2 \cos \varphi + h^2; \\ D_{21}^2 &= x_2^2 + y_1^2 - 2x_2y_1 \cos \varphi + h^2; \\ D_{22}^2 &= x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 \cos \varphi + h^2. \end{aligned} \right\} \quad (2-97)$$

При вычислении арктангенсов углы следует брать в пределах от нуля до  $\pi/2$ , если выражение в круглых скобках в (2-96) положительно, и от нуля до  $-\pi/2$ , если это выражение отрицательно.

Таблица 2-б. Значения  $F$  в формуле (2-94) для проводов, изображенных на рис. 2-8, при  $h \leq l$

$h/l$	$\varphi = 0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
0,05	2,7382	2,1078	1,6149	1,2614	0,9770	0,7341	0,5199	0,3282	0,1554	0
0,10	2,0932	1,8100	1,4560	1,1625	0,9119	0,6908	0,4922	0,3120	0,1483	0
0,15	1,7346	1,5769	1,3174	1,0729	0,8517	0,6504	0,4661	0,2967	0,1415	0
0,20	1,4926	1,3927	1,1972	0,9920	0,7963	0,6128	0,4416	0,2823	0,1351	0
0,25	1,3139	1,2448	1,0929	0,9193	0,7455	0,5779	0,4186	0,2687	0,1290	0
0,30	1,1749	1,1238	1,0025	0,8540	0,6990	0,5455	0,3971	0,2560	0,1232	0
0,35	1,0628	1,0231	0,9238	0,7955	0,6564	0,5155	0,3771	0,2440	0,1178	0
0,40	0,9702	0,9382	0,8550	0,7429	0,6175	0,4877	0,3584	0,2327	0,1127	0
0,45	0,8922	0,8657	0,7946	0,6957	0,5820	0,4621	0,3410	0,2221	0,1079	0
0,50	0,8256	0,8030	0,7414	0,6531	0,5496	0,4384	0,3248	0,2123	0,1033	0
0,55	0,7573	0,7484	0,6941	0,6148	0,5199	0,4165	0,3097	0,2030	0,0991	0
0,60	0,7176	0,7004	0,6520	0,5801	0,4927	0,3963	0,2957	0,1943	0,0951	0
0,65	0,6733	0,6578	0,6143	0,5487	0,4678	0,3776	0,2826	0,1862	0,0913	0
0,70	0,6338	0,6199	0,5804	0,5201	0,4450	0,3603	0,2704	0,1786	0,0877	0
0,75	0,5987	0,5860	0,5497	0,4941	0,4240	0,3443	0,2590	0,1715	0,0844	0
0,80	0,5670	0,5554	0,5220	0,4702	0,4046	0,3294	0,2484	0,1648	0,0813	0
0,85	0,5385	0,5277	0,4967	0,4484	0,3868	0,3156	0,2385	0,1585	0,0783	0
0,90	0,5124	0,5025	0,4736	0,4284	0,3702	0,3027	0,2292	0,1526	0,0755	0
0,95	0,4889	0,4795	0,4523	0,4099	0,3549	0,2908	0,2206	0,1471	0,0729	0
1,00	0,4672	0,4584	0,4330	0,3929	0,3407	0,2796	0,2125	0,1419	0,0704	0



$h/l$	$\Phi = 90^\circ$	$100^\circ$	$110^\circ$	$120^\circ$	$130^\circ$	$140^\circ$	$150^\circ$	$160^\circ$	$170^\circ$	$180^\circ$
0,05	0	-0,1390	-0,2620	-0,3690	-0,4599	-0,5348	-0,5932	-0,6350	-0,6602	-0,6686
0,10	0	-0,1333	-0,2516	-0,3548	-0,4428	-0,5152	-0,5718	-0,6124	-0,6369	-0,6450
0,15	0	-0,1278	-0,2416	-0,3412	-0,4263	-0,4964	-0,5513	-0,5907	-0,6144	-0,6224
0,20	0	-0,1225	-0,2321	-0,3282	-0,4104	-0,4784	-0,5316	-0,5699	-0,5929	-0,6006
0,25	0	-0,1175	-0,2230	-0,3158	-0,3953	-0,4611	-0,5128	-0,5499	-0,5723	-0,5798
0,30	0	-0,1128	-0,2144	-0,3039	-0,3809	-0,4447	-0,4947	-0,5308	-0,5525	-0,5598
0,35	0	-0,1083	-0,2061	-0,2927	-0,3671	-0,4289	-0,4775	-0,5125	-0,5336	-0,5407
0,40	0	-0,1040	-0,1983	-0,2819	-0,3540	-0,4139	-0,4611	-0,4951	-0,5156	-0,5224
0,45	0	-0,1000	-0,1909	-0,2717	-0,3415	-0,3996	-0,4453	-0,4784	-0,4983	-0,5050
0,50	0	-0,0962	-0,1838	-0,2620	-0,3296	-0,3859	-0,4304	-0,4625	-0,4818	-0,4883
0,55	0	-0,0925	-0,1772	-0,2527	-0,3182	-0,3729	-0,4161	-0,4473	-0,4661	-0,4724
0,60	0	-0,0891	-0,1708	-0,2439	-0,3074	-0,3605	-0,4024	-0,4328	-0,4511	-0,4573
0,65	0	-0,0859	-0,1648	-0,2356	-0,2972	-0,3487	-0,3895	-0,4190	-0,4368	-0,4428
0,70	0	-0,0828	-0,1591	-0,2277	-0,2874	-0,3374	-0,3771	-0,4058	-0,4232	-0,4290
0,75	0	-0,0799	-0,1537	-0,2201	-0,2781	-0,3267	-0,3653	-0,3932	-0,4101	-0,4158
0,80	0	-0,0771	-0,1486	-0,2130	-0,2693	-0,3165	-0,3540	-0,3812	-0,3977	-0,4032
0,85	0	-0,0745	-0,1437	-0,2062	-0,2609	-0,3068	-0,3433	-0,3698	-0,3859	-0,3912
0,90	0	-0,0720	-0,1391	-0,1997	-0,2529	-0,2976	-0,3331	-0,3589	-0,3746	-0,3798
0,95	0	-0,0697	-0,1347	-0,1936	-0,2452	-0,2888	-0,3234	-0,3485	-0,3638	-0,3689
1,00	0	-0,0675	-0,1305	-0,1877	-0,2380	-0,2803	-0,3141	-0,3386	-0,3535	-0,3585

Таблица 2-7. Значения  $F$  в формуле (2-94) для проводов, изображенных на рис. 2-8, при  $h \geq l$

$h/l$	$\varphi = 0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
1,0	0,4672	0,4584	0,4330	0,3929	0,3407	0,2796	0,2125	0,1419	0,0704	0
1,2	0,3964	0,3894	0,3689	0,3361	0,2930	0,2418	0,1847	0,1240	0,0618	0
1,4	0,3439	0,3380	0,3208	0,2931	0,2564	0,2123	0,1628	0,1097	0,0549	0
1,6	0,3033	0,2983	0,2834	0,2595	0,2275	0,1889	0,1453	0,0982	0,0492	0
1,8	0,2712	0,2668	0,2537	0,2326	0,2043	0,1700	0,1310	0,0887	0,0446	0
2,0	0,2451	0,2412	0,2295	0,2106	0,1852	0,1543	0,1191	0,0808	0,0407	0
2,2	0,2236	0,2200	0,2095	0,1923	0,1693	0,1412	0,1091	0,0741	0,0374	0
2,4	0,2055	0,2022	0,1926	0,1769	0,1559	0,1301	0,1007	0,0684	0,0345	0
2,6	0,1901	0,1870	0,1782	0,1638	0,1444	0,1206	0,0934	0,0635	0,0321	0
2,8	0,1768	0,1740	0,1658	0,1524	0,1344	0,1124	0,0870	0,0593	0,0299	0
3,0	0,1652	0,1626	0,1550	0,1425	0,1257	0,1052	0,0815	0,0555	0,0281	0
3,2	0,1552	0,1526	0,1455	0,1338	0,1181	0,0988	0,0766	0,0522	0,0264	0
3,4	0,1460	0,1438	0,1370	0,1261	0,1113	0,0932	0,0723	0,0493	0,0249	0
3,6	0,1380	0,1359	0,1295	0,1192	0,1053	0,0881	0,0684	0,0466	0,0236	0
3,8	0,1308	0,1288	0,1228	0,1130	0,0998	0,0836	0,0649	0,0443	0,0224	0
4,0	0,1244	0,1224	0,1168	0,1075	0,0949	0,0795	0,0617	0,0421	0,0213	0
4,2	0,1185	0,1167	0,1113	0,1024	0,0905	0,0758	0,0588	0,0402	0,0203	0
4,4	0,1131	0,1114	0,1062	0,0978	0,0864	0,0724	0,0562	0,0384	0,0194	0
4,6	0,1083	0,1066	0,1017	0,0936	0,0827	0,0693	0,0538	0,0368	0,0186	0
4,8	0,1038	0,1022	0,0975	0,0898	0,0793	0,0665	0,0516	0,0353	0,0179	0
5,0	0,0997	0,0981	0,0936	0,0862	0,0762	0,0638	0,0496	0,0339	0,0172	0

$h/l$	$\varphi = 90^\circ$	$100^\circ$	$110^\circ$	$120^\circ$	$130^\circ$	$140^\circ$	$150^\circ$	$160^\circ$	$170^\circ$	$180^\circ$
1,0	0	-0,0675	-0,1305	-0,1877	-0,2380	-0,2803	-0,3141	-0,3386	-0,3535	-0,3585
1,2	0	-0,0597	-0,1158	-0,1670	-0,2122	-0,2504	-0,2809	-0,3031	-0,3166	-0,3212
1,4	0	-0,0533	-0,1037	-0,1499	-0,1908	-0,2255	-0,2533	-0,2735	-0,2858	-0,2900
1,6	0	-0,0481	-0,0937	-0,1356	-0,1729	-0,2046	-0,2300	-0,2485	-0,2598	-0,2636
1,8	0	-0,0437	-0,0853	-0,1236	-0,1578	-0,1869	-0,2102	-0,2273	-0,2377	-0,2412
2,0	0	-0,0400	-0,0781	-0,1134	-0,1449	-0,1717	-0,1933	-0,2091	-0,2188	-0,2220
2,2	0	-0,0368	-0,0720	-0,1046	-0,1338	-0,1587	-0,1788	-0,1935	-0,2024	-0,2054
2,4	0	-0,0341	-0,0668	-0,0971	-0,1242	-0,1474	-0,1661	-0,1798	-0,1882	-0,1910
2,6	0	-0,0317	-0,0622	-0,0904	-0,1158	-0,1375	-0,1550	-0,1678	-0,1757	-0,1783
2,8	0	-0,0297	-0,0581	-0,0846	-0,1084	-0,1288	-0,1452	-0,1573	-0,1647	-0,1671
3,0	0	-0,0278	-0,0546	-0,0795	-0,1019	-0,1211	-0,1365	-0,1479	-0,1549	-0,1572
3,2	0	-0,0262	-0,0514	-0,0749	-0,0960	-0,1142	-0,1288	-0,1396	-0,1461	-0,1483
3,4	0	-0,0248	-0,0486	-0,0706	-0,0908	-0,1080	-0,1219	-0,1321	-0,1383	-0,1404
3,6	0	-0,0235	-0,0460	-0,0672	-0,0861	-0,1024	-0,1156	-0,1253	-0,1312	-0,1332
3,8	0	-0,0223	-0,0438	-0,0638	-0,0819	-0,0974	-0,1099	-0,1192	-0,1248	-0,1267
4,0	0	-0,0212	-0,0417	-0,0606	-0,0780	-0,0928	-0,1048	-0,1136	-0,1190	-0,1208
4,2	0	-0,0202	-0,0398	-0,0581	-0,0745	-0,0886	-0,1001	-0,1085	-0,1136	-0,1154
4,4	0	-0,0194	-0,0381	-0,0555	-0,0713	-0,0848	-0,0958	-0,1038	-0,1088	-0,1104
4,6	0	-0,0185	-0,0365	-0,0532	-0,0683	-0,0813	-0,0918	-0,0996	-0,1043	-0,1059
4,8	0	-0,0178	-0,0350	-0,0511	-0,0656	-0,0781	-0,0882	-0,0956	-0,1001	-0,1019
5,0	0	-0,0171	-0,0336	-0,0491	-0,0631	-0,0751	-0,0848	-0,0919	-0,0963	-0,0978

Если рассматриваемые провода отнесены к декартовой системе координат  $x, y, z$  и их концы имеют в этой системе координаты  $(x'_1, y'_1, z'_1)$ ,  $(x'_2, y'_2, z'_2)$  и  $(x''_1, y''_1, z''_1)$  и  $(x''_2, y''_2, z''_2)$ , то расстояния  $D_{11}$ ,  $D_{21}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  определяются формулами вида

$$D_{11} = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (y''_1 - y'_1)^2 + (z''_1 - z'_1)^2}.$$

В тех случаях, когда заданы длины проводов  $a$  и  $b$  и расстояния  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$ ,  $D_{22}$  между их концами, для определения  $M$  следует вычислить угол  $\varphi$  и расстояния  $h$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ . Эти величины можно определить по формулам:

$$\cos \varphi = \frac{D_{12}^2 + D_{21}^2 - D_{11}^2 - D_{22}^2}{2ab} = \frac{k^2}{2ab}; \quad (2-98)$$

$$h^2 = D_{11}^2 - x_1^2 - y_1^2 + 2x_1y_1 \cos \varphi; \quad (2-99)$$

$$x_1 = \frac{2b^2 (D_{21}^2 - D_{11}^2 - a^2) + k^2 (D_{12}^2 - D_{11}^2 - b^2)}{4a^2b^2 - k^4} a; \quad (2-100)$$

$$y_1 = \frac{a^2 (D_{12}^2 - D_{11}^2 - b^2) + k^2 (D_{21}^2 - D_{11}^2 - a^2)}{4a^2b^2 - k^4} b; \quad (2-101)$$

$$x_2 = x_1 + a; \quad y_2 = y_1 + b. \quad (2-102)$$

**Пример 2-7.** Два одинаковых прямолинейных провода длиной  $a = 20$  см каждый лежат в параллельных плоскостях, отстоящих друг от друга на расстояние  $h = 40$  см, и расположены так, что общий перпендикуляр к плоскостям проходит через начала обоих проводов. Угол между проводами равен  $\pi/3$ . Определить взаимную индуктивность проводов.

**Решение.** Применяем формулу (2-95) В данном случае (рис. 2-9)

$$a = b = 0,2 \text{ м}; \quad x_1 = y_1 = 0; \quad x_2 = y_2 = 0,2 \text{ м}; \quad \cos \varphi = 0,5; \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 0,5774;$$

$$D_{11} = h = 0,4 \text{ м}; \quad D_{12}^2 = 0,2^2 + 0,4^2 = 0,20 \text{ м}^2; \quad D_{22} = 0,4472 \text{ м};$$

$$D_{21} = D_{12} = 0,4472 \text{ м}; \quad D_{22}^2 = 0,2^2 + 0,2^2 - 0,2^2 \cdot 2 \cdot 0,5 + 0,4 = 0,2 \text{ м}^2;$$

$$D_{22} = 0,4472 \text{ м};$$

$$\operatorname{Arth} \frac{b}{D_{22} + D_{21}} = \operatorname{Arth} \frac{a}{D_{22} + D_{12}} = \operatorname{Arth} 0,2236 = 0,2275;$$

$$A = \arctg 0,5774 + \arctg 1,223 - 2 \arctg 0,9343 = -0,0938;$$

$$\frac{h}{\sin \varphi} A = \frac{-0,4}{0,8660} \cdot 0,0938 = 0,0433.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,5 (2 \cdot 0,2 \cdot 0,2275 - 0,0433) = 0,0477 \cdot 10^{-7} = 4,77 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}.$$

## 2-12. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ НЕКОТОРЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДОВ

1. Два провода, изогнутых по дугам одной окружности (рис. 2-10)  
Взаимная индуктивность двух проводов, изогнутых по дугам одной окружности,

$$M = \frac{\mu_0 R}{\pi} \left( \sin \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} - \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \right. \\ \left. - \sin \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} - I_{123} - I_2 + I_{12} + I_{23} \right), \quad (2-103)$$

где  $I_{123}$ ,  $I_2$ ,  $I_{12}$ ,  $I_{23}$  определяются по табл. 2-2 при  $\theta$ , равном  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_1 + \theta_2$ ,  $\theta_2 + \theta_3$ .

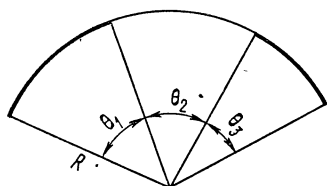


Рис. 2-10

2. Два провода, изогнутых по дугам окружностей и расположенных согласно рис. 2-11. Взаимная индуктивность двух проводов, изогнутых по дугам окружностей, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях так, что центр одной окружности лежит в плоскости, в которой расположена другая окружность,

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} (F_{11} + F_{22} - F_{12} - F_{21}), \quad (2-104)$$

где при  $c^2 > a^2 + b^2$

$$F_{pq} = 2 \sqrt{c^2 - a^2 - b^2} \operatorname{arctg} \frac{D_{pq}}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} - 2D_{pq}, \quad (2-105)$$

а при  $c^2 < a^2 + b^2$

$$F_{pq} = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + D_{pq}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} - D_{pq}} - 2D_{pq}, \quad (2-106)$$

причем

$$D_{pq}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2c (a \cos \alpha_p - b \cos \beta_q) - 2ab \cos \alpha_p \cos \beta_q. \quad (2-107)$$

Здесь  $c$  — расстояние между центрами окружностей;  $a$  и  $b$  — их радиусы. Токи предполагаются направленными в сторону возрастания углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Частные случаи:  
при  $c^2 = a^2 + b^2$

$$F_{pq} = -2 \sqrt{2} \sqrt{c^2 + c (a \cos \alpha_p - b \cos \beta_q) - ab \cos \alpha_p \cos \beta_q}; \quad (2-108)$$

при  $c = 0$  (центры окружностей совпадают)

$$F_{pq} = \sqrt{a^2 + b^2} \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha_p \cos \beta_q}}{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha_p \cos \beta_q}} - \\ - 2 \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha_p \cos \beta_q}; \quad (2-109)$$

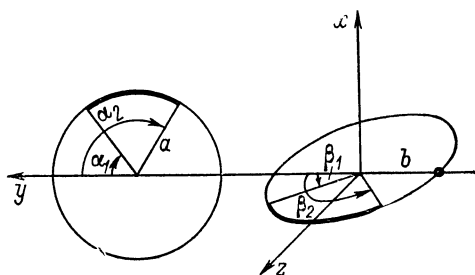


Рис. 2-11

при  $c = 0$ ;  $a = b$

$$F_{pq} = \sqrt{2} a \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \cos \alpha_p \cos \beta_q}}{1 - \sqrt{1 - \cos \alpha_p \cos \beta_q}} - 2 \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos \alpha_p \cos \beta_q}; \quad (2-110)$$

при  $c = 0$ ;  $a = b$ ;  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \mu_0 a \left[ \ln \frac{1 + |\sin \gamma|}{|\cos \gamma|} - |\sin \gamma| - \ln \frac{1 + \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{1 - \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}} + 2 \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right]. \quad (2-111)$$

3. Провод, изогнутый по дуге окружности, и прямолинейный провод, лежащий в одной плоскости с нормалью, проведенной из центра окружности к ее плоскости (рис. 2-12). Взаимная индуктивность провода, изогнутого по дуге окружности, и прямолинейного провода, лежащего в одной

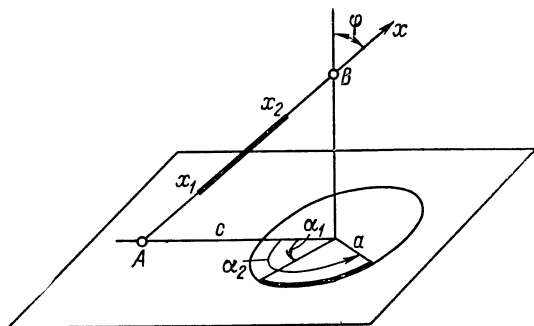


Рис. 2-12

плоскости с нормалью, проведенной из центра окружности к ее плоскости,

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} (F_{11} + F_{22} - F_{12} - F_{21}), \quad (2-112)$$

где

$$F_{pq} = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi}}{\sin \varphi} \ln [x_p (a \cos \alpha_q \sin^3 \varphi + c \cos^2 \varphi) + \\ + a(a - c \cos \alpha_q) \sin \varphi + D_{pq} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi}] - \\ - \frac{a \cos \alpha_q \sin^2 \varphi + c \cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \ln [x_p + (a \cos \alpha_q - c) \sin \varphi + D_{pq}] - D_{pq}; \quad (2-113)$$

$$D_{pq}^2 = x_p^2 + a^2 + c^2 - 2cx_p \sin \varphi + 2a(x_p \sin \varphi - c) \cos \alpha_q; \quad (2-114)$$

$a$  — радиус окружности;  $c = OA$ . Токи предполагаются направленными в сторону возрастания координат  $x$  и  $\alpha$ .

Частные случаи:

при  $c = 0$  (прямолинейный провод проходит через центр окружности)

$$F_{pq} = a \ln (x_p \sin \varphi \cos \alpha_q + a + D_{pq}) - \\ - a \sin \varphi \cos \alpha_q \ln (x_p + a \sin \varphi \cos \alpha_q + D_{pq}) - D_{pq}; \quad (2-115)$$

$$D_{pq}^2 = x_p^2 + a^2 + 2ax_p \sin \varphi \cos \alpha_q; \quad (2-116)$$

при  $c = 0$ ;  $\varphi = \pi/2$  (провода в одной плоскости, рис. 2-13)

$$F_{pq} = a \ln (x_p \cos \alpha_q + a + D_{pq}) - \\ - a \cos \alpha_q \ln (x_p + a \cos \alpha_q + D_{pq}) - D_{pq}; \quad (2-117)$$

$$D_{pq}^2 = x^2 + a^2 + 2ax_p \cos \alpha_q, \quad (2-118)$$

при  $c = 0$ ;  $\varphi = \pi/2$ ;  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = a$ ;  $\alpha_1 = \pi$ ;  $\alpha_2 = \pi + 2\beta$  (прямолинейный провод совпадает с радиусом окружности)

$$M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} [\sin^2 \beta \ln \sin \beta + \cos^2 \beta \ln (1 + \sin \beta) - \sin \beta]; \quad (2-119)$$

при  $c = a$  (прямолинейный провод пересекает окружность)

$$F_{pq} = \frac{a}{\sin \varphi} \ln [x_p (\cos \alpha_q \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi) + a(1 - \cos \alpha_q) \sin \varphi + D_{pq}] - \\ - a \frac{\cos \alpha_q \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \times$$

$$\times \ln [x_p + a(\cos \alpha_q - 1) \sin \varphi + \\ + D_{pq}] - D_{pq}; \quad (2-120)$$

$$D_{pq}^2 = x_p^2 + 2a(\cos \alpha_q - 1) \times \\ \times (x \sin \varphi - a); \quad (2-121)$$

при  $\varphi = \pi/2$ ;  $OB = h \neq 0$  (прямолинейный провод парал-

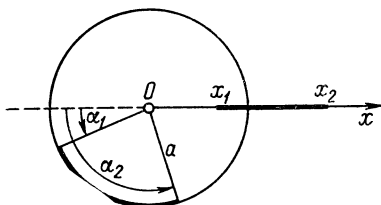


Рис. 2-13

лежит криволинейный, рис. 2-14)

$$F_{pq} = \sqrt{a^2 + h^2} \ln(a^2 + h^2 +$$

$$+ ay_p \cos \alpha_q + D_{pq} \sqrt{a^2 + h^2}) -$$

$$- a \cos \alpha_q \ln(y_p + a \cos \alpha_q +$$

$$+ D_{pq}) - D_{pq}; \quad (2-122)$$

$$D_{pq}^2 = y_p^2 + a^2 + h^2 +$$

$$+ 2ay_p \cos \alpha_q, \quad (2-123)$$

причем  $y_1 = BC$ ;  $y_2 = BD$ .

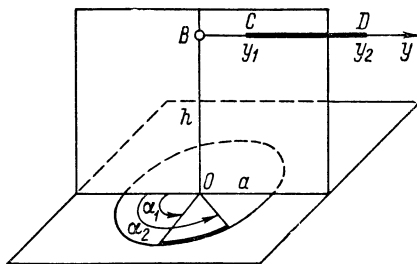


Рис. 2-14

## 2-13. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДОВ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Если один или оба провода являются криволинейными, то, как правило, взаимная индуктивность проводов не выражается в конечном виде через величины, определяющие их форму, размеры и взаимное расположение.

В подобных случаях можно воспользоваться методом численного интегрирования (§ 1-12) или же заменить каждый криволинейный провод совокупностью нескольких прямолинейных, образующих ломаную линию, по форме и размерам достаточно близкую к рассматриваемому криволинейному проводу.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

## ИНДУКТИВНОСТИ СИСТЕМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ

### 3-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В настоящей главе даны формулы и кривые для расчета собственных и взаимных индуктивностей однопроводных, двухпроводных и многопроводных однофазных линий, кабелей, шин прямоугольного сечения, трехфазных линий, трехфазных шин и других систем прямолинейных параллельных проводов. Все провода предполагаются бесконечно длинными. Формулы дают значения индуктивностей на единицу длины рассматриваемых систем.

2. При постоянном токе и низкой частоте собственные и взаимные индуктивности систем



прямолинейных параллельных проводов могут быть определены для всех форм поперечных сечений, встречающихся на практике.

Круг решенных задач для случаев высокой и весьма высокой частоты значительно уже и включает в себя лишь несколько систем простейшего вида. В более сложных случаях для возможности расчета индуктивностей при высокой и весьма высокой частоте, как правило, необходимы те или иные упрощения в постановке задачи; в первую очередь это относится к эффекту близости, учет которого составляет главную трудность при решении задач рассматриваемого типа.

3. Если не оговорено противное, формулы для индуктивностей при весьма высокой частоте не учитывают магнитных потоков внутри проводов. При желании учесть эти магнитные потоки следует руководствоваться указаниями, данными в § 1-15. Для некоторых важных случаев необходимые расчетные формулы приведены в соответствующих параграфах.

4. При весьма высокой частоте формулы для индуктивностей систем полых проводов и шин совпадают с соответствующими формулами для сплошных проводов и шин; однако формулами для внутренних индуктивностей проводов и шин следует пользоваться лишь при условии, что толщина стенки провода или шины не меньше половины длины электромагнитной волны  $\lambda_{\sim} = 2\pi\sqrt{2}/\sqrt{\omega\mu\gamma}$  в металле.

5. Все формулы для трехфазных линий и шин относятся к случаю низкой частоты (предполагается, что токи распределены по сечениям проводов и шин равномерно).

### 3-2. ИНДУКТИВНОСТЬ ОДНОФАЗНОГО КАБЕЛЯ

1. Коаксиальный кабель со сплошным внутренним проводом и полым наружным проводом (рис. 3-1, а).

1) При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{q}{p} + \frac{\mu}{\mu_0} \left[ \frac{r^4}{(r^2 - q^2)^2} \ln \frac{r}{q} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r^2 - q^2} \right] \right\}, \quad (3-1)$$

где  $p$  — радиус внутреннего провода;  $q$  и  $r$  — внутренний и внешний радиусы наружного провода.

При малой толщине наружного (полого) провода ( $t = r - q \ll q$ ) удобна формула

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{q}{p} + \frac{1}{4} \frac{\mu}{\mu_0} \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{t}{q} - \frac{2}{15} \frac{t^3}{q^3} \dots \right) \right]. \quad (3-2)$$

2) При весьма высокой частоте

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{q}{p}. \quad (3-3)$$

3) При любой частоте для кабеля с малой толщиной наружного (полого) провода ( $r - q = t \ll q$ )

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{q}{p} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} + \frac{\mu}{\mu_0 m q} \frac{\operatorname{sh} mt - \sin mt}{\operatorname{ch} mt - \cos mt} \right), \quad (3-4)$$

где  $m = \sqrt{2\omega\mu\gamma}$ ;  $\xi$  — коэффициент, учитывающий поверхностный эффект во внутреннем проводе. Значения  $\xi$  можно

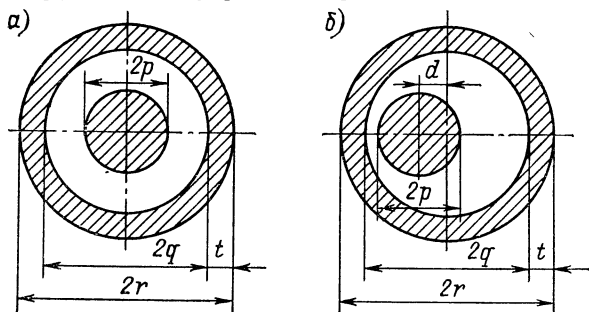


Рис. 3-1

определить по табл. 2-1 или по формулам § 2-2, заменив в них  $kr$  на  $kp$  ( $k = m/\sqrt{2} = \sqrt{\omega\mu\gamma}$ ). При  $mt < 3$  можно пользоваться формулой

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{q}{p} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{t}{3q} \left( 1 + \frac{m^4 t^4}{630} \dots \right) \right]. \quad (3-5)$$

В частности, при  $mt = 0$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{q}{p} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} \right). \quad (3-6)$$

4) При любой частоте и произвольном соотношении радиусов  $p, q, r$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{q}{p} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} \right) + L_{i2}, \quad (3-7)$$

где  $L_{i2}$  — внутренняя индуктивность наружного провода, равная деленной на  $j\omega$  мнимой части выражения

$$Z_2 = - \frac{j\omega\mu}{2\pi q k} \frac{\operatorname{ber} kq + j \operatorname{bei} kq - T (\operatorname{hei} kq - j \operatorname{her} kq)}{\operatorname{ber}' kq + j \operatorname{bei}' kq - T (\operatorname{hei}' kq - j \operatorname{her}' kq)}, \quad (3-8)$$

где

$$T = \frac{\operatorname{ber}' kr + j \operatorname{bei}' kr}{\operatorname{hei}' kr - j \operatorname{her}' kr}; \quad (3-9)$$

$k = \sqrt{\omega\mu\gamma}$ ;  $\text{ber } kq$  и  $\text{bei } kq$  — вещественная и мнимая составляющие бесселевой функции  $J_0(z_q)$  первого рода нулевого порядка от комплекс-

ного числа  $z_q = kqe^{i\frac{3\pi}{4}}$ ;  $\text{ber}' kq$  и  $\text{bei}' kq$  — их производные по  $kq$ ;  $\text{her } kq$  и  $\text{hei } kq$  — вещественная и мнимая составляющие функции Ханкеля  $H_0^1(z_q)$  нулевого порядка от того же аргумента  $z_q$ ;  $\text{her}' kq$  и  $\text{hei}' kq$  — их производные по  $kq$ ;  $\text{ber}' kr$ ,  $\text{bei}' kr$ ,  $\text{her}' kr$ ,  $\text{hei}' kr$  — то же, что  $\text{ber}' kq$ ,  $\text{bei}' kq$ ,  $\text{her}' kq$ ,  $\text{hei}' kq$  с заменой  $q$  на  $r$ .

Значения всех указанных здесь функций и их производных можно взять из таблиц, приведенных в приложениях 8 и 9.

При больших значениях  $kq$  и  $kt = k(r - q)$  величина  $L_{i2}$  может быть найдена непосредственно по формуле

$$L_{i2} = \frac{\mu}{8\pi x} \left\{ 1 - \frac{3}{64x^2} - \frac{3}{128x^3} \dots + 2e^{-mt} \cos m \cdot \times \right. \\ \times \left[ 1 - \frac{3}{256x^2} \left( 7 - 6 \frac{q}{r} + 3 \frac{q^2}{r^2} \right) \dots \right] - \\ - 2e^{-mt} \sin mt \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{t}{rx} + \frac{3}{256x^2} \left( 7 - 6 \frac{q}{r} + 3 \frac{q^2}{r^2} \right) \dots \right] + \\ \left. + \text{члены порядка } e^{-2mt} \dots \right\}, \quad (3-10)$$

где  $x = kq/\sqrt{8} = mq/4$ ;  $m = k\sqrt{2} = \sqrt{2\omega\mu\gamma}$ .

**Пример 3-1.** Коаксиальный кабель со сплошным внутренним и полым наружным проводом имеет следующие размеры: радиус внутреннего провода  $p = 2,5$  мм, радиусы наружного провода  $q = 9$  мм и  $r = 9,5$  мм.

Определить индуктивность кабеля на единицу длины при низкой частоте, при весьма высокой частоте и при частоте  $f = 70$  кГц.

**Решение.**

1. При низкой частоте применяем формулу (3-2). В данном случае

$$q/p = 9/2,5 = 3,6; \quad t/q = 0,5/9 = 0,05556.$$

Величиной  $\frac{2}{15} \frac{t^3}{q^3}$  можно пренебречь, и, следовательно,

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \left( \ln 3,6 + 0,25 + \frac{1}{3} \cdot 0,05556 \right) = 2 \cdot 10^{-7} (1,281 + 0,2685) = \\ = 3,110 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Если воспользоваться формулой (3-1), то будем иметь

$$r^2 = 90,25 \text{ мм}^2; \quad \frac{r^2}{r^2 - q^2} = \frac{90,25}{9,25} = 9,757; \quad \frac{r}{q} = \frac{9,5}{9} = 1,056;$$

$$q^2 = 81,00 \text{ мм}^2; \quad r^2 - q^2 = 9,25 \text{ мм}^2;$$

$$\frac{r^4}{(r^2 - q^2)^2} = 95,20; \quad \ln \frac{r}{q} = 0,05449;$$

$$L = 2 \cdot 10^{-7} \left( \ln 3,6 + 95,20 \cdot 0,05449 - \frac{1}{2} \cdot 9,757 \right) =$$

$$= 2 \cdot 10^{-7} (1,281 + 5,187 - 4,879) = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1,589 = 3,178 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

В данном случае (при малой толщине  $l$ ) более точным является ответ, полученный по формуле (3-2), так как структура формулы (3-1) такова, что относительно небольшие ошибки в промежуточных вычислениях приводят к значительно бóльшим ошибкам в конечном результате.

2. При весьма высокой высоте, применяя формулу (3-3), имеем

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \ln 3,6 = 2,1,281 \cdot 10^{-7} = 2,562 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

3. При частоте  $f = 70$  кГц применяем формулу (3-4). В данном случае

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot 70 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 8,010 \cdot 10^3; \\ k &= m/\sqrt{2} = 5,665 \cdot 10^3; \quad kp = 5,665 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 14,16; \\ mq &= 72,09; \quad mt = 4,005; \\ \text{sh } mt &= 27,43; \quad \text{ch } mt = 27,45; \quad \frac{28,19}{28,10} = 1,003. \\ \sin mt &= \frac{-0,76}{28,19}; \quad \cos mt = \frac{-0,65}{28,10} \end{aligned}$$

По табл. 2-1 при  $kp = 14,16$  находим  $\zeta = 0,1994$ .  
Искомая индуктивность

$$\begin{aligned} L &= 2 \cdot 10^{-7} (1,281 + 0,1994/4 + 1,003/72,09) = \\ &= 2 \cdot 10^{-7} (1,281 + 0,050 + 0,014) = 2,690 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.} \end{aligned}$$

## 2. Коаксиальный кабель с двумя полыми проводниками (рис. 3-2).

1) При постоянном токе и низкой частоте

$$\begin{aligned} L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{q}{p} + \frac{\mu}{\mu_0} \left[ \frac{r^4}{(r^2 - q^2)^2} \ln \frac{r}{q} + \frac{n^4}{(p^2 - n^2)^2} \ln \frac{p}{n} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{q^2}{r^2 - q^2} + \frac{n^2}{p^2 - n^2} \right) \right] \right\}, \quad (3-11) \end{aligned}$$

где  $n$  и  $p$  — радиусы внутреннего провода;  $q$  и  $r$  — радиусы наружного провода.

Для кабеля с малой толщиной стенок обоих проводов ( $t_1 = p - n \ll p$ ;  $t_2 = r - q \ll q$ ) удобна формула

$$\begin{aligned} L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{q}{p} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{t_1}{p} \left( 1 - \frac{1}{10} \frac{t_1^2}{p^2} \dots \right) + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{t_2}{q} \left( 1 - \frac{1}{10} \frac{t_2^2}{q^2} \dots \right) \right]. \quad (3-12) \end{aligned}$$

2) При весьма высокой частоте

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{q}{p}. \quad (3-13)$$

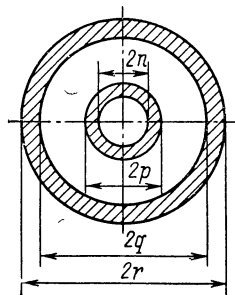


Рис. 3-2

3) При любой частоте для кабеля с малой толщиной стенок обоих проводов ( $t_1 = p - n \ll p$ ;  $t_2 = r - q \ll q$ )

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{q}{p} + \frac{\mu}{\mu_0} \left( \frac{1}{mq} \frac{\operatorname{sh} mt_2 - \sin mt_2}{\operatorname{ch} mt_2 - \cos mt_2} + \frac{1}{mp} \frac{\operatorname{sh} mt_1 - \sin mt_1}{\operatorname{ch} mt_1 - \cos mt_1} \right) \right], \quad (3-14)$$

где  $m = \sqrt{2\omega\mu\gamma}$ .

При  $mt_1 < 3$  и  $mt_2 < 3$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{q}{p} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\mu_0} \left[ \frac{t_2}{q} \left( 1 - \frac{m^4 t_2^4}{630} \dots \right) + \frac{t_1}{p} \left( 1 - \frac{m^4 t_1^4}{630} \dots \right) \right] \right\}. \quad (3-15)$$

В частности, при  $t_1 = t_2 = 0$  справедлива формула (3-13).

4) При любой частоте и произвольном соотношении радиусов  $n$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{q}{p} + L_{i1} + L_{i2}, \quad (3-16)$$

где  $L_{i1}$  и  $L_{i2}$  — внутренние индуктивности внутреннего и наружного проводов, причем  $L_{i2}$  определяется так, как указано в подпункте 4) пункта 1 этого параграфа (при  $t = t_2$ ), а  $L_{i1}$  — аналогичным образом, но с заменой  $q$  на  $p$ ,  $r$  на  $n$  и  $t_2$  на  $t_1$ ; кроме того, при определении  $L_{i1}$  правую часть формулы (3-8) следует умножить на  $(-1)$ .

**3. Коаксиальный кабель с многожильным внутренним и полым наружным проводами (рис. 3-3).**

1) При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{R}{r} + \frac{r^4}{(r^2 - q^2)^2} \ln \frac{r}{q} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r^2 - q^2} - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mp} \right], \quad (3-17)$$

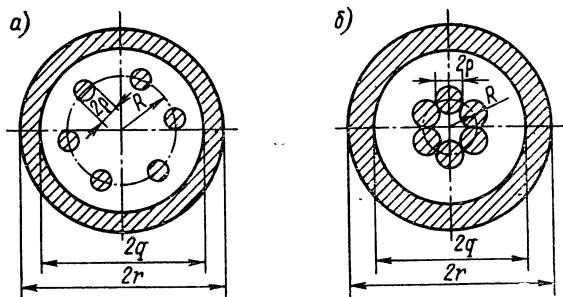


Рис. 3-3

где  $q$  и  $r$  — радиусы наружного провода;  $m$  — число жил внутреннего провода;  $\rho$  — радиус жилы;  $R$  — радиус окружности, на которой расположены центры сечений жил (рис. 3-3, а, б). Для кабеля с весьма малой толщиной стенки полого провода ( $t = r - q \ll q$ ) удобна формула

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{q}{R} + \frac{1}{3} \frac{t}{q} \left( 1 - \frac{1}{10} \frac{t^2}{q^2} \dots \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4m} + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{m\rho} \right]. \quad (3-18)$$

2) При весьма высокой частоте для кабеля с плотно прилегающими друг к другу жилами внутреннего провода (рис. 3-3, б)

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2q}{2R + \rho}. \quad (3-19)$$

**4. Коаксиальный кабель с многожильным наружным проводом**

**попечным внутренним проводами (рис. 3-4).**

1) При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{R}{\rho} + \frac{n^4}{(p^2 - n^2)^2} \ln \frac{p}{n} - \frac{1}{4} \frac{3n^2 - p^2}{p^2 - n^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{m\rho} + \frac{1}{4m} \right], \quad (3-20)$$

где  $n$  и  $p$  — радиусы внутреннего провода;  $m$  — число жил наружного провода;  $\rho$  — радиус жилы;  $R$  — радиус окружности, на которой расположены центры сечений жил (рис. 3-4, а, б).

В частности, для сплошного внутреннего провода ( $n = 0$ )

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{R}{\rho} + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{m\rho} + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \right]. \quad (3-21)$$

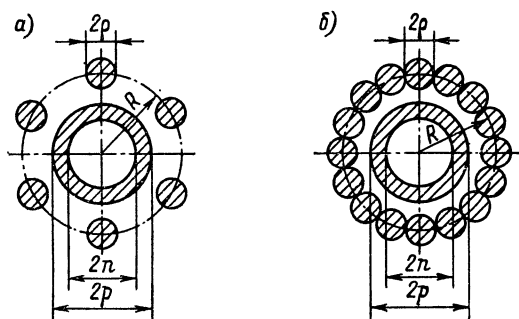


Рис. 3-4

При малой толщине стенки полого провода ( $t = p - n \ll p$ ) удобна формула

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{R}{p} + \frac{1}{3} \frac{t}{p} - \frac{1}{30} - \frac{t^3}{p^3} - \frac{1}{80} \frac{t^5}{p^5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mp} + \frac{1}{4m} \right). \quad (3-22)$$

2) При весьма высокой частоте для кабеля с плотно прилегающими друг к другу жилами наружного провода (рис. 3-4, б)

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2R - p}{2p}. \quad (3-23)$$

### 5. Кабель со смещенными осями (рис. 3-1, б).

1) Если  $\mu = \mu_0$ , то при постоянном токе и низкой частоте для кабеля с полым наружным проводом в зависимости от конструкции внутреннего провода справедливы формулы, данные в пунктах 1, 2 и 3 настоящего параграфа; для кабеля с многожильным наружным проводом и полым внутренним проводом

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{R_{\text{med}}^2}{Rp} + \frac{n^4}{(p^2 - n^2)^2} \ln \frac{p}{n} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{3n^2 - p^2}{p^2 - n^2} + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mp} + \frac{1}{4m} \right], \quad (3-24)$$

где  $R_{\text{med}} = \sqrt[m]{d_1 d_2 \dots d_m}$ , причем  $d_1, d_2, \dots, d_m$  — расстояния от центра сечения внутреннего провода до центров сечений жил наружного провода, а прочие обозначения те же, что и в формуле (3-20). В частности, для сплошного внутреннего провода ( $n = 0$ )

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{R_{\text{med}}^2}{Rp} + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mp} + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \right]. \quad (3-25)$$

При малой толщине стенки полого провода ( $t = p - n \ll p$ ) удобна формула

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{R_{\text{med}}^2}{Rp} + \left( \frac{1}{3} \frac{t}{p} - \frac{1}{30} \frac{t^3}{p^3} - \frac{1}{80} \frac{t^5}{p^5} \dots \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mp} + \frac{1}{4m} \right]. \quad (3-26)$$

2) При весьма высокой частоте для кабеля с полыми проводниками

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \operatorname{Arch} \frac{p^2 + q^2 - d^2}{2pq}, \quad (3-27)$$

где  $d$  — расстояние между осями внутреннего и наружного проводов. Формула справедлива при любом материале проводов ( $\mu$  может быть не равно  $\mu_0$ ).

**Пример 3-2.** У кабеля предыдущего примера оси внутреннего и наружного проводов смещены на расстояние  $d = 2$  мм. Определить индуктивность кабеля при весьма высокой частоте.

**Решение.** Применяя формулу (3-27), в данном случае имеем

$$p = 2,5 \text{ мм}; \quad p^2 = 6,25 \text{ мм}^2;$$

$$q = 9 \text{ мм}; \quad q^2 = 81 \text{ мм}^2; \quad 2pq = 45 \text{ мм}^2;$$

$$d = 2 \text{ мм}; \quad d^2 = 4 \text{ мм}^2;$$

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \operatorname{Arch} \frac{6,25 + 81 - 4}{45} = 2 \cdot 10^{-7} \operatorname{Arch} 1,85 = 2,452 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м},$$

Сравнение полученного результата с соответствующим значением индуктивности коаксиального кабеля ( $2,562 \cdot 10^{-7}$  Гн/м) показывает, что смещение осей сравнительно мало влияет на индуктивность.

### 3-3. ИНДУКТИВНОСТЬ ОДНОФАЗНОЙ ЛИНИИ С ПРОВОДАМИ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

**1. Двухпроводная линия со сплошными проводами (рис. 3-5).**

1) При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right), \quad (3-28)$$

где  $d$  — расстояние между осями проводов;  $r$  — радиус провода.

2) При весьма высокой частоте

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \operatorname{Arch} \frac{d^2 - 2r^2}{2r^2} = \frac{\mu_0}{\pi} \operatorname{Arch} \frac{d}{2r}. \quad (3-29)$$

В частности, при  $d \gg r$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r}. \quad (3-30)$$

Более точное выражение для случая  $d \gg r$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{r} - \frac{r^2}{d^2} - \frac{3}{2} \frac{r^4}{d^4} \right). \quad (3-31)$$

При желании учесть магнитные потоки внутри проводов к величине  $L$ , найденной по формуле (3-29), необходимо прибавить величину  $2L_i$ , где  $L_i$  — внутренняя индуктивность одного провода на единицу длины, определяемая по формуле

$$L_i = \frac{d}{4\pi r \sqrt{(d/2)^2 - r^2}} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}}. \quad (3-32)$$

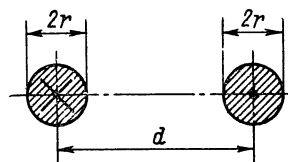


Рис. 3-5



При  $d \gg r$

$$L_i = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}}. \quad (3-33)$$

3) При любой частоте и для проводов из любого материала

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{r} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} \right), \quad (3-34)$$

где  $\xi$  — коэффициент, учитывающий поверхностный эффект в проводах. Значения  $\xi$  можно определить по табл. 2-1 или по формулам § 2-2. Формула (3-34) не учитывает эффекта близости и искажения магнитного поля, вызванного наличием соседнего провода с магнитной проницаемостью, отличной от  $\mu_0$ . О возможной погрешности см. в § 1-15.

**Пример 3-3.** Двухпроводная однофазная линия выполнена из сплошных медных проводов кругового сечения. Радиус сечения  $r = 4$  мм, расстояние между осями проводов  $d = 50$  см.

Определить индуктивность линии при низкой частоте, весьма высокой частоте и частоте  $f = 800$  Гц.

**Решение.** В данном случае

$$\frac{d}{r} = \frac{50}{0,4} = 125; \ln \frac{d}{r} = 4,828; \frac{r}{d} = 8 \cdot 10^{-3}; \left( \frac{r}{d} \right)^2 = 6,4 \cdot 10^{-5}.$$

1. При низкой частоте применяем формулу (3-28):

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} (4,828 + 0,25) = 4 \cdot 5,078 \cdot 10^{-7} = 2,031 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

2. При весьма высокой частоте применяем формулу (3-29):

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \operatorname{Argh} \left( \frac{50^2}{2 \cdot 0,4^2} - 1 \right) = 2 \cdot 10^{-7} \operatorname{Argh} 7813 = 1,931 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

Так как  $d \gg r$ , то можно использовать формулу (3-30):

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \ln 125 = 4 \cdot 4,828 \cdot 10^{-7} = 1,931 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

Формула (3-31) в пределах принятой точности расчета не дает уточнения по сравнению с формулой (3-30).

3. При частоте  $f = 800$  Гц применяем формулу (3-34). В данном случае

$$k = \sqrt{2\pi \cdot 800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 605,4; kr = 605,4 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 2,422.$$

По табл. 2-1 находим  $\xi = 0,9219$ . Искомая индуктивность

$$L = 4 \cdot 10^{-7} \left( \ln 125 + \frac{0,9219}{4} \right) = 4 \cdot 10^{-7} (4,828 + 0,231) = 2,024 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

## 2. Двухпроводная линия с полыми проводниками (рис. 3-6).

1) При постоянном токе и низкой частоте

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{rc}, \quad (3-35)$$

где  $d$  — расстояние между осями проводов;  $c$  — величина, значения которой даны в табл. 10-1 в зависимости от отношения внутреннего радиуса  $q$  к внешнему радиусу  $r$ .

При малой толщине стенки проводов ( $t = r - q \ll r$ ) удобна формула

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{r} + \frac{1}{3} \frac{t}{r} - \frac{1}{30} \frac{t^3}{r^3} - \frac{1}{80} \frac{t^5}{r^5} \dots \right). \quad (3-36)$$

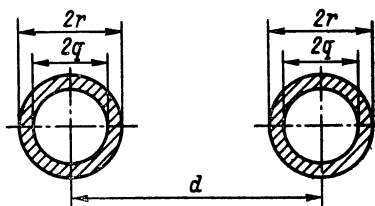


Рис. 3-6

2) При весьма высокой частоте справедливы формулы (3-29), (3-30) и (3-31).

Внутренняя индуктивность проводов может быть учтена с помощью формул (3-32) и (3-33).

3) При любой частоте и для проводов из любого материала

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r} + 2L_i, \quad (3-37)$$

где  $L_i$  — внутренняя индуктивность провода на единицу его длины, определяемая путем деления на  $l$  выражений, данных в § 2-3, п. 3.

Формула (3-37) не учитывает эффекта близости и искажения магнитного поля, вызванного наличием соседнего провода с магнитной проницаемостью, отличной от  $\mu_0$ .

3. Однопроводная линия с землей в качестве обратного провода (рис. 3-7). Индуктивность однопроводной линии, обратным проводом которой служит земля, вдвое меньше индуктивности соответствующей двухпроводной линии (рис. 3-5), обратный провод которой находится от прямого на расстоянии  $d = 2h$ . Предполагается, что высота  $h$  достаточно велика по сравнению с длиной волны  $\lambda_{\sim}$  электромагнитных колебаний в земле, т. е. что

$$h \gg \lambda_{\sim} = \frac{\sqrt{4\pi/\mu_0}}{\sqrt{f\gamma}}, \quad (3-38)$$

где  $\gamma$  — удельная проводимость земли. Следует иметь в виду, что последнее условие выполняется только при достаточно большом значении частоты  $f$ .

Индуктивность двухпроводной линии определяется так, как указано в пп. 1 и 2 этого параграфа.

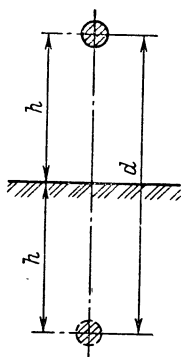


Рис. 3-7

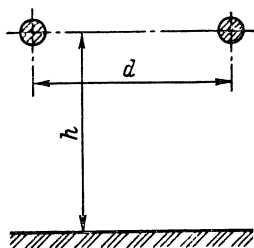


Рис. 3-8

**4. Двухпроводная линия вблизи поверхности земли.** Если провода линии лежат в плоскости, параллельной поверхности земли (рис. 3-8), то индуктивность линии может быть найдена по формуле

$$L' = L - \Delta L, \quad (3-39)$$

где  $L$  — индуктивность линии без учета земли (определяется по пунктам 1 и 2 этого параграфа);  $\Delta L$  — поправка, учитывающая влияние земли и равная

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{d^2}{4h^2} \right), \quad (3-40)$$

причем  $d$  — расстояние между проводами;  $h$  — высота подвеса линии. Предполагается, что  $h$  по крайней мере в несколько раз превосходит радиус проводов и длину волны электромагнитных колебаний в земле, равную

$$\lambda_{\sim} = \frac{\sqrt{4\pi/\mu_0}}{\sqrt{j\gamma}},$$

где  $\gamma$  — удельная проводимость земли.

Следует иметь в виду, что последнее условие выполняется только при достаточно большом значении частоты  $f$ .

### 3-4. ИНДУКТИВНОСТЬ ТОНКИХ ОДНОФАЗНЫХ ШИН ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В настоящем параграфе рассматриваются шины прямоугольного поперечного сечения, один из размеров которого значительно меньше другого. При этом различаются шины ничтожно малой толщины, рассматриваемые при расчете как бесконечно тонкие ленты (рис. 3-9), и шины малой, но конечной толщины (рис. 3-10).

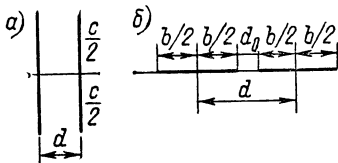


Рис. 3-9

# **1. Бесконечно тонкие ленты.**

1) При постоянном токе и низкой частоте значения индуктивностей лент могут быть взяты из рис. 3-11 (кривые  $f = 0$ ).

Для аналитического расчета индуктивностей лент при расположении по рис. 3-9, а может служить формула

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ \ln \frac{d}{c} + \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2} \ln(1 + \gamma^2) + \frac{2}{\gamma} \operatorname{arctg} \gamma \right], \quad (3-41)$$

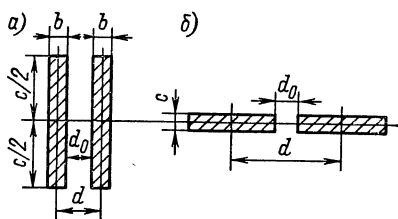


Рис. 3-10

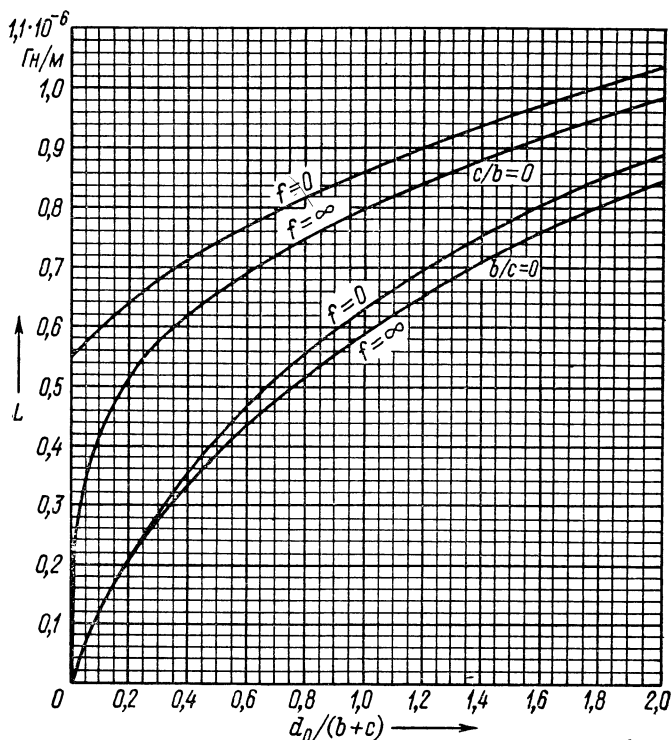


Рис. 3-11

а при расположении по рис. 3-9, б — формула

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ \ln \frac{d}{b} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right)^2 \ln(1 + \beta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right)^2 \ln(1 - \beta) \right], \quad (3-42)$$

где  $\gamma = c/d$ ;  $\beta = b/d$ .

При значительном расстоянии между лентами формулы (3-41) и (3-42) неудобны для расчета и лучше пользоваться формулой

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{b+c} + \frac{3}{2} + \Delta \right), \quad (3-43)$$

где для рис. 3-9, а ( $b = 0$ )

$$\Delta = \gamma^2/12 - \gamma^4/60 + \gamma^6/168 \dots, \quad (3-44)$$

а для рис. 3-9, б ( $c = 0$ )

$$\Delta = -(\beta^2/12 + \beta^4/60 + \beta^6/168 \dots). \quad (3-45)$$

2) При весьма высокой частоте значения индуктивностей лент могут быть взяты из рис. 3-11 (кривые  $f = \infty$ ).

Точные значения индуктивностей лент при весьма высокой частоте могут быть найдены по формуле

$$L = \mu_0 \frac{K}{K'}, \quad (3-46)$$

где  $K$  и  $K'$  — полные эллиптические интегралы первого рода с модулями  $k$  и  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ , зависящими от относительных размеров поперечного сечения рассматриваемой системы.

Для расположения лент по рис. 3-9, а модуль  $k$  определяется из системы уравнений:

$$K'E'(\theta, k) - E'F'(\theta, k) = \frac{\pi}{2} \frac{c}{d}; \quad (3-47)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{K' - E'}{(1 - k^2) K'}, \quad (3-48)$$

где  $K'$ ,  $E'$ ,  $F'(\theta, k)$ ,  $E'(\theta, k)$  — обозначения полных и неполных эллиптических интегралов первого и второго рода с дополнительным модулем  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  (для упрощения расчетов решение этой системы дано в табл. 3-1 в виде зависимости  $d/c$  от  $k^2$ ).

Для расположения по рис. 3-9, б

$$k = \frac{d - b}{d + b}. \quad (3-49)$$

В обоих случаях для определения отношения  $K/K'$  удобно пользоваться таблицей приложения 4, где это отношение дано в зависимости от квадрата модуля  $k$ .

**Таблица 3-1. Значения  $d/c$  в зависимости от  $k^2$  для лент (рис. 3-9, а)**

$k^2$	$d/c$	$k^2$	$d/c$	$k^2$	$d/c$
0	0	0	0	0,10	1,7161
0,0002	0,4351	0,01	0,8367	11	1,7919
4	0,4765	2	0,9928	12	1,8669
6	0,5043	3	1,1127	13	1,9414
8	0,5262	4	1,2161	14	2,0160
0,0010	0,5441	5	1,3097	15	2,0906
20	0,6091	6	1,3974	16	2,1654
40	0,6907	7	1,4806	17	2,2404
60	0,7488	8	1,5612	18	2,3161
80	0,7997	9	1,6394	19	2,3926
0,0100	0,8367	0,10	1,7161	0,20	2,4698

При значительном расстоянии между лентами ( $d/c > 2$ ,  $d/b > 2$ ) вместо формулы (3-46) можно пользоваться более простыми формулами, полученными в пренебрежении эффектом близости, а именно:

для расположения по рис. 3-9, а — формулой

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \operatorname{Arsh} \frac{2d}{c}; \quad (3-50)$$

для расположения по рис. 3-9, б — формулой

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \operatorname{Arch} \frac{2d}{b}. \quad (3-51)$$

## 2. Тонкие шины конечной толщины.

1) При постоянном токе и низкой частоте значения индуктивностей тонких шин могут быть найдены по формулам: для расположения по рис. 3-10, а

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ \ln \frac{d}{b+c} + \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2} \ln(1 + \gamma^2) + \frac{2}{\gamma} \operatorname{arctg} \gamma \right]; \quad (3-52)$$

для расположения по рис. 3-10, б

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ \ln \frac{d}{b+c} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right)^2 \ln(1 + \beta) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right)^2 \ln(1 - \beta) \right], \quad (3-53)$$

где  $\gamma = c/d$ ;  $\beta = b/d$ .

При значительном расстоянии между шинами ( $\frac{d}{b+c} > 2$ ) удобно пользоваться формулой (3-43), вычисляя зна-

чения  $\Delta$  по формуле (3-44) для расположения по рис. 3-10, а и по формуле (3-45) для расположения по рис. 3-10, б.

2) При весьма высокой частоте для определения индуктивностей тонких шин можно пользоваться кривыми рис. 3-14 и 3-15.

Для тонких, близко расположенных шин ( $d \ll c$ , рис. 3-10, а) можно пользоваться простой приближенной формулой

$$L = \mu_0 \frac{d-b}{c}, \quad (3-54)$$

дающей удовлетворительный результат при  $d/c \leq 0,1$ .

Наоборот, при значительном расстоянии между шинами ( $\frac{d}{b+c} > 2$ ) применимы формулы:  
при  $b \ll c$  (рис. 3-10, а)

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \text{Arsh} \frac{d}{l} - \text{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \right); \quad (3-55)$$

при  $c \ll b$  (рис. 3-10, б)

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \text{Arch} \frac{d}{f} - \text{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \right), \quad (3-56)$$

причем в первом случае

$$f = \frac{c}{2E} (1 + \eta) \sqrt{1 - \eta^2}, \quad \eta = \frac{b}{c}, \quad (3-57)$$

а во втором

$$f = \frac{b}{2E} (1 + \eta) \sqrt{1 - \eta^2}, \quad \eta = \frac{c}{b}, \quad (3-58)$$

где  $E$  — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $k = \sqrt{1 - \eta^2}$ .

При желании учесть магнитные потоки внутри шин следует к величине  $L$ , найденной, как указано выше, прибавить  $2L_i$ , где  $L_i$  при пренебрежении эффектом близости определяется делением на  $l$  выражением (2-40):

$$L_i = \frac{1}{\sqrt{bc}} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}} \Phi, \quad (3-59)$$

причем значения величины  $\Phi$  могут быть найдены по формуле (2-41) или по кривой рис. 2-3. Для тонких, близко распо-

женных шин ( $d \ll c$ , рис. 3-10, а) следует пользоваться формулой

$$L = \mu_0 \left( \frac{d-b}{c} + \frac{2}{mc} \right), \quad (3-60)$$

где  $m = \sqrt{2\omega\mu_0\gamma}$ .

3) При высокой частоте для тонких, близко расположенных шин ( $d \ll c$ , рис. 3-10, а)

$$L = \frac{\mu_0}{c} \left( d - b + \frac{2}{m} \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{ch} x - \cos x} \right), \quad (3-61)$$

где  $x = mb$ ;  $m = \sqrt{2\omega\mu_0\gamma}$ .

Если  $x < 3$ , последняя формула может быть представлена в виде

$$L = \frac{\mu_0}{c} \left[ d - b + \frac{2}{3} b \left( 1 - \frac{x^4}{630} + \frac{x^8}{249480} \cdots \right) \right]. \quad (3-62)$$

### 3-5. ИНДУКТИВНОСТЬ ОДНОФАЗНЫХ ШИН ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В настоящем параграфе рассматриваются сплошные шины прямоугольного сечения, расположенные согласно рис. 3-10, а и б, при произвольном соотношении размеров  $b$  и  $c$  поперечного сечения\*.

1. При постоянном токе и низкой частоте значения индуктивности  $L$  могут быть определены по кривым рис. 3-12. Для наиболее важного случая, когда шины расположены согласно рис. 3-10, а ( $b \leq c$ ), несколько более точные значения  $L$  при  $d < c$  могут быть получены из рис. 3-13, где величина  $\frac{c}{d} L$  дана в зависимости от  $d/c$  при различных значениях  $b/d$ . При  $d/(b+c) > 2$  для определения индуктивности шин с любым соотношением размеров  $b$  и  $c$  можно пользоваться приближенной формулой

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{b+c} + \frac{3}{2} \right). \quad (3-63)$$

При любых  $b$ ,  $c$  и  $d$  индуктивность шин может быть определена по формуле

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{b+c} + \frac{3}{2} + f - \varepsilon \right), \quad (3-64)$$

причем  $f$  и  $\varepsilon$  могут быть найдены по табл. 10-3—10-5.

---

\* О расчете индуктивностей при другом расположении шин см. в § 3-9.



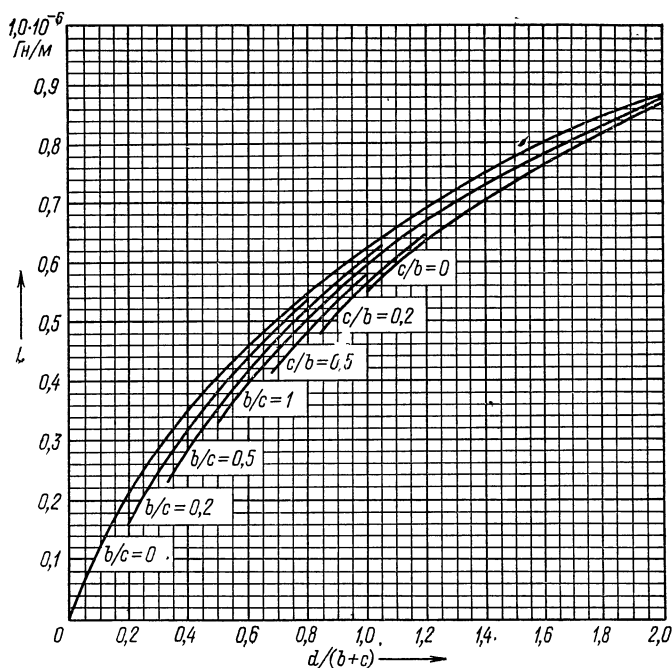


Рис. 3-12

2. При весьма высокой частоте значения индуктивностей шин могут быть определены по кривым рис. 3-14 при  $b \leq c$  и из кривых рис. 3-15 при  $b \geq c$ .

При  $d_0/c > 2$  для индуктивности шин, расположенных согласно рис. 3-10, а, справедлива приближенная формула

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \text{Arsh} \frac{d}{f} - \text{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \right), \quad (3-65)$$

где

$$f = \frac{c}{2E} (1 + \eta) \sqrt{1 - \eta^2}, \quad \eta = \frac{b}{c}; \quad (3-66)$$

$E$  — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $k = \sqrt{1 - \eta^2}$ .

При  $d_0/b > 2$  для индуктивности шин, расположенных согласно рис. 3-10, б, справедлива приближенная формула

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \text{Arch} \frac{d}{f} - \text{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \right), \quad (3-67)$$

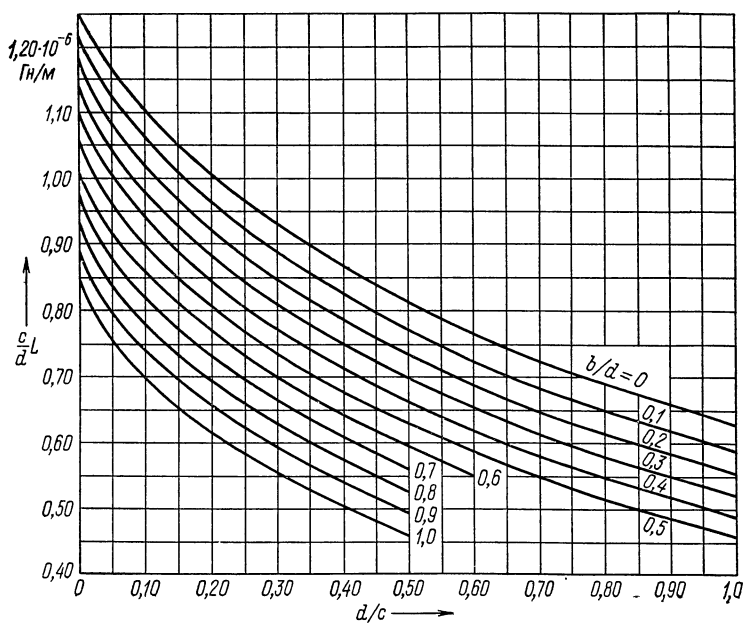


Рис. 3-13

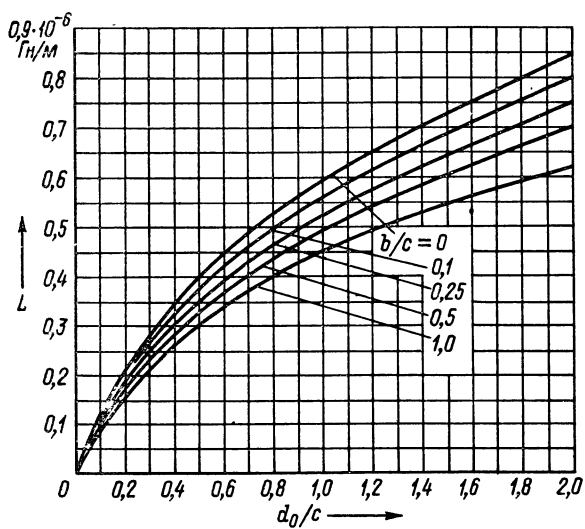


Рис. 3-14

где

$$f = \frac{b}{2E} (1 + \eta) \sqrt{1 - \eta^2}, \quad \eta = \frac{c}{b}; \quad (3-68)$$

$E$  — то же, что и в предыдущем случае.

Степень точности формул (3-65) и (3-67) возрастает с увеличением расстояния между шинами и с уменьшением их толщины.

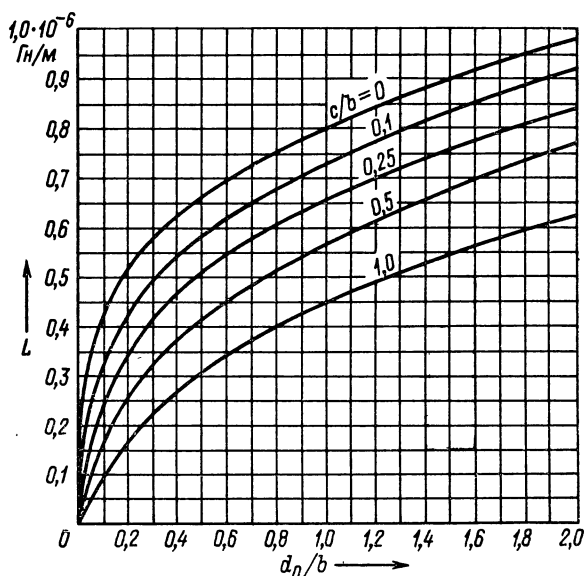


Рис. 3-15

При желании учесть магнитные потоки внутри шин следует к величине  $L$ , найденной, как указано выше, прибавить  $2L_i$ , где  $L_i$  при пренебрежении эффектом близости определяется делением на  $l$  выражением (2-40):

$$L_i = \frac{1}{\sqrt{bc}} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}} \vartheta, \quad (3-69)$$

причем значения величины  $\vartheta$  могут быть найдены по формуле (2-41) или по кривой рис. 2-3.

**Пример 3-4.** Медные шины прямоугольного поперечного сечения имеют размеры:  $b = 10$  мм,  $c = 50$  мм. Шины расположены на расстоянии  $d = 20$  мм друг от друга так, как показано на рис. 3-10, а. Определить индуктивность шин при низкой частоте.

**Решение.** В данном случае

$$\frac{d}{b+c} = \frac{20}{60} = 0,3333; \quad \frac{b}{c} = \frac{10}{50} = 0,2; \quad \frac{d}{c} = \frac{20}{50} = 0,4;$$

$$\ln \frac{d}{b+c} = -1,099.$$

1. С помощью кривых рис. 3-12 находим  $L = 2,65 \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

2. Применяем формулу (3-64). При  $b/c = 0,2$  из табл. 10-3 находим  $\varepsilon = 0,002$ ; при  $d/c = 0,4$  из табл. 10-5 определяем  $f = 0,278$ .

Искомая индуктивность

$$L = 4 \cdot 10^{-7} (-1,099 + 1,500 + 0,278 - 0,002) = 2,708 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

3. Поскольку  $b/c = 0,2 \ll 1$ , можно применить формулу (3-52).

В данном случае

$$\gamma = \frac{50}{20} = 2,5; \quad \gamma^2 = 6,25; \quad \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2} = \frac{5,25}{12,50} = 0,420;$$

$$\ln(1 + \gamma^2) = 1,981; \quad 0,42 \cdot 1,981 = 0,8320;$$

$$\operatorname{arctg} \gamma = 1,190; \quad \frac{2}{2,5} \cdot 1,190 = 0,9520.$$

Искомая индуктивность

$$L = 4 \cdot 10^{-7} (-1,099 + 0,832 + 0,952) = 2,740 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Значения индуктивности, найденные различными способами, относительно мало отличаются друг от друга.

### 3-6. ИНДУКТИВНОСТЬ ПОЛЫХ ОДНОФАЗНЫХ ШИН КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте индуктивность полых однофазных шин квадратного сечения, расположенных согласно рис. 3-16, может быть определена по формуле

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{b} + 0,541 \right) = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{1,72d}{b}, \quad (3-70)$$

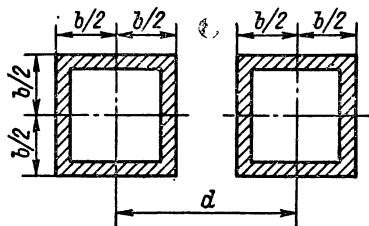


Рис. 3-16

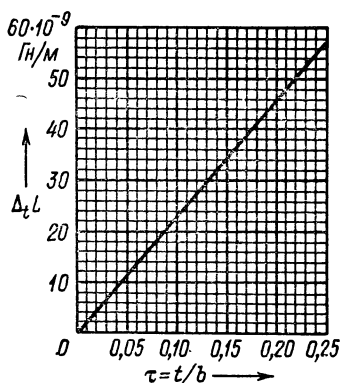


Рис. 3-17

где  $b$  — сторона квадрата, представляющего собой сечение шины;  $d$  — расстояние между центрами сечений.

Более точная формула имеет вид

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ \ln \frac{d}{b} + 0,5413 + \frac{1}{40} \left( \frac{b}{d} \right)^4 - \frac{17}{720} \left( \frac{b}{d} \right)^8 \dots \right]. \quad (3-71)$$

В формулах (3-70) и (3-71) толщина стенки шин  $t$  предполагается равной нулю. Влияние толщины можно учесть, заменив в этих формулах размер  $b$  некоторым другим («эквивалентным») размером  $b_e$ , зависящим от толщины и определяемым по формуле

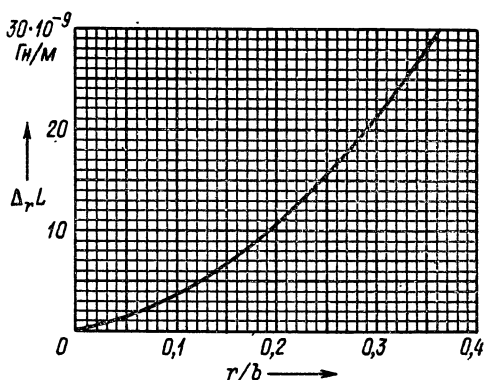


Рис. 3-18

валентным») размером  $b_e$ , зависящим от толщины и определяемым по формуле

$$b_e = b \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{t}{b} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{t}{b} \right) \right]. \quad (3-72)$$

Формула применима при  $t \leq b/3$ .

Другой способ учета толщины стенки заключается в добавлении к величине  $L$ , найденной по формуле (3-70) или (3-71), поправки  $\Delta_t L$ , значения которой даны на рис. 3-17 в зависимости от  $\tau = t/b$ . Более точные значения  $\Delta_t L$  можно найти по формуле

$$\Delta_t L = \frac{\mu_0}{\pi} (0,573\tau - 0,170\tau^3 \dots). \quad (3-73)$$

Если углы шин закруглены, то к величине  $L$  следует прибавить поправку  $\Delta_r L$ , значения которой даны на рис. 3-18

в зависимости от  $r/b$ , где  $r$  — радиус закругления. Более точные значения  $\Delta_r L$  вычисляются по формуле

$$\Delta_r L = \frac{\mu_0}{\pi} \rho^2 \left( -\ln \rho + \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \rho \dots \right), \quad (3-74)$$

где  $\rho = 0,463r/b$ .

2. При весьма высокой частоте индуктивность полых шин может быть найдена по тем же формулам и кривым, что и индуктивность соответствующих сплошных шин, т. е. шин с тем же внешним размером  $b$  поперечного сечения и тем же расстоянием  $d$  между центрами сечений (см. § 3-5, в частности кривую  $b/c = 1$  на рис. 3-14).

### 3-7. ИНДУКТИВНОСТЬ ПОЛЫХ ОДНОФАЗНЫХ ШИН ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В настоящем параграфе рассматриваются полые шины прямоугольного сечения, расположенные согласно рис. 3-19, при произвольном соотношении размеров  $b$  и  $c$  поперечного сечения. Толщина стенки шин  $t$  предполагается малой по сравнению с  $b$  и  $c$  ( $t$  не больше одной трети меньшего из этих размеров).

1. При постоянном токе и низкой частоте индуктивность шин, расположенных согласно рис. 3-19 ( $b \leq c$ ), может быть найдена по кривым рис. 3-20, где значения  $L$  даны в зависимости от  $d/(b+c)$  при различных значениях  $b/c$  для бесконечно тонких шин ( $t = 0$ ).

Аналитический расчет индуктивности бесконечно тонких полых шин (при  $b \leq c$  и при  $b \geq c$ ) можно произвести по формуле

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{g_{12}}{g_1}, \quad (3-75)$$

где  $g_1$  — среднее геометрическое расстояние периметра поперечного сечения шины от самого себя;  $g_{12}$  — среднее геометрическое расстояние периметров поперечных сечений шин друг от друга. Эти величины могут быть найдены по формулам (10-18) и (10-39); для определения  $g_1$  удобна также табл. 10-2.

Индуктивность полых шин конечной толщины ( $t > 0$ ) может быть определена по тем же формулам и кривым, что и при  $t = 0$ , но с заменой размеров  $b$  и  $c$  соответственно «эквивалентны-

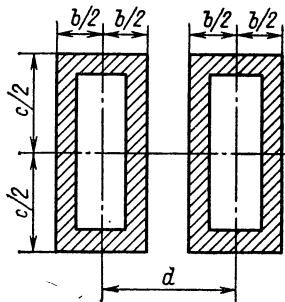


Рис. 3-19

ми» размерами  $b_e$  и  $c_e$ , определяемыми по формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_e &= b \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{t}{b} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{t}{b} \right) \right]; \\ c_e &= c \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{t}{c} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{t}{c} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3-76)$$

2. При весьма высокой частоте индуктивность полых шин может быть найдена по тем же формулам

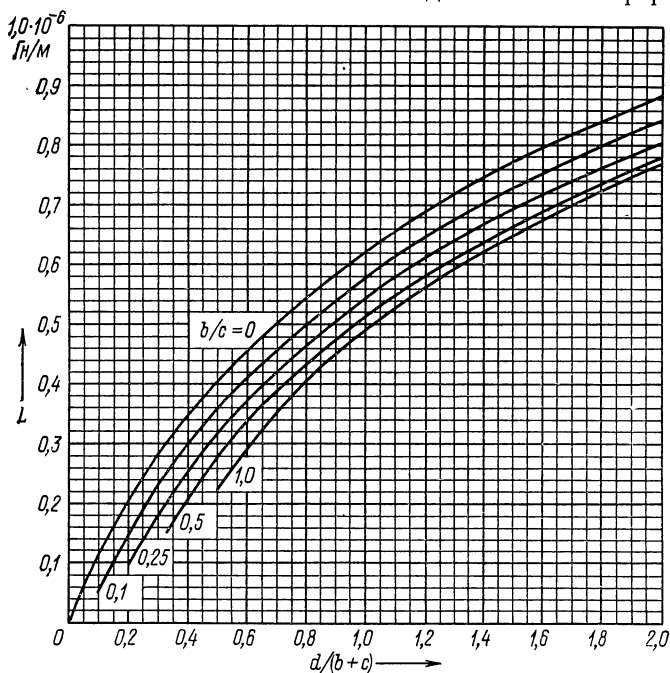


Рис. 3-20

и кривым, что и индуктивность соответствующих сплошных шин с теми же внешними размерами поперечного сечения ( $b$  и  $c$ ) и тем же расстоянием  $d$  между центрами сечений (§ 3-4 и 3-5).

### 3-8. ИНДУКТИВНОСТЬ ОДНОФАЗНОЙ ЛИНИИ С ПРОВОДАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте индуктивность однофазной линии с проводами

эллиптического сечения может быть определена по формуле

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{2d}{a+b} + \frac{1}{4} + \Delta \right), \quad (3-77)$$

где  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллипсов, являющихся поперечными сечениями проводов;  $d$  — расстояние между

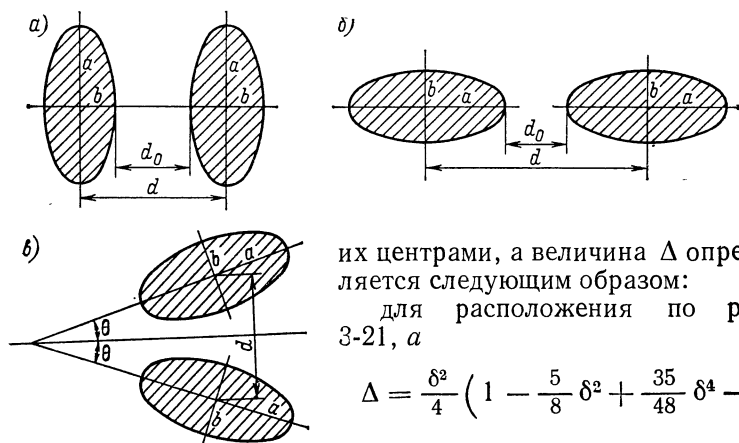


Рис. 3-21

их центрами, а величина  $\Delta$  определяется следующим образом:

для расположения по рис. 3-21, а

$$\Delta = \frac{\delta^2}{4} \left( 1 - \frac{5}{8} \delta^2 + \frac{35}{48} \delta^4 - \frac{147}{178} \delta^6 \dots \right); \quad (3-78)$$

для расположения по рис. 3-21, б

$$\Delta = -\frac{\delta^2}{4} \left( 1 + \frac{5}{8} \delta^2 + \frac{35}{48} \delta^4 + \frac{147}{178} \delta^6 \dots \right); \quad (3-79)$$

для общего случая симметричного расположения (рис. 3-21, в)

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{4} \delta^2 \cos 2\theta - \frac{1}{32} \delta^4 (3 + 2 \cos 4\theta) + \\ & + \frac{5}{192} \delta^6 (6 \cos 2\theta + \cos 6\theta) - \frac{7}{712} \delta^8 \times \\ & \times (10 + 10 \cos 4\theta + \cos 8\theta) \dots, \end{aligned} \quad (3-80)$$

причем  $\delta = q/d$ ;  $q = \sqrt{a^2 - b^2}$ ;  $\theta$  — половина угла между большими осями эллипсов.

Возможность применения формулы (3-77) определяется областью сходимости рядов (3-78), (3-79) и (3-80), зависящей от соотношения между размерами  $a$ ,  $b$  и  $d$  и от угла  $\theta$ . Если  $\delta \leq 1/2$ , то ряд (3-80) сходится достаточно быстро при всех значениях угла  $\theta$  и формула (3-77) применима при всех



видах симметричного взаимного расположения проводов (рис. 3-21, в).

При низкой частоте можно учесть влияние неравномерности распределения тока по сечениям проводов на индуктивность линии, прибавив к значению  $L$ , определенному по формуле (3-77), величину

$$\Delta L_i = - \frac{\mu_0}{\pi} \frac{k^4 a^1}{1536} f(\epsilon), \quad (3-81)$$

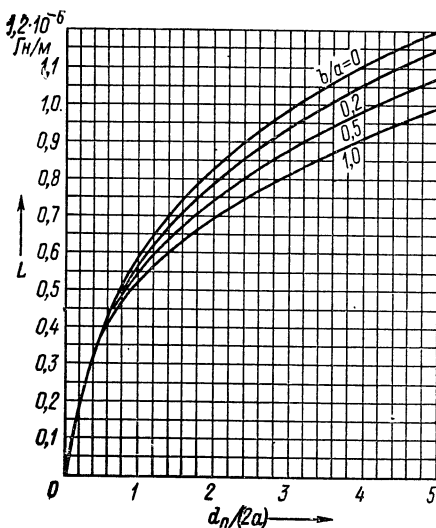


Рис. 3-22

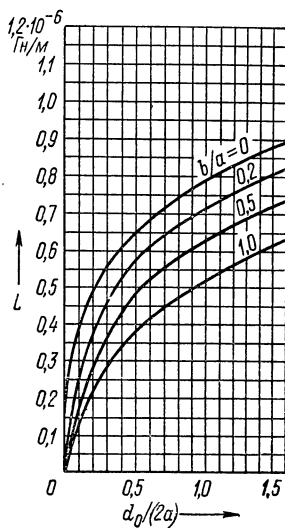


Рис. 3-23

где  $k = \sqrt{\omega \mu_0 \gamma}$ ;  $\epsilon = (a - b)/(a + b)$ ;

$$f(\epsilon) = \frac{(1 - \epsilon)^3 (1 - \epsilon^2/3) (1 + 4\epsilon^2 + \epsilon^4)}{1 + \epsilon}.$$

Формула (3-81) применима при  $k(a + b) < 4$ .

2. При весьма высокой частоте индуктивность линий с проводами, расположенными согласно рис. 3-21,  $a$  и  $b$ , может быть определена по кривым рис. 3-22 и 3-23, на которых значения  $L$  даны в функции от отношения  $d_0/(2a)$  при различных значениях  $\eta = b/a$ .

При  $d/a > 5$  можно пренебречь эффектом близости и пользоваться для определения  $L$  формулами:

для расположения по рис. 3-21,  $a$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \operatorname{Arsh} \frac{d}{q} - \operatorname{Arsh} \frac{b}{q} \right); \quad (3-82)$$

для расположения по рис. 3-21, б

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \text{Arch} \frac{d}{q} - \text{Arch} \frac{a}{q} \right), \quad (3-83)$$

где  $q = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Внутренняя индуктивность линии может быть учтена прибавлением к величине  $L$ , найденной, как указано выше, величины  $2L_i$ , где  $L_i$  при пренебрежении эффектом близости определяется формулой

$$L_i = \frac{1}{\pi^2 a} \sqrt{\frac{\mu_0}{2\omega\gamma}} K,$$

$K$  — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем, равным  $\sqrt{1 - b^2/a^2}$ .

### 3-9. ИНДУКТИВНОСТЬ ОДНОФАЗНОЙ ЛИНИИ С ПРОВОДАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте индуктивность однофазной линии с проводами произвольного поперечного сечения (рис. 3-24, а, б) определяется по формуле

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{g_{AB}}{g_A g_B}, \quad (3-84)$$

где  $g_A$  и  $g_B$  — соответственно средние геометрические расстояния площадей  $s_A$  и  $s_B$  поперечных сечений проводов от самих себя;  $g_{AB}$  — среднее геометрическое расстояние этих площадей друг от друга (о методах, формулах и таблицах для определения этих величин см. в § 1-8, 10-2 и 10-3).

В частности, если прямой и обратный провода одинаковы, то  $g_A = g_B$  и

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{g_{AB}}{g_A}. \quad (3-85)$$

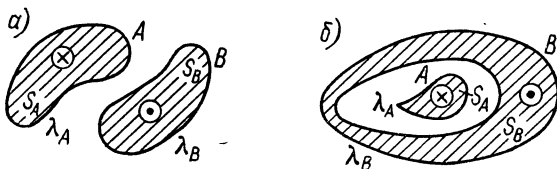


Рис. 3-24

2. Определение индуктивности линии при весьма высокой частоте при сложной форме сечения проводов связано со значительными трудностями.

Если форма сечений и расположение проводов таковы, что ток можно считать распределенным по периметрам поперечных сечений равномерно, то индуктивность при весьма высокой частоте можно определить по формуле (3-84), понимая в ней под  $g_A$ ,  $g_B$  и  $g_{AB}$  средние геометрические расстояния не площадей  $S_A$  и  $S_B$ , а периметров  $\lambda_A$  и  $\lambda_B$  поперечных сечений от самих себя и друг от друга (см. § 1-8, 10-2 и 10-3). При этом для проводов, расположенных один внутри другого (рис. 3-24, б), под  $\lambda_A$  следует понимать внешний периметр сечения внутреннего провода и под  $\lambda_B$  — внутренний периметр сечения внешнего провода. Более точный результат может быть получен путем замены в формуле (3-84) средних геометрических расстояний  $g_A$  и  $g_B$  периметров  $\lambda_A$  и  $\lambda_B$  соответствующими величинами  $\tilde{g}_A$  и  $\tilde{g}_B$ , учитывающими истинный характер распределения тока по поверхностям проводов (§ 1-5).

Если известно выражение для емкости  $C$  между проводами линии с рассматриваемым поперечным сечением, то индуктивность линии при весьма высокой частоте можно определить из формулы

$$LC = \mu\epsilon, \quad (3-86)$$

где  $\epsilon$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей провода.

При желании учесть магнитные потоки внутри проводов линии надо к значению  $L$ , определенному, как указано выше, прибавить сумму внутренних индуктивностей самих проводов линии ( $L_{Ai}$  и  $L_{Bi}$ ). При определении индуктивностей  $L_{Ai}$  и  $L_{Bi}$  следует руководствоваться указаниями, данными в § 1-15.

О других методах расчета см. в § 1-17 и 1-18.

### 3-10. ИНДУКТИВНОСТЬ МНОГОВОДНОЙ ОДНОФАЗНОЙ ЛИНИИ

Если однофазная линия состоит из нескольких проводов, соединенных между собой параллельно, то совокупность всех проводов с токами одинакового направления можно рассматривать как один провод со сложной формой поперечного сечения. Например, для системы из пяти проводов, сечения которых показаны на рис. 3-25, совокупность про-

водов 1, 2 и 3 можно рассматривать как один сложный провод, а совокупность проводов 4 и 5 — как другой провод.

1. Для нахождения индуктивности линии при постоянном токе и низкой частоте можно пользоваться формулой (3-84):

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{g_{AB}^2}{g_A g_B}, \quad (3-87)$$

определяя средние геометрические расстояния  $g_A$ ,  $g_B$  и  $g_{AB}$  по формулам (10-1) и (10-2), причем под  $s_A$  следует понимать сумму площадей поперечных сечений всех прямых проводов, а под  $s_B$  — сумму площадей поперечных сечений всех обратных проводов (например, для рис. 3-25  $s_A = s_1 + s_2 + s_3$ ;  $s_B = s_4 + s_5$ ). Предполагается, что плотность тока одинакова для всех частей каждого из рассматриваемых сложных проводов.

В большинстве случаев прямой и обратный провода одинаковы, и тогда вместо формулы (3-84) следует применять более простую формулу (3-85):

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{g_{AB}}{g_A}. \quad (3-88)$$

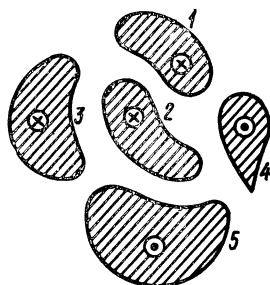


Рис. 3-25

Если все провода одинаковы, то индуктивность системы можно найти по формуле

$$L = \frac{4\mu_0}{\pi n^2} \ln \frac{\Pi_1}{g_1^{n/2} \Pi_2}, \quad (3-89)$$

где  $n$  — общее число прямых и обратных проводов;  $g_1$  — среднее геометрическое расстояние площади поперечного сечения одного провода от самой себя;  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — произведения средних геометрических расстояний площадей поперечных сечений отдельных проводов друг от друга, причем в  $\Pi_1$  входят все расстояния для проводов с токами противоположного направления, а в  $\Pi_2$  — все расстояния для проводов с токами одного направления.

Распространенным видом многопроводной линии является линия с расщепленными проводами, простейшие варианты которой изображены на рис. 3-26.

Для рис. 3-26, а

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d \sqrt{d^2 - \Delta^2}}{\rho \Delta} + \frac{1}{4} \right), \quad (3-90)$$

а для рис. 3-26, б

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d \sqrt{d^2 + \Delta^2}}{\rho \Delta} + \frac{1}{4} \right), \quad (3-91)$$

где  $d$  — расстояние между центрами сечений прямого и обратного «проводов»;  $\Delta$  — расстояние между двумя проводами с токами одного направления, а  $\rho$  — радиус отдельного провода.

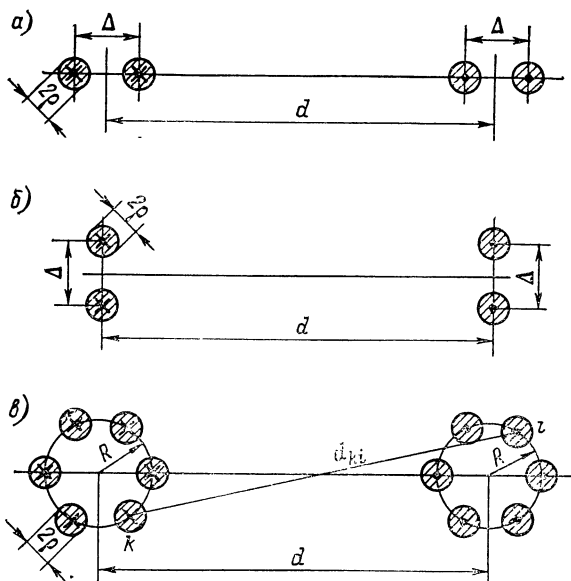


Рис. 3-26

При  $\Delta \ll d$  обе формулы упрощаются:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d^2}{\rho \Delta} + \frac{1}{4} \right), \quad (3-92)$$

Для рис. 3-26, в

$$L = \frac{\mu_0}{\pi m} \left[ \frac{1}{m} \ln \Pi_1 - (m-1) \ln R - \ln m\rho + \frac{1}{4} \right], \quad (3-93)$$

где  $m$  — общее число проводов с токами одного направления;  $\rho$  — радиус отдельного провода;  $R$  — радиус окружностей, на которых расположены центры поперечных сечений отдельных проводов;  $\Pi_1$  — произведение всех расстояний  $d_{ki}$  между центрами поперечных сечений проводов с токами противоположного направления.

Обычно радиус  $R$  существенно меньше расстояния  $d$  между центрами поперечных сечений прямого и обратного «проводов»; при этом

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{R} + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mr} + \frac{1}{4m} \right). \quad (3-94)$$

Аналогичны формулы справедливы для многопроводных линий с полыми проводниками кругового сечения. В этом случае вместо формул (3-92) и (3-94) следует пользоваться формулами:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d^2}{cr\Delta} \quad (3-95)$$

и

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{R} + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mcr} \right), \quad (3-96)$$

где  $c$  — коэффициент, значения которого даны в табл. 10-1 в зависимости от отношения внутреннего радиуса  $q$  к внешнему радиусу  $r$ .

2. Расчет индуктивности многопроводной линии при высокой и весьма высокой частоте значительно сложнее, чем при низкой частоте.

Если форма поперечных сечений отдельных проводов и их взаимное расположение позволяют сделать предположение о равномерном распределении тока по периметрам сечений проводов, то расчет индуктивности многопроводной линии при весьма высокой частоте можно производить по формулам (3-87) и (3-88) так, как указано в § 3-9, п. 2. При этом под  $\lambda_A$  следует понимать сумму периметров поперечных сечений всех прямых проводов, а под  $\lambda_B$  — то же для обратных проводов, в соответствии с чем величины  $g_A$ ,  $g_B$  и  $g_{AB}$  должны быть определены так, как указано в § 10-2.

Следует, однако, иметь в виду, что для многопроводных линий предположение о равномерности распределения тока весьма высокой частоты по поверхностям проводов может быть принято даже в качестве первого приближения лишь в тех случаях, когда отдельные провода линии расположены достаточно далеко друг от друга. Поэтому указанным путем, как правило, можно получить лишь приближенное значение индуктивности многопроводной линии при весьма высокой частоте.

3. При любой частоте и для проводов из любого материала индуктивности многопроводных линий (линий

с расщепленными проводами), изображенных на рис. 3-26, а и б, при  $\Delta \ll d$  могут быть найдены по формуле

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d^2}{r\Delta} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} \right), \quad (3-97)$$

а индуктивность линии, изображенной на рис. 3-26, в, при  $R \ll d$  — по формуле

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{R} + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mr} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4m} \right), \quad (3-98)$$

где  $\xi$  — коэффициент, учитывающий поверхностный эффект в проводах. Значения  $\xi$  можно определить по табл. 2-1 или по формулам § 2-2. Формулы (3-97) и (3-98) не учитывают эффекта близости и искажения магнитного поля, вызванного наличием соседних проводов с абсолютной магнитной проницаемостью, отличной от  $\mu_0$ .

Для линий с полыми проводами кругового сечения при тех же условиях следует пользоваться формулами:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d^2}{r\Delta} + L_i; \quad (3-99)$$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{R} + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mr} \right) + \frac{2}{m} L_i, \quad (3-100)$$

где  $r$  — внешний радиус провода;  $L_i$  — его внутренняя индуктивность на единицу длины, определяемая путем деления на  $l$  выражений, данных в § 2-3, п. 3.

### 3-11. ИНДУКТИВНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ОДНОФАЗНЫХ ШИН ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В энергетических установках на большие токи находят применение шинопроводы, состоящие из нескольких параллельно соединенных шин прямоугольного сечения, обычно собираемых в *пакеты* (рис. 3-27). Индуктивность таких шинопроводов может быть найдена так, как указано в предыдущем параграфе (см. также пример 3-5).

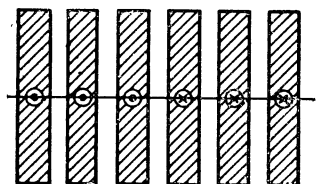


Рис. 3-27

Иногда с целью уменьшения общей индуктивности шинопровода применяют *шихтованные* пакеты шин — пакеты, у которых шины с токами прямого и обратного направления чередуются (рис. 3-28).

Ниже даны формулы и кривые для расчета индуктивностей таких пакетов, причем различаются два случая: шины весьма малой толщины, рассматриваемые при расчете как бесконечно тонкие ленты (рис. 3-28, а, в), и шины конечной толщины (рис. 3-28, б, г). В каждом из этих случаев рассматриваются пакеты с весьма большим (теоретически бесконечно большим) числом шин и пакеты с конечным числом шин. Во всех случаях расстояния между соседними шинами (лентами) считаются одинаковыми.

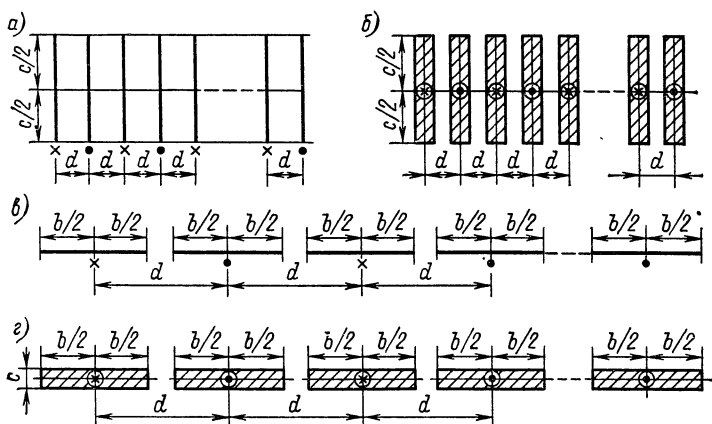


Рис. 3-28

**1. Шихтованный пакет с бесконечно большим числом лент (рис. 3-28, а, в;  $n = \infty$ ).**

1) При постоянном токе и низкой частоте индуктивность одной ленты шихтованного пакета с бесконечно большим числом лент может быть найдена из рис. 3-29 по кривой  $b/c = 0$  для расположения согласно рис. 3-28, а и по кривой  $c/b = 0$  для расположения согласно рис. 3-28, в ( $d$  — расстояние между центрами поперечных сечений лент,  $b$  и  $c$  — размеры сечений).

Для аналитического расчета индуктивности шин, расположенных согласно рис. 3-28, а, может служить формула

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{2d}{\pi c} + \frac{3}{2} + 2(f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \dots) \right], \quad (3-101)$$

где  $d$  — расстояние между соседними лентами;  $c$  — их высота, а величины  $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$  — поправки, учитывающие



отличие среднего геометрического расстояния между сечениями лент от расстояния между их центрами; эти величины должны быть взяты из первой графы табл. 10-5 при аргументах, равных  $c/d$ ,  $c/(2d)$ , ...,  $c/(md)$ , ... или соответственно

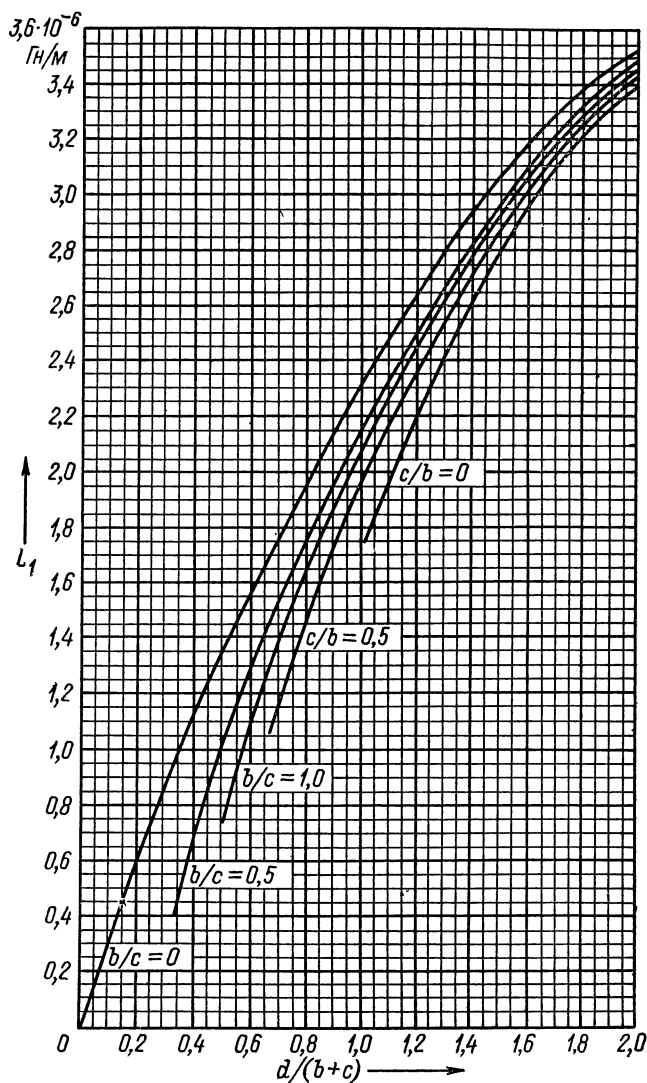


Рис. 3-29

$d/c, 2d/c, \dots, md/c, \dots$  (в зависимости от того, какие из этих отношений меньше единицы).

Для рис. 3-28, в аналогичная формула имеет вид

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{2d}{\pi b} + \frac{3}{2} + 2(f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \dots) \right], \quad (3-102)$$

где  $d$  — расстояние между центрами сечений соседних лент;  
 $b$  — их ширина, а поправки  $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$ , имеющие тот же

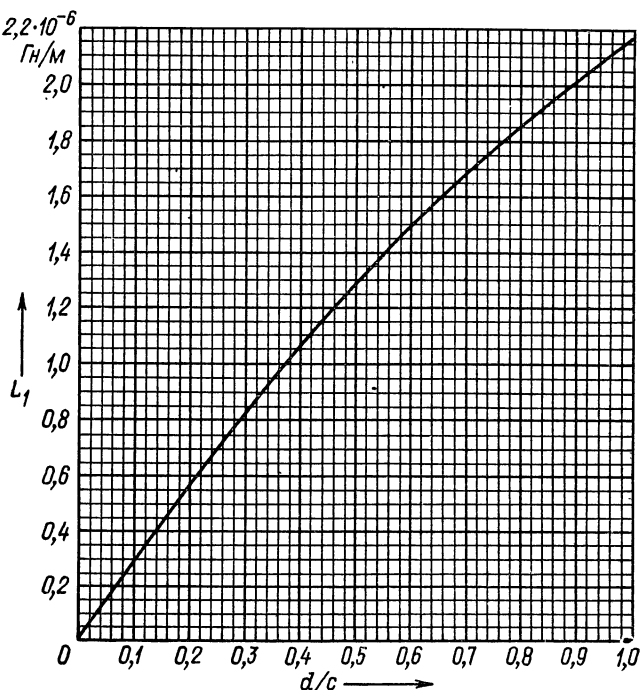


Рис. 3-30

смысл, что и в предыдущей формуле, должны быть взяты из первой графы табл. 10-4 при аргументах, равных соответственно  $b/d, b/(2d), \dots, b/(md), \dots$

2) При весьма высокой частоте индуктивность  $L_1$  одной ленты пакета может быть найдена для расположения согласно рис. 3-28, а по кривой рис. 3-30, а также и по простой формуле

$$L_1 = \frac{\pi \mu_0}{8} \frac{1}{\ln 2 + \frac{\pi}{2} \frac{c}{d}}, \quad (3-103)$$

применимой вплоть до  $d/c = 2,5$ .

Точная формула для  $L_1$  имеет вид

$$L_1 = \frac{\mu_0}{4} \frac{K}{K'}, \quad (3-104)$$

где  $K$  и  $K'$  — полные эллиптические интегралы первого рода с модулями  $k$  и  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ , определяемыми для рис. 3-28, а по формулам:

$$k = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi c}{2d}}; \quad k' = \operatorname{th} \frac{\pi c}{2d},$$

а для рис. 3-28, в — по формулам:

$$k = \cos \frac{\pi}{2} \frac{b}{d}; \quad k' = \sin \frac{\pi}{2} \frac{b}{d}.$$

Отношение  $K/K'$  можно найти по таблице приложения 4 или по приближенной формуле

$$\frac{K'}{K} = \frac{2}{\pi} \left[ \ln \frac{4}{k} - \frac{k^2}{4} \left( 1 + \frac{13}{32} k^2 \right) \right], \quad (3-105)$$

применимой при  $k^2 \leq 1/2$  (при  $k^2 \geq 1/2$  эта же формула после замены  $k^2$  на  $k'^2$  дает обратное отношение  $K/K'$ ); при  $k^2 \leq 0,2$  формула (3-105) может быть заменена более простой:

$$\frac{K'}{K} = \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{4}{k} - \frac{k^2}{4} \right). \quad (3-106)$$

## 2. Шихтованный пакет с конечным числом лент (рис. 3-28, а, в).

1) При постоянном токе и низкой частоте индуктивность шихтованного пакета с конечным числом лент  $n$  (рис. 3-28, а, в) может быть приближенно определена делением индуктивности  $L_1$  одной ленты бесконечного пакета на  $n/2$ , т. е. на число лент с током одного направления:

$$L = \frac{2}{n} L_1; \quad (3-107)$$

при этом  $L_1$  определяется так, как указано в подпункте 1) пункта 1 настоящего параграфа. Погрешность расчета по формуле (3-107) уменьшается с увеличением числа лент  $n$ .

Точное значение индуктивности  $L$  определяется по формуле

$$L = \frac{4\mu_0}{\pi n^2} \ln \frac{g_{1n}^1 g_{3n}^3 g_{5n}^5 \cdots g_{n-1,n}^{n-1}}{g_1^{n/2} g_{2n}^2 g_{4n}^4 \cdots g_{n-2,n}^{n-2}}, \quad (3-108)$$

где  $n$  — общее число лент пакета;  $g_1$  — среднее геометрическое расстояние площади поперечного сечения одной ленты от самой себя;  $g_{kn}$  — среднее геометрическое расстояние между площадями поперечных сечений лент  $k$  и  $n$ . Средние геометрические расстояния  $g_1$  и  $g_{kn}$  определяются по формулам и таблицам § 10-3, причем поперечные сечения лент рассматриваются как прямолинейные отрезки длиной  $c$  для рис. 3-28,  $a$  и длиной  $b$  для рис. 3-28,  $b$ .

Среднее значение индуктивности  $L_1$  одной ленты пакета получается умножением общей индуктивности пакета  $L$  на число лент  $n/2$  с током одного направления.

2) При весьма высокой частоте индуктивность  $L$  шихтованного пакета лент с конечным числом лент  $n$  (рис. 3-28,  $a$ ,  $b$ ) может быть приближенно определена по формуле (3-107), в которой теперь под  $L_1$  следует понимать индуктивность одной ленты, определяемую так, как указано в подпункте 2) пункта 1 настоящего параграфа, т. е. индуктивность одной ленты при весьма высокой частоте в случае, когда пакет имеет бесконечное число лент. Погрешность расчета уменьшается с увеличением числа лент  $n$ .

Краевой эффект, вызываемый конечностью числа лент, можно приближенно учесть, приняв поправочный коэффициент  $\chi$ , учитывающий этот эффект, не зависящим от частоты. Тогда более точное значение индуктивности  $L$  при весьма высокой частоте получится умножением приближенного значения, найденного указанным способом, на коэффициент  $\chi$ , определенный как отношение индуктивностей того же пакета, рассчитанных по формулам (3-108) и (3-107) для постоянного тока.

**3. Шихтованный пакет с бесконечно большим числом шин конечной толщины (рис. 3-28,  $b$ ,  $z$ ;  $n = \infty$ ).**

1) При постоянном токе и низкой частоте индуктивность  $L_1$  одной шины шихтованного пакета с бесконечно большим числом шин конечной толщины может быть найдена по кривым рис. 3-29, на котором величина  $L_1$  дана в зависимости от  $d/(b+c)$  при различных значениях  $b/c$  ( $d$  — расстояние между центрами поперечных сечений соседних шин,  $b$  и  $c$  — размеры сечений).

Для аналитического расчета может служить формула

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{2d}{\pi(b+c)} + \frac{3}{2} - \varepsilon + 2(f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \dots) \right], \quad (3-109)$$

где  $\varepsilon$  — величина, определяемая по табл. 10-3, а  $f_1, f_2, \dots, \dots, f_m, \dots$  — поправки, учитывающие отличие среднего

геометрического расстояния между площадями поперечных сечений шин от расстояния между их центрами; если  $b \geq c$ , то эти величины должны быть найдены по табл. 10-4 при значениях аргумента, равных соответственно  $b/d$ ,  $b/(2d)$ , ...,  $b/(md)$ , ...; если  $b \leq c$ , то поправки  $f_m$  должны быть найдены по табл. 10-5 при аргументах, равных  $c/d$ ,  $c/(2d)$ , ...,  $c/(md)$ , ... или соответственно  $d/c$ ,  $2d/c$ , ...,  $md/c$  ... (в зависимости от того, какие из этих отношений меньше единицы).

2) При весьма высокой частоте индуктивность  $L_1$  одной шины шихтованного пакета с бесконечно большим числом шин конечной толщины  $b \leq c$  (рис. 3-28, б) может быть определена по кривым рис. 3-31, на котором величина  $L_1$  дана в зависимости от  $d_0/c$  при различных значениях  $b/c$  ( $b$  и  $c$  — размеры поперечного сечения шин,  $d_0$  — расстояние между ближайшими друг к другу поверхностями соседних шин).

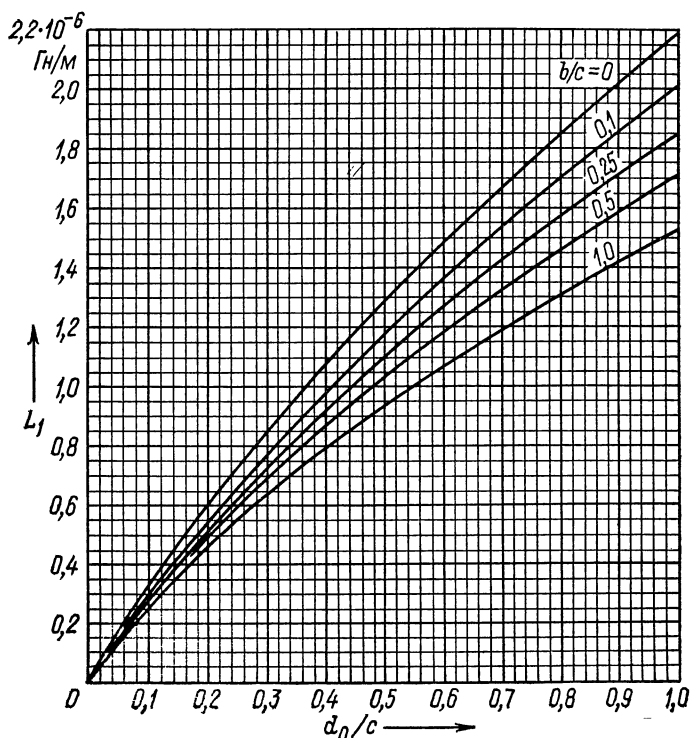


Рис. 3-31

Для аналитического расчета при  $b \leq c$  и  $d_0 \leq c$  может служить формула

$$L_1 = \frac{\mu_0}{4 \left\{ \frac{1}{\delta} + \frac{2}{\pi} \left[ \left( 1 + \frac{\eta}{2\delta} \right) \ln \left( 1 + \frac{2\delta}{\eta} \right) + \ln \frac{\eta}{\delta} \right] \right\}} = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{\delta}{\pi + (2\delta + \eta) \ln \left( 1 + \frac{2\delta}{\eta} \right) + 2\delta \ln \frac{\eta}{\delta}}, \quad (3-110)$$

где  $\delta = d_0/c$ ;  $\eta = b/c$ .

При желании учесть магнитные потоки внутри шин к величине  $L_1$ , найденной одним из указанных способов, следует прибавить внутреннюю индуктивность шины

$$L_{1i} = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}} \Phi, \quad (3-111)$$

где

$$\Phi = \frac{1 + \frac{2}{\pi} \delta \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\eta}{\delta} \right) \ln \left( 1 + \frac{2\delta}{\eta} \right) + 1 \right]}{\left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \delta \left[ \left( 1 + \frac{\eta}{2\delta} \right) \ln \left( 1 + \frac{2\delta}{\eta} \right) + \ln \frac{\eta}{\delta} \right] \right\}^2},$$

а прочие обозначения те же, что в формуле (3-110).

При  $\delta \ll 1$  (для близко расположенных шин) можно положить в формуле (3-111)  $\Phi = 1$ .

При значительном расстоянии между шинами ( $\delta$  близко к единице) можно пренебречь влиянием соседних шин и определять  $L_{1i}$  как для уединенного провода прямоугольного сечения (§ 2-7).

**4. Шихтованный пакет с конечным числом шин конечной толщины (рис. 3-28, б, г).**

1) При постоянном токе и низкой частоте индуктивность  $L$  шихтованного пакета с конечным числом  $n$  шин конечной толщины (рис. 3-27, в, г) может быть приближенно определена делением индуктивности одной шины пакета с бесконечным числом шин на  $n/2$ , т. е. на число шин с током одного направления:

$$L = \frac{2}{n} L_1; \quad (3-112)$$

при этом  $L_1$  определяется так, как указано в подпункте 1) пункта 3 настоящего параграфа. Погрешность расчета по формуле (3-112) уменьшается с увеличением числа шин  $n$ .

Точное значение индуктивности  $L$  может быть найдено по формуле (3-108), в которой для шин конечной толщины

под  $g_i$  и  $g_{kn}$  следует понимать собственные и взаимные средние геометрические расстояния не отрезков (как для лент), а площадей прямоугольников, являющихся поперечными сечениями шин (эти величины определяются по формулам и таблицам § 10-3).

2) При весьма высокой частоте индуктивность  $L$  шихтованного пакета с конечным числом  $n$  шин конечной толщины  $b \ll c$  (рис. 3-27, б) может быть приближенно определена по формуле (3-112), в которой теперь под  $L_1$  следует понимать индуктивность одной шины пакета с бесконечным числом шин при весьма высокой частоте, определяемую так, как указано в подпункте 2) пункта 3 настоящего параграфа. Погрешность расчета уменьшается с увеличением числа шин  $n$ .

Краевой эффект, вызываемый конечностью числа шин, можно приближенно учесть, приняв поправочный коэффициент  $\chi$ , учитывающий этот эффект, не зависящим от частоты. Тогда более точное значение индуктивности  $L$  при весьма высокой частоте получится умножением приближенного значения, найденного указанным способом, на коэффициент  $\chi$ , определенный как отношение индуктивностей того же пакета, рассчитанных по формулам (3-108) и (3-112) для постоянного тока.

**Пример 3-5.** Шинопровод (рис. 3-32) состоит из четырех медных шин прямоугольного сечения, соединенных так, что две шины (1 и 2 на рис. 3-32) образуют прямой провод, а две другие шины (3 и 4) — обратный провод. Размеры шин и расстояния между ними в миллиметрах даны на рисунке. Определить индуктивность линии при низкой частоте.

**Решение.** Для определения индуктивности линии применяем формулу (3-87), рассматривая шины 1 и 2 как один прямой провод  $A$ , шины 3 и 4 — как обратный провод  $B$ . Средние геометрические расстояния  $g_A = g_B$  и  $g_{AB}$  находим по формулам (10-1) и (10-2), которые применительно к определению средних геометрических расстояний принимают вид

$$(s_1 + s_2)^2 \ln g_A = s_1^2 \ln g_1 + s_2^2 \ln g_2 + 2s_1 s_2 \ln \varepsilon_{12};$$

$$(s_1 + s_2)(s_3 + s_4) \ln g_{AB} = s_1 s_3 \ln g_{13} + s_1 s_4 \ln g_{14} + \\ + s_2 s_3 \ln g_{23} + s_2 s_4 \ln g_{24}.$$

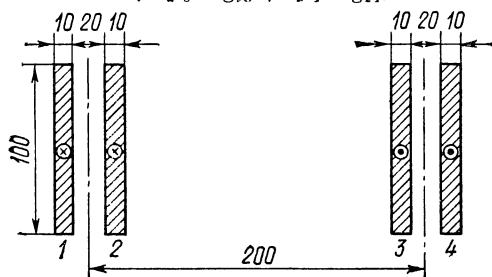


Рис. 3-32

где  $s_1, s_2$  и т. д. — площади поперечных сечений шин;  $g_1, g_2, g_{12}, g_{13}$  и т. д. — средние геометрические расстояния этих площадей от самих себя и друг от друга. В данном случае  $s_1 = s_2 = s_3 = s_4, g_1 = g_2, g_{13} = g_{24}$ , и мы получаем

$$\ln g_A = \frac{1}{2} (\ln g_1 + \ln g_{12}); \quad \ln g_{AB} = \frac{1}{4} (\ln g_{14} + 2 \ln g_{13} + \ln g_{23}).$$

Величину  $\ln g_1$  определяем по формуле (10-21), взяв значение  $\epsilon$  из табл. 10-3:

$$\ln g_1 = \ln(10 + 1) - 1,5 + 0,002 = 2,398 - 1,500 + 0,002 = 0,900.$$

Средние геометрические расстояния  $g_{12}, g_{13}, g_{23}, g_{14}$  определяем по формуле (10-44), находя значения  $f$  по табл. 10-5. Результаты расчета сводим в табл. 3-2.

Таблица 3-2. Числовые данные к примеру 3-5

Номер шины	$d$ , см	$\ln d$	$c/d$	$b/c$	$f$	$\ln g$
1; 2	3	1,099	3,3333	0,1	0,4003	1,499
1; 3	20	2,996	0,5000	0,1	0,0197	3,016
1; 4	23	3,135	0,4348	0,1	0,0152	3,150
2; 3	17	2,833	0,5882	0,1	0,0245	2,858

Подставляя найденные значения логарифмов в формулы для  $\ln g_A$  и  $\ln g_{AB}$ , имеем

$$\ln g_A = \frac{1}{2} (0,900 + 1,499) = 1,200;$$

$$\ln g_{AB} = \frac{1}{4} (3,150 + 2 \cdot 3,016 + 2,858) = 3,010.$$

Искомая индуктивность по формуле (3-87)

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{g_{AB}}{g_A} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} (3,010 - 1,200) = 7,240 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

**Пример 3-6.** Пакет медных шин прямоугольного сечения состоит из 10 одинаковых шин (пяти прямых и пяти обратных), расположенных так, как показано на рис. 3-28, б. Ширина шин  $b = 1$  см, высота  $c = 10$  см, расстояние между соседними шинами  $d_0 = 1$  см. Найти индуктивность пакета при низкой частоте.

**Решение.** Применяем формулу (3-108). В данном случае  $n = 10, b/c = 0,1$ . Величину  $\ln g_1$  определяем по формуле (10-21) и табл. 10-3. При  $b/c = 0,1$  из табл. 10-3 находим  $\epsilon = 0,0021$ , и, следовательно,  $\ln g_1 = \ln(10 + 1) - 1,5 + 0,0021 = 0,9000$ . Логарифмы всех других средних геометрических расстояний находим по формуле (10-44) и табл. 10-5. Результаты расчета сводим в табл. 3-3.

Подставляя найденные значения логарифмов в (3-108), получаем

$$L = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi \cdot 10^2} (2,915 + 3 \cdot 2,678 + 5 \cdot 2,373 + 7 \cdot 1,953 + \\ + 9 \cdot 1,304 - 5 \cdot 0,900 - 2 \cdot 2,803 - 4 \cdot 2,536 - 6 \cdot 2,182 - \\ - 8 \cdot 1,669) = 2,459 \cdot 10^{-8} \text{ Гн/м.}$$



Таблица 3-3. Числовые данные к примеру 3-6

Номер шины	$d$ , см	$\ln d$	$c/d$	$d/c$	$f$	$\ln g_{kn}$
1; 10	18	2,8904	0,5556	—	0,0242	2,915
3; 10	14	2,6391	0,7143	—	0,0386	2,678
5; 10	10	2,3026	1	—	0,0702	2,373
7; 10	6	1,7918	—	0,6	0,1607	1,953
9; 10	2	0,6931	—	0,2	0,6105	1,304
2; 10	16	2,7726	0,6250	—	0,0301	2,803
4; 10	12	2,4849	0,8333	—	0,0510	2,536
6; 10	8	2,0794	—	0,8	0,1023	2,182
8; 10	4	1,3863	—	0,4	0,2826	1,669

### 3-12. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОДНОФАЗНЫХ ЛИНИЙ С ПРОВОДАМИ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

При низкой частоте взаимная индуктивность двух параллельных однофазных линий со сплошными или полыми проводами кругового поперечного сечения может быть найдена по формуле

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13}d_{24}}{d_{14}d_{23}}, \quad (3-113)$$

где  $d_{ki}$  — расстояние между центрами сечений  $k$ -го и  $i$ -го проводов, причем цифры 1 и 2 относятся к проводам одной линии, а цифры 3 и 4 — к проводам другой линии (рис. 3-33). Если пренебречь эффектом близости, а также искажением магнитного поля, вызванным наличием соседних проводов с абсолютной магнитной проницаемостью, отличной от  $\mu_0$ , то приведенной формулой можно пользоваться при переменном токе любой частоты и для линий с проводами из любых материалов. Влияние обоих указанных факторов обычно весьма мало и может привести к ощутительной погрешности лишь для линий, весьма близко расположенных друг к другу.

Ч а с т н ы е с л у ч а и.

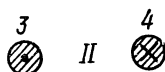
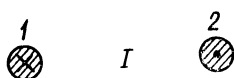


Рис. 3-33

а) Линии имеют общую ось симметрии (рис. 3-34, а);

$$d_{23} = d_{14}, \quad d_{24} = d_{13};$$

$$M = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d_{13}}{d_{14}}. \quad (3-114)$$

б) Линии одинаковы и расположены симметрично (рис. 3-34, б):

$$d_{23} = d_{14} = h, d_{24} = d_{13} = \sqrt{h^2 + d^2};$$

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{h^2 + d^2}{h^2}. \quad (3-115)$$

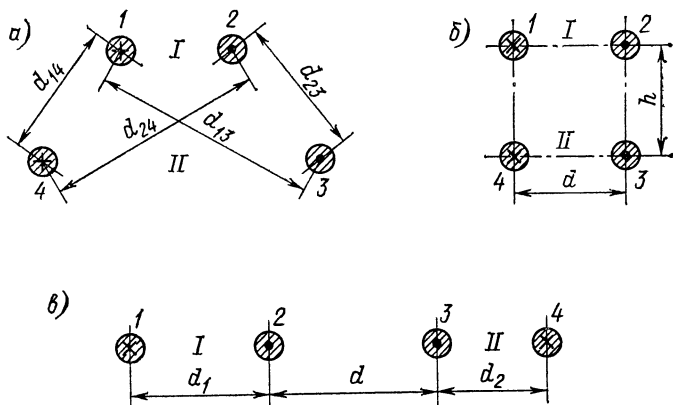


Рис. 3-34

в) Линии расположены в одной плоскости (рис. 3-34, в):

$$d_{14} = d + d_1 + d_2, d_{23} = d, d_{13} = d + d_1, d_{24} = d + d_2;$$

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{(d + d_1)(d + d_2)}{d(d + d_1 + d_2)}. \quad (3-116)$$

При значительном расстоянии между линиями все четыре расстояния  $d_{13}$ ,  $d_{14}$ ,  $d_{23}$ ,  $d_{24}$ , входящие в формулу (3-113), близки друг к другу, величина, стоящая под знаком логарифма, близка к единице и расчет по этой формуле весьма неудобен. В подобных случаях для линий, лежащих в параллельных плоскостях (рис. 3-35, а), удобна следующая приближенная формула:

$$M = \frac{2\mu_0}{\pi} \eta \xi [\cos 2\alpha + (\eta^2 + \xi^2)(2 \cos^2 2\alpha - 1)], \quad (3-117)$$

где  $\eta = b/d_0$ ;  $\xi = c/d_0$ . В частности, для линий, лежащих в одной плоскости ( $\alpha = 0$ ),

$$M = \frac{2\mu_0}{\pi} \eta \xi (1 + \eta^2 + \xi^2). \quad (3-118)$$

Для линий, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 3-35, б), можно пользоваться следующей приближенной формулой:

$$M = \frac{4\mu_0}{\pi} \frac{\eta\xi \cos \alpha \sin \alpha}{(1 + \eta^2 + \xi^2)^2} \left[ 1 + \frac{4(\eta^2 \cos^2 \alpha + \xi^2 \sin^2 \alpha)}{(1 + \eta^2 + \xi^2)^2} \right]. \quad (3-119)$$

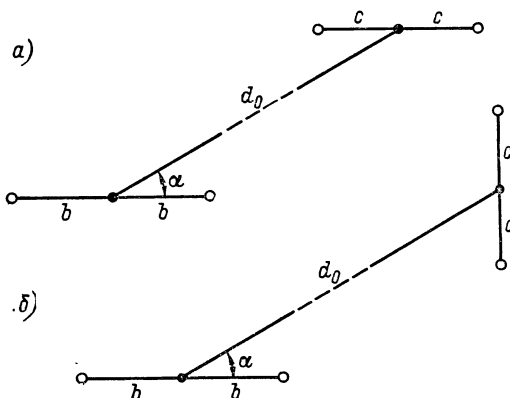


Рис. 3-35

Если  $b \ll d_0$  и  $c \ll d_0$ , то величинами  $\eta^2$  и  $\xi^2$  можно пренебречь по сравнению с единицей, и тогда вместо формул (3-117), (3-118) и (3-119) получим соответственно:

$$M = \frac{2\mu_0}{\pi} \frac{bc}{d_0^2} \cos 2\alpha; \quad (3-120)$$

$$M = \frac{2\mu_0}{\pi} \frac{bc}{d_0^2}; \quad (3-121)$$

$$M = \frac{2\mu_0}{\pi} \frac{bc}{d_0^2} \sin 2\alpha. \quad (3-122)$$

Последние формулы при больших расстояниях между линиями дают достаточную для практики степень точности и весьма удобны для расчета.

О расчете взаимных индуктивностей в более сложных случаях см. в § 3-13 и 3-14.

**Пример 3-7.** Две двухпроводные однофазные линии расположены в одной плоскости так, как показано на рис. 3-36. Определить взаимную индуктивность линий.

**Решение.** Применяем формулу (3-116). В данном случае  $d_1 = d_2 = 1$  м,  $d = 4$  м и

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \ln \frac{(4+1)(4+1)}{4(4+1+1)} = 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{25}{24} = 8,16 \cdot 10^{-9} \text{ Гн/м.}$$

Так как  $d_1 = d_2 \ll d$ , то можно применить и формулу (3-118). В данном случае

$$d_0 = 5 \text{ м}; \quad b = c = 0,5 \text{ м}; \quad \eta = \xi = 0,5/5 = 0,1;$$

$$M = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot 10^{-2} (1 + 2 \cdot 10^{-2}) = 8,160 \cdot 10^{-9} \text{ Гн/м}.$$

Если пользоваться формулой (3-121), то получим

$$M = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 10^{-9} \text{ Гн/м}.$$

Результаты, полученные всеми тремя способами, хорошо согласуются друг с другом.

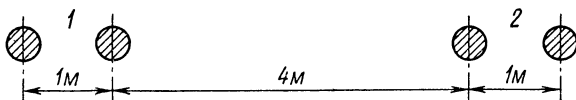


Рис. 3-36

### 3-13. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОДНОФАЗНЫХ ЛИНИЙ С ПРОВОДАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При постоянном токе и низкой частоте взаимная индуктивность двух параллельных однофазных линий с проводами произвольного поперечного сечения (рис. 3-37) определяется формулой

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{g_{AD} g_{BC}}{g_{AC} g_{BD}}, \quad (3-123)$$

где  $g_{AD}$ ,  $g_{BC}$  и т. д. — средние геометрические расстояния соответствующих площадей ( $s_A$ ,  $s_B$ ,  $s_C$ ,  $s_D$ ) поперечных сечений проводов друг от друга (о методах, формулах и таблицах для определения этих величин см. в § 1-8 и гл. 10).

В частности, для линейных проводов  $g_{AD} = d_{AD}$ ,  $g_{BC} = d_{BC}$  и т. д., где  $d_{AD}$ ,  $d_{BC}$  и т. д. — расстояния между центрами инерции поперечных сечений соответствующих проводов, и, следовательно,

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{AD} d_{BC}}{d_{AC} d_{BD}}. \quad (3-124)$$

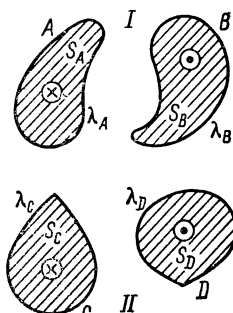


Рис. 3-37

Последняя формула справедлива и для линейных проводов из ферромагнитных материалов.

Так как формула (3-124) отличается от основной формулы (3-113) лишь обозначениями, то для однофазных линий с линейными проводами произвольного поперечного сечения справедливы все формулы, приведенные в § 3-12 для проводов кругового сечения.

2. Формула (3-113) и вытекающие из нее формулы § 3-12 справедливы для линейных проводов при любой частоте.

3. Для нелинейных проводов взаимную индуктивность линий при весьма высокой частоте можно определять по формуле (3-123), понимая в ней под  $g_{AD}$ ,  $g_{BC}$  и т. д. средние геометрические расстояния не площадей  $s_A$ ,  $s_B$ ,  $s_C$ ,  $s_D$ , а периметров  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$ ,  $\lambda_C$ ,  $\lambda_D$  поперечных сечений проводов друг от друга (см. § 1-8 и гл. 10). Такой метод расчета соответствует предположению, что токи высокой частоты равномерно распределены по поверхностям проводов, и приводит к значительной погрешности лишь для проводов, расположенных в непосредственной близости друг от друга.

### 3-14. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МНОГОПРОВОДНЫХ ОДНОФАЗНЫХ ЛИНИЙ

Если однофазная линия состоит из нескольких проводов, соединенных между собой параллельно, то совокупность всех проводов с токами одного направления можно рассматривать как один провод со сложной формой поперечного сечения. Например, для системы из пяти проводов, сечения которых показаны на рис. 3-25, совокупность проводов 1, 2 и 3 можно рассматривать как один сложный провод, а совокупность проводов 4 и 5 — как другой провод.

1. Взаимная индуктивность двух многопроводных линий при постоянном токе и низкой частоте может быть найдена по формуле (3-123), причем средние геометрические расстояния  $g_{AD}$ ,  $g_{BC}$  и т. д. должны быть определены по формулам § 10-3; под  $s_A$  следует понимать сумму площадей поперечных сечений всех прямых проводов первой линии, под  $s_B$  — сумму сечений всех обратных проводов первой линии, а под  $s_C$  и  $s_D$  — соответствующие суммы для второй линии (для рис. 3-25  $s_A = s_1 + s_2 + s_3$ ,  $s_B = s_4 + s_5$  и т. д.); предполагается, что плотность тока одинакова для всех частей каждого из рассматриваемых сложных проводов.

Обычно все провода каждой линии одинаковы и число прямых проводов равно числу обратных проводов. Пусть для первой линии это число равно  $n$ , а для второй —  $m$ . Тогда выражение для  $M$  можно представить в виде

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi n m} \ln \frac{\Pi_1}{\Pi_2}, \quad (3-125)$$

где  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — произведения средних геометрических расстояний площадей поперечных сечений отдельных проводов первой линии от площадей поперечных сечений проводов второй линии, причем в произведение  $\Pi_1$  входят все расстояния для проводов с токами противоположного направления, а в произведение  $\Pi_2$  — все расстояния для проводов с токами одинакового направления. Например, для двух линий ( $I$  и  $II$ ), сечения которых изображены на рис. 3-38,  $n = 2$ ,  $m = 1$  и

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi \cdot 2 \cdot 1} \ln \frac{g_{15}g_{25}g_{36}g_{46}}{g_{16}g_{26}g_{35}g_{45}}.$$

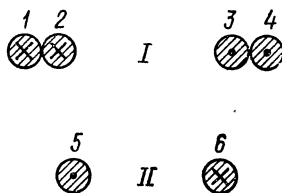


Рис. 3-38

Если все провода линейные, то отдельные средние геометрические расстояния  $g_{hi}$ , входящие в произведения  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , можно заменить расстояниями  $d_{hi}$  между центрами инерции поперечных сечений соответствующих проводов. В этом случае формула (3-125) справедлива и для проводов из ферромагнитных материалов.

2. Формула (3-125) после замены в ней средних геометрических расстояний  $g_{hi}$  расстояниями  $d_{hi}$  между центрами инерции поперечных сечений соответствующих проводов справедлива для линейных проводов при любой частоте.

3. Для нелинейных проводов взаимную индуктивность двух многопроводных однофазных линий при весьма высокой частоте можно определить так, как указано в пункте 3 предыдущего параграфа. Под  $\lambda_A$  в этом случае следует понимать сумму периметров поперечных сечений всех прямых проводов первой линии, под  $\lambda_B$  — то же для обратных проводов первой линии и т. д.

Такой расчет соответствует предположению о равномерном распределении токов по поверхностям всех проводов каждой линии. Это предположение при расчете взаимных индуктивностей приводит, как правило, к значительно

меньшей погрешности, чем при расчете собственных индуктивностей.

При равном числе прямых и обратных проводов для линий с одинаковыми проводами приближенно справедлива формула (3-125), в которой под  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  следует в данном случае понимать произведения средних геометрических расстояний не площадей, а периметров поперечных сечений соответствующих проводов.

### 3-15. ИНДУКТИВНОСТЬ ТРЕХФАЗНОЙ ЛИНИИ

*Индуктивностью одной фазы* трехфазной линии называют величину

$$L_{pk} = \frac{\Delta \dot{U}_{kr}}{j\omega \dot{I}_k}, \quad (3-126)$$

где  $k$  — номер фазы;  $\Delta \dot{U}_{kr}$  — реактивное падение напряжения в  $k$ -й фазе;  $\dot{I}_k$  — ток в ней (§ 1-13). Индуктивность фазы зависит от соотношения между токами. Если токи образуют симметричную трехфазную систему, т. е.

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_3}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_3} = \alpha = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (3-127)$$

то

$$\left. \begin{aligned} L_{p1} &= \Lambda_1 - \frac{1}{2} (\Lambda_{12} + \Lambda_{31}); \\ L_{p2} &= \Lambda_2 - \frac{1}{2} (\Lambda_{23} + \Lambda_{12}); \\ L_{p3} &= \Lambda_3 - \frac{1}{2} (\Lambda_{31} + \Lambda_{23}), \end{aligned} \right\} \quad (3-128)$$

где  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_{12}, \Lambda_{23}, \Lambda_{31}$  — условные собственные и взаимные индуктивности проводов (§ 1-13). Обычно  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$ , и тогда

$$\left. \begin{aligned} L_{p1} &= \frac{1}{4} (L_{12} + L_{31}); \\ L_{p2} &= \frac{1}{4} (L_{23} + L_{12}); \\ L_{p3} &= \frac{1}{4} (L_{31} + L_{23}), \end{aligned} \right\} \quad (3-129)$$

где  $L_{12}, L_{23}, L_{31}$  — индуктивности однофазных линий, составленных соответственно из проводов 1 и 2, 2 и 3, 3 и 1.

Таким образом, в этом случае расчет индуктивностей фаз трехфазной линии сводится к расчету индуктивностей соответствующих однофазных линий, для которых расчетные формулы даны выше (§ 3-3 и 3-9).

Для трехфазной линии с одинаковыми проводами, расположенными с и м м е т р и ч н о по вершинам правильного треугольника, условные собственные и взаимные индуктивности проводов одинаковы:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3; \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{23} = \Lambda_{31}.$$

В этом случае, независимо от степени и характера несимметрии системы токов, индуктивности всех трех фаз также одинаковы:

$$L_{p1} = L_{p2} = L_{p3} = L_p = \Lambda_1 - \Lambda_{12} \quad (3-130)$$

и вдвое меньше индуктивности  $L = 2\Lambda_1 - 2\Lambda_{12}$  соответствующей однофазной линии, т. е. линии с теми же проводами и таким же их взаимным расположением. В частности, для

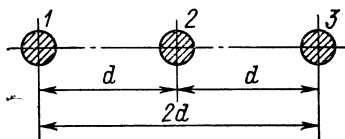


Рис. 3-39

$$L_p = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right), \quad (3-131)$$

где  $d$  — расстояние между осями проводов;  $r$  — радиус сечения провода. Если абсолютная магнитная проницаемость проводов  $\mu$  отлична от  $\mu_0$ , то

$$L_p = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \frac{\mu}{\mu_0} \right). \quad (3-132)$$

В трехфазных линиях с н е с и м м е т р и ч н ы м расположением проводов (см., например, рис. 3-39) конструктивная несимметрия линии может быть устранена путем *транспозиции* проводов, т. е. периодического изменения месторасположения отдельных фаз линии (рис. 3-40). Для несимметричной т р а н с п о н и р о в а н н о й линии среднее значение индуктивности фазы на участке, длина которого

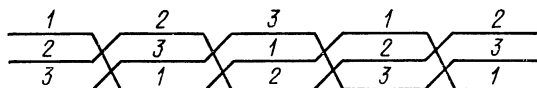


Рис. 3-40



второе превышает длину нетранспонированного участка, одинаково для всех трех фаз и независимо от степени и характера несимметрии системы токов равно

$$L_p = \frac{1}{3} [\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 - (\Lambda_{12} + \Lambda_{23} + \Lambda_{31})]. \quad (3-133)$$

При  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$

$$\begin{aligned} L_p &= \Lambda_1 - \frac{1}{3} (\Lambda_{12} + \Lambda_{23} + \Lambda_{31}) = \\ &= \frac{1}{6} (L_{12} + L_{23} + L_{31}), \end{aligned} \quad (3-134)$$

где  $L_{12}$ ,  $L_{23}$ ,  $L_{31}$  — индуктивности однофазных линий (петель), составленных соответственно из проводов 1 и 2, 2 и 3, 3 и 1.

В частности, для линии с проводами кругового сечения

$$L_p = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \frac{\mu}{\mu_0} \right), \quad (3-135)$$

где  $d = \sqrt[3]{d_{12}d_{23}d_{31}}$ ;  $r$  — радиус проводов;  $d_{12}$ ,  $d_{23}$ ,  $d_{31}$  — расстояния между ними.

Значения индуктивности одной фазы трехфазной линии, вычисленные по формуле (3-135) при  $\mu = \mu_0$ , даны в табл. 3-4 в зависимости от отношения  $d/r$ .

Общие формулы настоящего параграфа применимы и к многопроводным трехфазным линиям (линиям с расщепленными проводами), т. е. к линиям, каждая фаза которых состоит не из одного, а из нескольких соединенных параллельно проводов. Однако в этом случае необходимо дополнительное предположение о том, что плотность тока во всех проводах каждой фазы одинакова. В формулах (3-129), (3-130) и (3-134) под  $L_{12}$ ,  $L_{23}$ ,  $L_{31}$  следует при этом понимать

Таблица 3-4. Индуктивность одной фазы трехфазной линии

$\frac{d}{r}$	$L_p$ , мкГн/м	$\frac{d}{r}$	$L_p$ , мкГн/м	$\frac{d}{r}$	$L_p$ , мкГн/м
20	6,491	100	9,710	700	13,60
30	7,301	150	10,521	800	13,87
40	7,878	200	11,097	900	14,10
50	8,324	300	11,91	1000	14,32
60	8,689	400	12,48	1100	14,51
70	8,997	500	12,93	1200	14,68
80	9,264	600	13,29	1300	14,84
90	9,500				

индуктивности соответствующих многопроводных однофазных линий, определяемые так, как указано в § 3-10.

**Пример 3-8.** Трехфазная линия выполнена из медного провода радиуса  $r = 7$  мм. Провода линии расположены в одной плоскости (рис. 3-39) на расстоянии  $d_{12} = d_{23} = 3$  м друг от друга. Система токов симметрична. Определить индуктивности отдельных фаз линии.

**Решение.** Находим индуктивности соответствующих однофазных линий. Применяя формулу (3-28), получаем

$$L_{12} = L_{23} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \left( \ln \frac{3}{0,007} + 0,25 \right) = 4 \cdot 10^{-7} (6,061 + 0,25) = 2,524 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

Аналогично

$$L_{31} = 2,802 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

По формулам (3-129)

$$L_{p1} = L_{p3} = \frac{1}{4} (2,524 + 2,802) \cdot 10^{-6} = 1,331 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м;}$$

$$L_{p2} = L_{12}/2 = 1,262 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

Среднее значение индуктивности фазы

$$L_p = \frac{1}{3} (L_{p1} + L_{p2} + L_{p3}) = 1,308 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

Если линия транспонирована, то среднее расстояние между проводами

$$d = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 6} = 3,780 \text{ м; } d/r = 3,780/0,007 = 540,$$

и по формуле (3-131) находим

$$L_p = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} (\ln 540 + 0,25) = 1,308 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

По табл. 3-4 при  $d/r = 540$  получаем  $L_p = 1,307$  Гн/м. Оба результата практически совпадают друг с другом и с найденным ранее средним значением индуктивностей фаз.

### 3-16. ИНДУКТИВНОСТЬ ДВОЙНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ ЛИНИИ

Если две трехфазные линии расположены рядом и идут параллельно друг другу, то вследствие электромагнитного воздействия, которое каждая из них оказывает на другую, эквивалентные индуктивности фаз зависят не только от соотношения между токами данной линии, но и от токов в соседней линии. Понятие об индуктивности фазы становится при этом неопределенным и, по существу, теряет смысл. Если, однако, поперечные сечения обеих линий одинаковы и расположены симметрично (как, например, на рис. 3-41), а соответствующие их фазы соединены параллельно, то токи обеих линий будут пофазно одинаковы и понятие об индуктивности отдельной фазы может быть введено так же, как и для одиночной линии, причем индук-

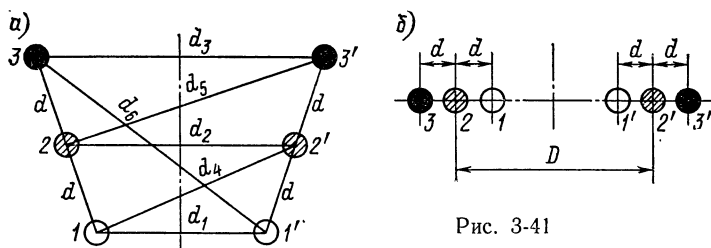


Рис. 3-41

тивности различных фаз будут, вообще говоря, различны. Это различие может быть устранено путем транспозиции проводов. Две простейшие схемы транспозиции двойной трехфазной линии показаны на рис. 3-42.

Для схемы рис. 3-42, а индуктивность одной фазы линии определяется формулой

$$L_p = \Lambda_1 - \frac{1}{3} (\Lambda_{12} + \Lambda_{23} + \Lambda_{31}) + \\ + \frac{1}{3} (\Lambda_{11'} + \Lambda_{22'} + \Lambda_{33'}) - \frac{1}{3} (\Lambda_{12'} + \Lambda_{23'} + \Lambda_{31'}), \quad (3-136)$$

где  $\Lambda_1$  — условная собственная индуктивность одного провода;  $\Lambda_{12}$ ,  $\Lambda_{11'}$ ,  $\Lambda_{12'}$  и т. д. — условные взаимные индуктивности проводов, причем значения индексов ясны из рис. 3-42, а (например,  $\Lambda_{23'}$  — условная взаимная индуктивность второго провода первой линии и третьего провода второй линии).

В удобном для расчета виде формула (3-136) может быть представлена так:

$$L_p = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{g_I g_{III}}{g_I g_{II}}, \quad (3-137)$$

где  $g_1$  — среднее геометрическое расстояния площади поперечного сечения провода от самой себя;

$$g_I = \sqrt[3]{g_{12} g_{23} g_{31}}; \quad g_{II} = \sqrt[3]{g_{11'} g_{22'} g_{33'}}; \quad g_{III} = \sqrt[3]{g_{12'} g_{23'} g_{31'}},$$

а  $g_{12}$ ,  $g_{11'}$ ,  $g_{12'}$  и т. д. — средние геометрические расстояния площадей поперечных сечений проводов друг от друга (расстановка индексов та же, что и в предыдущей формуле).

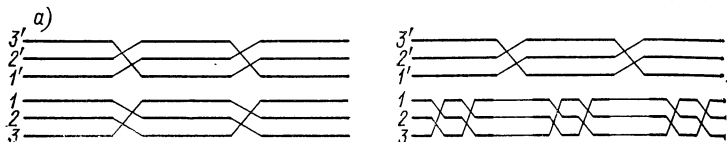


Рис. 3-42

В частности, для линий с проводами кругового поперечного сечения

$$L_p = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{D_I D_{III}}{D_{II}} + \frac{1}{4} \right), \quad (3-138)$$

где

$$D_I = \sqrt[3]{d_{12} d_{23} d_{31}}; \quad D_{II} = \sqrt[3]{d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33}}; \\ D_{III} = \sqrt[3]{d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{31}};$$

$r$  — радиус проводов;  $d_{12}$ ,  $d_{11}$ ,  $d_{12}$  и т. д. — расстояния между ними.

Например, для двойной линии, показанной на рис. 3-41, а,

$$L_p = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d \sqrt[3]{2d_4 d_5 d_6}}{r \sqrt[3]{d_1 d_2 d_3}} + \frac{1}{4} \right), \quad (3-139)$$

а для двойной линии на рис. 3-41, б

$$L_p = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d \sqrt[3]{2(D^2 - d^2)}}{r \sqrt[3]{D^2 - 4d^2}} + \frac{1}{4} \right). \quad (3-140)$$

Если транспозиция проводов выполнена по схеме рис. 3-42, б, то суммарная ЭДС, индуцируемая токами одной линии в любой фазе другой линии, равна нулю. Поэтому индуктивность одной фазы каждой линии выражается так, как если бы другой линии вообще не было, т. е. формулой (3-133) или (для линии с проводами кругового сечения) формулой (3-135). При этом даже не требуется, чтобы токи в линиях и сами линии были одинаковы; взаимное расположение проводов обеих линий также может быть произвольным.

### 3-17. ИНДУКТИВНОСТЬ ТРЕХФАЗНЫХ ШИН

Индуктивности фаз трехфазных шин произвольного поперечного сечения при симметрии системы токов могут быть определены по формулам (3-129), причем для шин прямоугольного сечения индуктивности соответствующих однофазных линий должны определяться по формулам и кривым § 3-4—3-7.

Для наиболее важного случая — для сплошных шин прямоугольного сечения, расположенных согласно рис. 3-43, — индуктивность средней фазы (2) равна половине индуктивности однофазных шин с тем же соотношением размеров  $b$  и  $c$  и тем же расстоянием  $d$  между

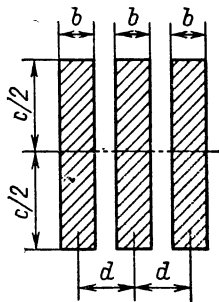


Рис. 3-43

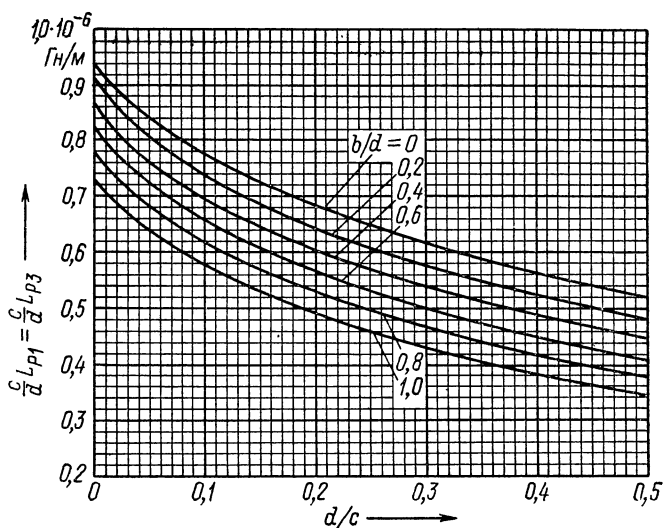


Рис. 3-44

шинами (см. § 3-5, в частности рис. 3-12 и 3-13); для определения индуктивности крайней фазы (1 или 3) могут служить кривые рис. 3-44, на которых индуктивность  $L_{p1} = L_{p3}$ , отнесенная к величине  $d/c$ , дана в зависимости от параметров  $b/d$  и  $d/c$ .

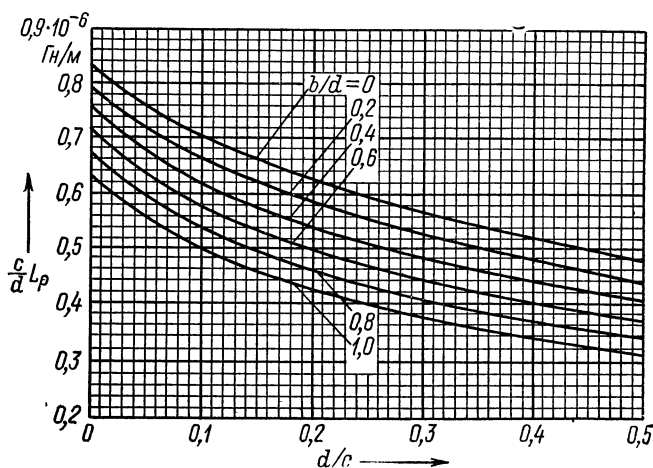


Рис. 3-45

На рис. 3-45 такие же кривые построены для средней индуктивности трех фаз, также отнесенной к величине  $d/c$ .

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### ИНДУКТИВНОСТИ ПЛОСКИХ КОНТУРОВ

#### 4-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Применяя метод участков (§ 1-4) и используя формулы и методы расчета индуктивностей отдельных проводов, данные в гл. 2, можно найти собственные и взаимные индуктивности плоских и пространственных контуров любой формы.

При этом для определения взаимной индуктивности  $M$  двух контуров следует непосредственно пользоваться основной формулой (1-14):

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{i=n+1}^{n+m} M_{ki}, \quad (4-1)$$

а для определения собственной индуктивности  $L$  какого-нибудь контура целесообразно придать основному выражению (1-13)

$$L = \sum_{k=1}^n L_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ki}, \quad i \neq k \quad (4-2)$$

несколько иной вид. Согласно формуле (2-49) собственная индуктивность  $L_k$  каждого участка сложного контура может быть представлена в виде

$$L_k = N_k - G_k, \quad (4-3)$$

причем величины  $N_k$  и  $G_k$  в общем случае определяются так, как указано в § 2-10. Подставляя (4-3) в (4-2), имеем

$$L = \sum_{k=1}^n N_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ki} - \sum_{k=1}^n G_k, \quad i \neq k. \quad (4-4)$$

2. В дальнейшем предполагается, что форма и размеры поперечного сечения провода, из которого выполнен контур,

одинаковы на всех его участках. При этом условии величины  $G_k$  можно представить в виде  $G_k = l_k H$ , где  $H$  — величина, не зависящая от  $l_k$  и одинаковая для всех участков, откуда следует, что последняя сумма в формуле (4-4) равна  $G = lH$ , где  $l = l_1 + l_2 + \dots + l_n$  — общая длина всех участков. Таким образом, собственная индуктивность линейного контура

$$L = N - G, \quad (4-5)$$

причем

$$N = \sum_{k=1}^n N_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ki}, \quad i \neq k, \quad (4-6)$$

где  $n$  — число участков контура;  $M_{ki}$  — взаимная индуктивность  $k$ -го и  $i$ -го участков;  $N_k$  — значение величины  $N$ , входящей в формулу (4-3), для  $k$ -го участка; величина  $G$ , пропорциональная длине контура (его периметру), может быть найдена в различных случаях по формулам и методам § 2-10. В частности, для контура из провода кругового сечения

$$G = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln r - \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} \right), \quad (4-7)$$

где  $\xi$  — величина, зависящая от характера распределения тока по сечению провода и определяемая так, как указано в § 2-2 (например, из табл. 2-1).

Ниже для контуров различной формы даны значения величины  $N$ . Собственная индуктивность контура получается из  $N$  и  $G$  по формуле (4-5).

#### 4-2. ИНДУКТИВНОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Для треугольного контура величина

$$N = \frac{\mu_0}{2\pi} [a \ln 2a + b \ln 2b + c \ln 2c - l(1 + \ln l) + \\ + a \ln(l - 2a) + b \ln(l - 2b) + c \ln(l - 2c)], \quad (4-8)$$

где  $a, b, c$  — стороны треугольника;  $l = a + b + c$  — его периметр. В частности, для равнобедренного треугольника ( $c = b, l = a + 2b$ )

$$N = \frac{\mu_0}{2\pi} [a \ln 2a + 2b \ln 2b - l(1 + \ln l) + \\ + a \ln(2b - a) + 2b \ln a]. \quad (4-9)$$

Для равностороннего треугольника ( $a = b = c = l/3$ )

$$N = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2a}{3} - 1 \right). \quad (4-10)$$

**Пример 4-1.** Треугольный контур со сторонами  $a = 10$  см,  $b = 20$  см и  $c = 15$  см выполнен из медного провода диаметром  $2r = 0,4$  см. Определить индуктивность контура при низкой частоте и при весьма высокой частоте.

**Решение.** Для определения индуктивности пользуемся формулой  $L = N - G$ , причем величину  $N$  определяем по формуле (4-8):

$$N = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} [0,1 \ln 0,2 + 0,2 \ln 0,4 + 0,15 \ln 0,3 - \\ - 0,45 (1 + \ln 0,45) + 0,1 \ln 0,25 + 0,2 \ln 0,05 + 0,15 \ln 0,15] = \\ = -2,1,638 \cdot 10^{-7} = -3,276 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Величину  $G$  определяем по формуле (4-7).

При  $f = 0$  величина  $\zeta = 1$  и

$$G = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,45}{2\pi} (\ln 0,002 - 0,25) = -5,819 \cdot 10^{-7} \text{ Гн;}$$

$$L = N - G = (-3,276 + 5,819) \cdot 10^{-7} = 2,543 \cdot 10^{-7} \text{ Гн,}$$

При  $f = \infty$  величина  $\zeta = 0$  и

$$G = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,45 \ln 0,002 = -5,594 \cdot 10^{-7} \text{ Гн;}$$

$$L = N - G = (-3,276 + 5,594) \cdot 10^{-7} = 2,318 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Для определения индуктивности контура можно также воспользоваться приближенной формулой (4-28), приведенной в § 4-10.

$$\text{В данном случае } l = 45 \text{ см, } S = \sqrt{\frac{l}{2} \left( \frac{l}{2} - a \right) \left( \frac{l}{2} - b \right) \left( \frac{l}{2} - c \right)} = \\ = \sqrt{22,5 \cdot 12,5 \cdot 2,5 \cdot 7,5} = 72,63 \text{ см}^2 = 7,263 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

При  $f = 0$  величина  $\zeta = 1$  и

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,45 \left( \ln \frac{14,526 \cdot 10^{-3}}{0,45 \cdot 0,002} - 0,15 + 0,25 \right) = 2,592 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

При  $f = \infty$  величина  $\zeta = 0$  и

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,45 \left( \ln \frac{14,526 \cdot 10^{-3}}{0,45 \cdot 0,002} - 0,15 \right) = 2,368 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Сравнение результатов, полученных по обеим формулам, показывает, что приближенная формула дает в данном случае погрешность около 2 %.

### 4-3. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Для прямоугольного контура величина

$$N = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ a \ln \frac{2ab}{a+d} + b \ln \frac{2ab}{b+d} + 2(d-a-b) \right], \quad (4-11)$$

где  $a$  и  $b$  — стороны прямоугольника;  $d$  — его диагональ.

Для квадрата ( $a = b$ )

$$N = \frac{2\mu_0 a}{\pi} \left( \ln \frac{2a}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 2 \right). \quad (4-12)$$



#### 4-4. ИНДУКТИВНОСТИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Для контура, имеющего вид правильного многоугольника, величина

$$N = \frac{\mu_0 a n}{2\pi} [\ln a + f(n)], \quad (4-13)$$

где

$$f(n) = \frac{2\pi}{\mu_0 a} \sum_{k=1}^{n-1} M_{nk} + \ln 2 - 1; \quad (4-14)$$

$n$  — число сторон многоугольника;  $a$  — длина одной стороны;  $M_{nk}$  — взаимная индуктивность  $n$ -й и  $k$ -й сторон. Величина  $f(n)$  зависит только от числа сторон многоугольника. Значения  $f(n)$  для различных  $n$  даны в табл. 4-1.

Таблица 4-1. Значения  $f(n)$  для правильных многоугольников

$n$	3	4	5	6	8
$f(n)$	-1,40546	-0,77401	-0,40914	-0,15152	+0,21198

#### 4-5. ИНДУКТИВНОСТЬ КРУГА

Для кругового контура величина

$$N = \mu_0 R (\ln 8R - 2),$$

где  $R$  — радиус круга. Для получения более точного значения индуктивности  $L$  следует пользоваться формулами гл. 5.

#### 4-6. ИНДУКТИВНОСТЬ ЭЛЛИПСА

Для эллиптического контура величина

$$N = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[ \ln \frac{4l}{\pi} - 2 - f(\lambda) \right], \quad (4-15)$$

где  $l = 4aE$  — периметр эллипса;  $E$  — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $k = \sqrt{1 - \eta^2}$ ;  $\eta = \frac{b}{a}$ ;  $\lambda = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}$ ;  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса, а  $f(\lambda)$  — функция от  $\lambda$ , имеющая вид

$$f_1(\lambda) = 0,4375\lambda^2 + 0,1445\lambda^4 \quad \text{при} \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \eta \leq 1 \right);$$

$$f_2(\lambda) = -0,0182 + 0,614\lambda^2 \quad \text{при} \quad \frac{7}{32} \leq \lambda \leq \frac{15}{17} \left( \frac{1}{4} \leq \eta \leq \frac{4}{5} \right).$$

#### 4-7. ИНДУКТИВНОСТЬ РОМБА

Для контура, имеющего форму ромба, величина

$$N = \frac{2\mu_0 a}{\pi} [\ln a - f(\alpha)], \quad (4-16)$$

где  $a$  — сторона ромба;  $\alpha$  — половина угла при его вершине;

$$f(\alpha) = 2 - \ln 2 - \cos \alpha - \sin \alpha + \cos^2 \alpha \times \\ \times \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha} + \sin^2 \alpha \ln \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha}. \quad (4-17)$$

Значения  $f(\alpha)$  для  $\alpha$  от 5 до  $45^\circ$  могут быть взяты из кривой рис. 4-1. При  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  справедливо равенство

$$f(\alpha) = f(90^\circ - \alpha).$$

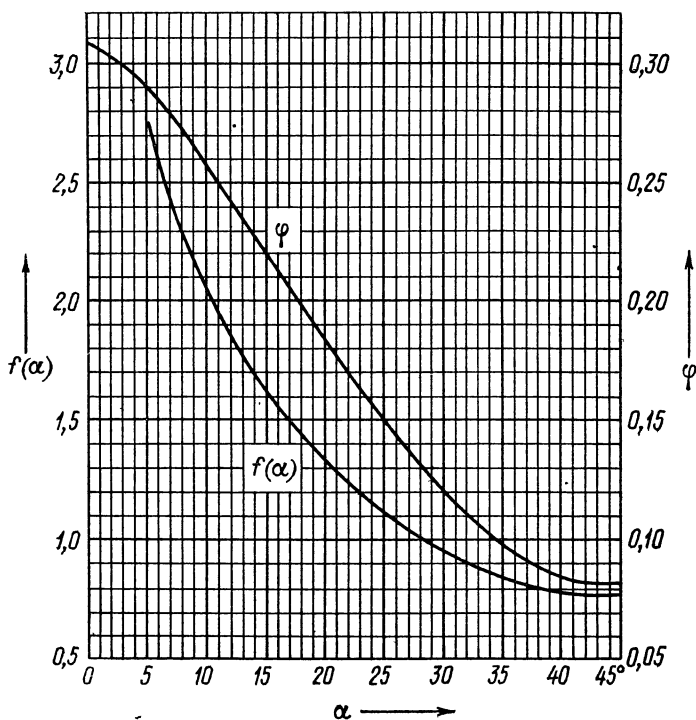


Рис. 4-1

#### 4-8. ИНДУКТИВНОСТЬ СЕКТОРА

Для контура, имеющего форму кругового сектора, величина

$$N = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left\{ (2 + \theta) \ln 2a + 2\theta \ln 2 - 2(1 + \theta) - \right. \\ \left. - 4I + 2 \ln \left[ \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\}, \quad (4-18)$$

где  $\theta$  — угол;  $a$  — радиус сектора;  $I$  — величина, значения которой даны в табл. 2-2.

#### 4-9. ИНДУКТИВНОСТИ КОНТУРОВ СО ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ

Для определения собственной индуктивности сложного контура со взаимно перпендикулярными сторонами добавляют к нему один или несколько прямолинейных проводов так, чтобы в результате образовались только контуры, имеющие форму прямоугольников (рис. 1-31).

Тогда величина  $N$ , входящая в формулу (4-5) для собственной индуктивности контура  $A$ , определится по формуле

$$N = \sum_{k=1}^n N_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n N_{ki}, \quad i \neq k, \quad (4-19)$$

где  $n$  — число прямоугольников, из которых состоит контур  $A$ ;  $N_k$  — значение величины  $N$  для  $k$ -го прямоугольника;  $N_{ki}$  — величина, входящая в формулу (4-35) для взаимной индуктивности  $k$ -го и  $i$ -го прямоугольников (§ 4-11).

Для определения  $N_k$  служит формула

$$N_k = \frac{\mu_0 l_k}{2\pi} \left( \ln \frac{2S_k}{l_k} - \varphi_k \right), \quad (4-20)$$

где  $l_k$  — периметр  $k$ -го прямоугольника;  $S_k$  — его площадь, а величина  $\varphi_k$  зависящая только от отношения сторон прямоугольника, может быть найдена по табл. 4-3. Величины  $N_{ki}$  определяются так, как указано в § 4-11.

**Пример 4-2.** Контур из провода кругового сечения диаметром 4 мм имеет форму и размеры, указанные на рис. 4-2 (размеры даны в сантиметрах). Определить индуктивность контура при низкой частоте и при частоте  $f = 1$  МГц.

**Решение.** Для определения индуктивности контура применяем формулу  $L = N - G$ , причем  $N$  определяем по формуле (4-19). Допол-

няя контур четырьмя проводами, показанными на рис. 4-2 штриховыми линиями, получим

$$N = N(1) + N(3) + N(4) + 2[N(1 \times 3) + N(1 \times 4) + N(3 \times 4)]. \quad (4-21)$$

Величины  $N(1 \times 3)$ ,  $N(1 \times 4)$  и  $N(3 \times 4)$  определяем методом, основанным на теореме о четырех прямоугольниках. Для прямоугольников 1 и 3, а также 3 и 4 в соответствии с формулой (1-50) имеем

$$2N(1 \times 3) = N(1, 3) - N(1) - N(3); \quad (4-22)$$

$$2N(3 \times 4) = N(3, 4) - N(3) - N(4). \quad (4-23)$$

Величина  $N(1 \times 4)$  определяется по формуле (1-52):

$$\begin{aligned} 2N(1 \times 4) = & \frac{1}{2} [N(1, 2, 3, 4) + N(1) + \\ & + N(2) + N(3) + N(4) - N(1, 2) - \\ & - N(1, 3) - N(2, 4) - N(3, 4)]. \end{aligned} \quad (4-24)$$

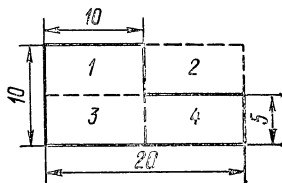


Рис. 4-2

Подставляя (4-22), (4-23) и (4-24) в (4-21) и учитывая, что в данном примере  $N(1) = N(2) = N(3) = N(4)$ ,  $N(1, 2) = N(3, 4)$ ,  $N(1, 3) = N(2, 4)$ , получаем

$$N = \frac{1}{2} N(1, 2, 3, 4) + N(1).$$

Величины  $N(1, 2, 3, 4)$  и  $N(1)$  находим по формуле (4-20), определяя  $\Phi$  по табл. 4-3. Для прямоугольника (1, 2, 3, 4)

$$l_{1234} = 0,6 \text{ м}; \quad S_{1234} = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02 \text{ м}^2; \quad \Phi_{1234} = 0,0714;$$

$$\begin{aligned} N(1, 2, 3, 4) &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,6 \left( \ln \frac{2 \cdot 0,02}{0,6} - 0,0714 \right) = \\ &= -3,335 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}. \end{aligned}$$

Для прямоугольника 1

$$l_1 = 0,3 \text{ м}; \quad S_1 = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005 \text{ м}^2; \quad \Phi_1 = 0,0714 \text{ и}$$

$$N(1) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,3 \left( \ln \frac{2 \cdot 0,005}{0,3} - 0,0714 \right) = -2,083 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

Следовательно,  $N = -(3,335/2 + 2,083) \cdot 10^{-7} = -3,750 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$ .

Для определения  $G$  пользуемся формулой (4-7). При низкой частоте ( $\xi = 1$ )

$$G = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,6}{2\pi} \left( \ln 0,002 - \frac{1}{4} \right) = -7,758 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$$

и

$$L = (-3,750 + 7,758) \cdot 10^{-7} = 4,008 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

При частоте  $f = 1$  Мгц  $k = \sqrt{\omega\mu\gamma} = 2,140 \cdot 10^4$ ,  $kr = 2,140 \cdot 0,002 \times 10^4 = 42,80$  и по табл. 2-1 находим  $\xi = 0,0661$ . Следовательно,

$$G = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,6 \left( \ln 0,002 - \frac{0,0661}{4} \right) = -7,478 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$$

и

$$L = (-3,750 + 7,478) \cdot 10^{-7} = 3,728 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Индуктивность рассматриваемого контура может быть определена также и по приближенной формуле (4-28), в которой следует принять  $l = 0,6$  м,  $S = 0,015$  м<sup>2</sup>. При низкой частоте ( $\xi = 1$ ) имеем

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,6 \left( \ln \frac{2 \cdot 0,015}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6} - 0,15 - 0,25 \right) = 3,983 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

При  $f = 1$  Мгц  $\xi = 0,0661$  и  $L = 3,706 \cdot 10^{-7}$  Гн.

Сравнение результатов, полученных обоими способами, показывает, что в данном случае погрешность приближенной формулы составляет только 0,6 %.

#### 4-10. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИНДУКТИВНОСТЕЙ ПЛОСКИХ КОНТУРОВ

Величина  $N$ , входящая в формулу (4-5) для собственной индуктивности плоского контура, всегда может быть представлена в виде

$$N = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2S}{l} - \varphi \right), \quad (4-25)$$

где  $l$  — периметр контура;  $S$  — охватываемая им площадь, а величина  $\varphi$  зависит лишь от формы контура и одинакова для всех геометрически подобных фигур.

В частности, для контура из провода кругового сечения при любой частоте имеем

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2S}{rl} - \varphi + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} \right), \quad (4-26)$$

где  $r$  — радиус сечения провода, а величина  $\xi$  может быть определена так, как указано в § 2-2 (в частности, по табл. 2-1). Ниже приведены значения  $\varphi$  для контуров различной формы.

В тех случаях, когда значение величины  $\varphi$ , входящей в формулы (4-25) и (4-26), неизвестно, иногда пользуются приближенными формулами:

$$N = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2S}{l} - 0,15 \right); \quad (4-27)$$

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2S}{rl} - 0,15 + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} \right), \quad (4-28)$$

в которых для  $\varphi$  принят некоторое среднее значение, равное 0,15. Следует, однако, иметь в виду, что при наличии у

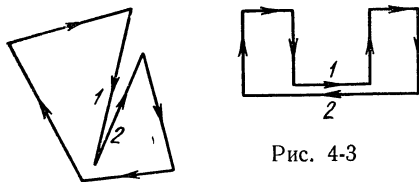


Рис. 4-3

контура участков с относительно большой взаимной индуктивностью истинное значение  $\varphi$  может существенно отличаться от среднего значения 0,15, принятого в этих формулах. На рис. 4-3 приведены примеры контуров, для которых формулы (4-27) и (4-28) могут дать значительную погрешность, причем участки с относительно большой взаимной индуктивностью помечены цифрами 1 и 2 (см. также рис. 4-4 и табл. 4-5).

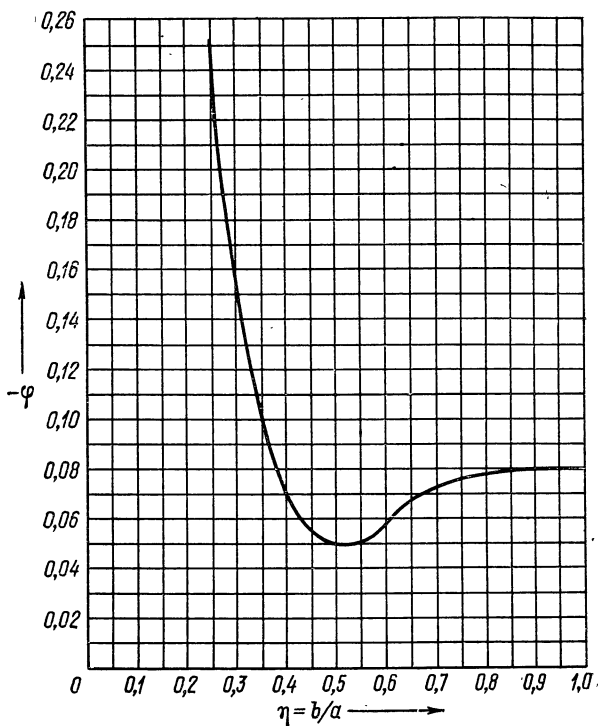


Рис. 4-4

Таблица 4-2. Значения  $\varphi$  для равнобедренного треугольника

$\alpha, \dots^\circ$	$\varphi$	$\alpha, \dots^\circ$	$\varphi$	$\alpha, \dots^\circ$	$\varphi$
0	0,3069	60	1630	120	2249
5	2788	70	1654	130	2417
10	2548	80	1719	140	2587
20	2172	90	0,1818	150	2750
30	1912	100	1943	160	2897
40	1747	110	2090	170	3012
50	1657	120	2249	180	0,3069
60	1630				

**Значения  $\varphi$  для контуров различной формы.**

1) Для треугольника

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln [l(l-2a)(l-2b)(l-2c)] - \frac{a}{l} \ln [a(l-2a)] - \\ - \frac{b}{l} \ln [b(l-2b)] - \frac{c}{l} \ln [c(l-2c)] - 2 \ln 2 + 1, \quad (4-29)$$

где  $a, b, c$  — стороны треугольника;  $l = a + b + c$  — его периметр.

Для равнобедренного треугольника ( $c = b$ )

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln [l(l-2a)] - \frac{a}{l} \ln (l-2a) - 2 \frac{b}{l} \ln b - 2 \ln 2 + 1. \quad (4-30)$$

Значения  $\varphi$  для равнобедренного треугольника даны в табл. 4-2 ( $\alpha$  — угол при вершине треугольника).

2) Для прямоугольника

$$\varphi = \frac{2a}{l} \ln \frac{a+d}{l} + \frac{2b}{l} \ln \frac{b+d}{l} - \frac{4d}{l} + 2, \quad (4-31)$$

где  $a$  и  $b$  — стороны прямоугольника;  $d$  — его диагональ;  $l = 2(a+b)$ .

Значения  $\varphi$  для различных значений отношения  $\alpha = a/b$  даны в табл. 4-3.

3) Для правильных многоугольников

$$\varphi = -\ln \left( 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) - f(n), \quad (4-32)$$

где  $n$  — число сторон многоугольника, а  $f(n)$  может быть определена по формуле (4-14) или табл. 4-1. Значения  $\varphi$  для некоторых правильных многоугольников даны в табл. 4-4.

4) Для ромба

$$\varphi = \ln (\cos \alpha \sin \alpha) + f(\alpha), \quad (4-33)$$

Таблица 4-3. Значения  $\varphi$  для прямоугольника

$\alpha$	$\varphi$	$\alpha$	$\varphi$	$\alpha$	$\varphi$	$\alpha$	$\varphi$
1,0	0,0809	4,0	0,0507	10	0,0258	26	0,0110
1,2	0,0802	4,5	0,0471	11	0,0238	30	0,0096
1,4	0,0785	5,0	0,0438	12	0,0221	35	0,0084
1,6	0,0763	5,5	0,0410	13	0,0206	40	0,0074
1,8	0,0739	6,0	0,0385	14	0,0194	45	0,0066
2,0	0,0714	6,5	0,0362	15	0,0182	50	0,0059
2,2	0,0689	7,0	0,0343	16	0,0172	60	0,0050
2,4	0,0665	7,5	0,0325	17	0,0163	70	0,0043
2,6	0,0642	8,0	0,0309	18	0,0155	80	0,0037
2,8	0,0619	8,5	0,0295	19	0,0147	90	0,0033
3,0	0,0598	9,0	0,0281	20	0,0140	100	0,0030
3,5	0,0549	9,5	0,0269	22	0,0129	—	—
4,0	0,0507	10,0	0,0258	26	0,0110	—	—

где  $\alpha$  — половина угла при вершине ромба, а  $f(\alpha)$  может быть определена по формуле (4-17). Значения  $\varphi$  для различных значений  $\alpha$  даны на рис. 4-1. При  $\alpha > 45^\circ$  следует пользоваться равенством

$$\varphi(\alpha) = \varphi(90^\circ - \alpha).$$

5) Для сектора

$$\varphi = \frac{2}{2+\theta} \left\{ 1 - \ln \left[ 2 \sin \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \theta - \frac{\theta}{2} \ln 8 + 2I - \frac{2+\theta}{2} \ln \frac{2+\theta}{\theta} \right\}, \quad (4-34)$$

где  $\theta$  — угол сектора;  $I$  — величина, значения которой для различных углов  $\theta$  даны в табл. 2-2.

Значения  $\varphi$  для сектора даны в табл. 4-5.

6) Для эллипса

$$\varphi = 2 + \ln \frac{\pi^2 \eta}{32 E^2} + f(\lambda),$$

где все обозначения те же, что и в § 4-6.

Таблица 4-4. Значения  $\varphi$  для правильных многоугольников

$n$	3	4	5	6	8	$\infty$
$\varphi$	0,1629	0,0809	0,0354	0,0077	-0,0237	-0,0794



Таблица 4-5. Значения  $\varphi$  для сектора

$\theta, \dots^\circ$	$\varphi$	$\theta, \dots^\circ$	$\varphi$	$\theta, \dots^\circ$	$\varphi$
0	0,307	120	0,031	260	0,064
5	0,278	140	0,023	280	0,087
10	0,254	160	0,020	300	0,121
20	0,208	180	0,021	320	0,174
40	0,144	180	0,021	340	0,279
60	0,098	200	0,026	350	0,403
80	0,065	220	0,034	355	0,550
100	0,044	240	0,047	360	$\infty$

Значения  $\varphi$ , вычисленные по этой формуле, даны на рис. 4-4 в зависимости от величины  $\eta = b/a$ , где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса\*.

#### 4-11. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

При любом положении в одной плоскости двух прямоугольных контуров со взаимно перпендикулярными сторонами взаимная индуктивность контуров может быть найдена по методу, основанному на теореме о четырех прямоугольниках (§ 1-10), для чего достаточно применить формулы (1-50)—(1-58), понимая в них под  $F(k \times i)$  взаимную индуктивность  $M_{ki}$  рассматриваемых контуров  $k$  и  $i$ , а под  $F(k)$  — собственные индуктивности соответствующих прямоугольных контуров.

Если представить индуктивности  $L_k$  в виде  $L_k = N_k - G_k$  (§ 4-1) и просуммировать отдельно все  $N_k$  и отдельно все  $G_k$ , то будем иметь

$$M_{ki} = N_{ki} - G_{ki}. \quad (4-35)$$

Входящая в эту формулу величина  $N_{ki}$  может быть найдена по формулам (1-50)—(1-58), в которых под  $F(k)$  следует понимать величины

$$N_k = \frac{\mu_0 l_k}{2\pi} \left( \ln \frac{2S_k}{l_k} - \varphi_k \right), \quad (4-36)$$

---

\* В области  $\sqrt{2}/2 \leq \eta \leq 4/5$ , где применимы обе формулы для  $f(\lambda)$  (§ 4-6), значения  $f_1(\lambda)$  и  $f_2(\lambda)$ , а также получаемые из них значения  $\varphi$  несколько отличаются друг от друга. На рис. 4-4 соответствующая часть кривой  $\varphi(\eta)$  проведена так, чтобы обеспечивалось надлежащее сопряжение областей  $\eta \leq \sqrt{2}/2$  и  $\eta \geq 4/5$ .

где  $l_k$  — периметр  $k$ -го прямоугольника;  $S_k$  — его площадь;  $\Phi_k$  — величина, определяемая по табл. 4-3.

Величина  $G_{ki}$  в формуле (4-35) равна нулю, если рассматриваемые прямоугольные контуры  $k$  и  $i$  не имеют общих участков; если же они имеют общий участок (как, например, контуры 1 и 2 на рис. 1-22), то величина  $G_{ki} \neq 0$  и ее следует определять по формулам § 2-10, понимая в них под  $l$  длину общего участка контуров.

Указанный метод расчета неудобен, когда рассматриваемые прямоугольники удалены друг от друга на расстояние, значительно (в три и более раз) превышающее их размеры. В этом случае для определения взаимной индуктивности  $M_{ki}$  лучше пользоваться формулой, полученной методом ряда Тейлора (§ 1-11):

$$M_{ki} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S_k S_i}{r^3} \left[ 1 + (5u^2 - 1) \frac{a_k^2 + a_i^2}{2r^2} + (5v^2 - 1) \frac{b_k^2 + b_i^2}{2r^2} + \right. \\ \left. + (21u^2 v^2 - 2) \frac{5(a_k^2 + a_i^2)(b_k^2 + b_i^2)}{4r^4} + \right. \\ \left. + \frac{1}{8}(1 - 14u^2 + 21u^4) \frac{3a_k^4 + 10a_k^2 a_i^2 + 3a_i^4}{r^4} + \right. \\ \left. + \frac{1}{8}(1 - 14v^2 + 21v^4) \frac{3b_k^4 + 10b_k^2 b_i^2 + 3b_i^4}{r^4} \right], \quad (4-37)$$

где  $S_k = 4a_k b_k$  и  $S_i = 4a_i b_i$  — площади прямоугольников  $k$  и  $i$ ;  $2a_k$ ,  $2b_k$ ,  $2a_i$ ,  $2b_i$  — длины соответствующих сторон;  $r$  — расстояние между центрами прямоугольников;  $u = \cos \theta$ ;  $v = \sin \theta$ ;  $\theta$  — угол между направлением  $r$  и направлением, параллельным сторонам  $2a_k$  и  $2a_i$ .

**Пример 4-3.** Два прямоугольных контура (1 и 3) имеют такие размеры и расположены так, как показано на рис. 4-5 (размеры даны в сантиметрах). Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** Так как контуры 1 и 3 не имеют общих участков, то  $M_{13} = N_{13}$ .

Пользуясь методом, основанным на теореме о четырех прямоугольниках, и применяя формулу (1-51), имеем

$$N_{13} = N(1 \times 3) = \frac{1}{2} [N(1, 2, 3) + N(2) - N(1, 2) - N(2, 3)].$$

Величины  $N(1, 2, 3)$ ,  $N(2)$ ,  $N(1, 2)$  и  $N(2, 3)$  определяем по формуле (4-36) и табл. 4-3. В данном случае

$$l_{123} = 1,7 \text{ м}; \quad S_{123} = 0,075 \text{ м}^2;$$

$$\alpha_{123} = 7,5; \quad \Phi_{123} = 0,0325;$$

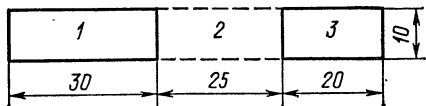


Рис. 4-5

$$\begin{aligned}
l_2 &= 0,7 \text{ м}; & S_2 &= 0,025 \text{ м}^2; & \alpha_2 &= 2,5; & \varphi_2 &= 0,0654; \\
l_{12} &= 1,3 \text{ м}; & S_{12} &= 0,055 \text{ м}^2; & \alpha_{12} &= 5,5; & \varphi_{12} &= 0,0410; \\
l_{23} &= 1,1 \text{ м}; & S_{23} &= 0,045 \text{ м}^2; & \alpha_{23} &= 4,5; & \varphi_{23} &= 0,0471.
\end{aligned}$$

Применяя формулу (4-36), получаем

$$\begin{array}{ll}
N(1, 2, 3) = -8,3647 \cdot 10^{-7} \text{ Гн} & N(1, 2) = -6,5273 \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \\
\frac{N(2) = -3,7860 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}}{-12,1507 \cdot 10^{-7}} & \frac{N(2, 3) = -5,6107 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}}{-12,1380 \cdot 10^{-7}}
\end{array}$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M_{13} = N(1 \times 3) = \frac{1}{2} (-12,1507 + 12,1380) \cdot 10^{-7} = -6,35 \cdot 10^{-10} \text{ Гн}.$$

Как видно из расчета, ответ получается в виде разности близких величин. Вследствие этого уже третья значащая цифра ответа оказывается недостоверной, хотя вычисления производились с пятью значащими цифрами. Поэтому для определения взаимной индуктивности рассматриваемых контуров целесообразно применить формулу (4-37). В данном случае

$$\begin{aligned}
S_1 &= 0,03 \text{ м}^2; & S_3 &= 0,02 \text{ м}^2; & r &= 0,5 \text{ м}; & u &= 1; & v &= 0; \\
a_1 &= 0,15 \text{ м}; & b_1 &= 0,05 \text{ м}; & a_1/r &= 0,3; & b_1/r &= 0,1; \\
a_3 &= 0,10 \text{ м}; & b_3 &= 0,05 \text{ м}; & a_3/r &= 0,2; & b_3/r &= 0,1; \\
\frac{a_1^2 + a_3^2}{2r^2} &= 0,065; & \frac{b_1^2 + b_3^2}{2r^2} &= 0,01; & \frac{5(a_1^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_3^2)}{4r^4} &= 0,00163; \\
\frac{3a_1^4 + 10a_1^2a_3^2 + 3a_3^4}{r^4} &= 0,0651; & \frac{3b_1^4 + 10b_1^2b_3^2 + 3b_3^4}{r^4} &= 0,0016.
\end{aligned}$$

Искомая взаимная индуктивность

$$\begin{aligned}
M_{13} &= -\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \frac{0,03 \cdot 0,02}{0,125} \left( 1 + 4 \cdot 0,065 - 0,01 - 2 \cdot 0,00163 + \right. \\
&\quad \left. + 0,0651 + \frac{0,0016}{8} \right) = -4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,312 = -6,298 \cdot 10^{-10} \text{ Гн}.
\end{aligned}$$

#### 4-12. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ КОНТУРОВ СО ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ

Для определения взаимной индуктивности двух сложных контуров со взаимно перпендикулярными сторонами добавляют к каждому из контуров один или несколько прямолинейных проводов так, чтобы в результате образовались только контуры, имеющие форму прямоугольников (рис. 1-31), после чего взаимная индуктивность  $M_{AB}$  рас-

считаемых контуров  $A$  и  $B$  может быть найдена по формуле

$$M_{AB} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=n+1}^{n+m} M_{ki}, \quad (4-38)$$

где  $n$  — число прямоугольников, из которых состоит контур  $A$ ;  $m$  — то же для контура  $B$ ;  $M_{ki}$  — взаимная индуктивность  $k$ -го и  $i$ -го прямоугольников.

Взаимные индуктивности  $M_{ki}$  определяются так, как указано в § 4-11.

#### 4-13. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

1. Для двух одинаковых прямоугольников (рис. 4-6, а)

$$M = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ a \ln \left( \frac{a+d_1}{a+D} \frac{d_2}{x} \right) + b \ln \left( \frac{b+d_2}{b+D} \frac{d_1}{x} \right) + 2(D - d_1 - d_2 + x) \right], \quad (4-39)$$

где  $a$  и  $b$  — стороны прямоугольников;  $x$  — расстояние между плоскостями, в которых лежат прямоугольники;  $d_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$ ;  $d_2 = \sqrt{b^2 + x^2}$ ;  $D = \sqrt{a^2 + b^2 + x^2}$ .

В частности, для двух одинаковых квадратов ( $a = b$ ,  $d_1 = d_2 = d$ ,  $D = \sqrt{2a^2 + x^2}$ )

$$M = \frac{2\mu_0}{\pi} \left[ a \ln \left( \frac{a+d}{a+D} \frac{d}{x} \right) + (D - 2d + x) \right]. \quad (4-40)$$

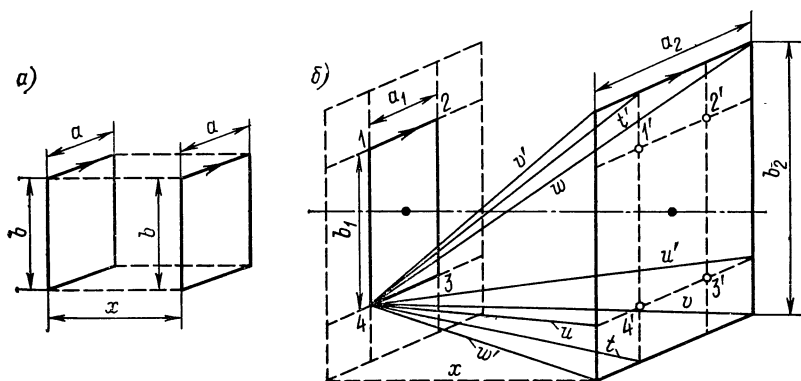


Рис. 4-6

2. Для двух неодинаковых прямоугольников с параллельными сторонами (рис. 4-6, б)

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ (a_1 + a_2) \ln \left( \frac{a_1 + a_2 + 2v}{a_1 + a_2 + 2w} \frac{t'}{t} \right) - \right. \\ \left. - (a_2 - a_1) \ln \left( \frac{a_2 - a_1 + 2w'}{a_2 - a_1 + 2v'} \frac{t'}{t} \right) + \right. \\ \left. + (b_1 + b_2) \ln \left( \frac{b_1 + b_2 + 2v'}{b_1 + b_2 + 2w} \frac{u'}{u} \right) - \right. \\ \left. - (b_2 - b_1) \ln \left( \frac{b_2 - b_1 + 2w'}{b_2 - b_1 + 2v} \frac{u'}{u} \right) - 4(v - w + v' - w') \right], \quad (4-41)$$

где  $a_1$  и  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$  — стороны прямоугольников, а прочие обозначения ясны из рис. 4-6 (точки  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $4'$  являются проекциями точек  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$  на плоскость второго контура).

В частности, для двух квадратов ( $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ ,  $t = u$ ,  $v' = v$ ,  $u' = t'$ )

$$M = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ (a_1 + a_2) \ln \left( \frac{a_1 + a_2 + 2v}{a_1 + a_2 + 2w} \frac{t'}{t} \right) - \right. \\ \left. - (a_2 - a_1) \ln \left( \frac{a_2 - a_1 + 2w'}{a_2 - a_1 + 2v} \frac{t'}{t} \right) = 2(2v - w - w') \right]. \quad (4-42)$$

**Пример 4-4.** Прямоугольный контур со сторонами  $a_1 = 10$  см и  $b_1 = 20$  см и коаксиальный с ним прямоугольный контур со сторонами  $a_2 = 20$  см и  $b_2 = 30$  см расположены на расстоянии  $x = 10$  см так, что соответственные стороны их параллельны. Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** Применяем формулу (4-41). В данном случае

$$u = \sqrt{\left( \frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2 + x^2} = 11,18 \text{ см}; \\ v = \sqrt{\left( \frac{a_2 + a_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{b_2 - b_1}{2} \right)^2 + x^2} = 18,71 \text{ см}; \\ w = \sqrt{\left( \frac{a_2 + a_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{b_2 + b_1}{2} \right)^2 + x^2} = 30,82 \text{ см}; \\ t = \sqrt{\left( \frac{b_2 - b_1}{2} \right)^2 + x^2} = 11,18 \text{ см}; \\ u' = \sqrt{\left( \frac{a_2 + a_1}{2} \right)^2 + x^2} = 18,03 \text{ см}; \\ v' = \sqrt{\left( \frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{b_2 + b_1}{2} \right)^2 + x^2} = 27,39 \text{ см}; \\ w' = \sqrt{\left( \frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{b_2 - b_1}{2} \right)^2 + x^2} = 12,25 \text{ см}; \\ t' = \sqrt{\left( \frac{b_2 + b_1}{2} \right)^2 + x^2} = 26,93 \text{ см};$$

$$\frac{t'}{t} = 2,409; \quad \frac{u'}{u} = 1,613;$$

$$\frac{a_1 + a_2 + 2v}{a_1 + a_2 + 2w} = 0,7357; \quad \ln(0,7357 \cdot 2,409) = 0,5721;$$

$$\frac{a_2 - a_1 + 2w'}{a_2 - a_1 + 2v'} = 0,5326; \quad \ln(0,5326 \cdot 2,409) = 0,2492;$$

$$\frac{b_1 + b_2 + 2v'}{b_1 + b_2 + 2w} = 0,9386; \quad \ln(0,9386 \cdot 1,613) = 0,4148;$$

$$\frac{b_2 - b_1 + 2w'}{b_2 - b_1 + 2v} = 0,7276; \quad \ln(0,7276 \cdot 1,613) = 0,1604;$$

$$4(v + v' - w - w') = 0,1212 \text{ м.}$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} (0,3 \cdot 0,5721 - 0,1 \cdot 0,2492 + 0,5 \cdot 0,4148 - 0,1 \cdot 0,1604 - \\ - 0,1212) = 0,4338 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

#### 4-14. ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ ПРАВИЛЬНЫХ КОАКСИАЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Взаимная индуктивность двух одинаковых правильных многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях и имеющих общую ось (рис. 4-7), может быть определена по следующей формуле:

$$M = M_0 f, \quad (4-43)$$

где  $M_0$  — взаимная индуктивность двух одинаковых коаксиальных круговых контуров, имеющих тот же периметр  $l$  и находящихся друг от друга на таком же расстоянии  $x$ , как и рассматриваемые многоугольники;  $f$  — поправочный коэффициент, учитывающий различие между взаимными индуктивностями многоугольников и кругов. Значения коэффициента  $f$  для равностороннего треугольника, квадрата и правильного шестиугольника даны в табл. 4-6 в зависимости от отношения  $x/a$  (или  $a/x$ ), где  $a$  — сторона многоугольника. Значения взаимной индуктивности  $M_0$  двух одинаковых коаксиальных круговых контуров можно определить так, как указано в § 5-7. Проще всего найти значения  $M_0$  по формуле (5-16) и табл. 5-3 или табл. 5-4, учитывая, что при длине окружности, равной периметру  $l$  многоугольника, радиус окружности

$$R = l/(2\pi) = na/(2\pi), \quad (4-44)$$

где  $n$  — число сторон многоугольника. При этом величина  $\xi$ , в зависимости от которой в табл. 5-3 и 5-4 даны значения  $F$ , равна

$$\xi = x/(2R) = \pi x/(na). \quad (4-45)$$

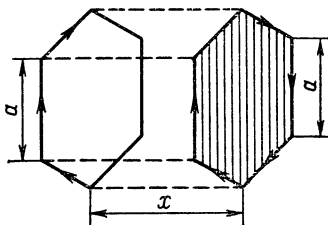


Рис. 4-7

Значения коэффициента  $f$  при  $n > 6$  можно получить графически, построив для данного значения  $x/a$  кривую зависимости  $f$  от  $1/n$  и приняв во внимание, что для окружности  $n = \infty$ ,  $1/n = 0$  и  $f = 1$ .

Для близко расположенных многоугольников, т. е. при малых значениях  $x/a$ , определение коэффициента  $f$  из табл. 4-6 становится затруднительным, так как разности соседних значений  $f$  весьма велики и при необходимости интерполировать трудно получить достаточно точный результат.

В этом случае для определения взаимной индуктивности многоугольников можно пользоваться формулами:

при  $n = 3$

$$M = \frac{3\mu_0}{2\pi} a \left( \ln \frac{a}{x} - 1,4055 + 2,209 \frac{x}{a} - \frac{11}{12} \frac{x^2}{a^2} + \frac{203}{864} \frac{x^4}{a^4} \dots \right); \quad (4-46)$$

при  $n = 4$

$$M = \frac{2\mu_0}{\pi} a \left( \ln \frac{a}{x} - 0,7740 + \frac{x}{a} - 0,0429 \frac{x^2}{a^2} - 0,109 \frac{x^4}{a^4} + \dots \right); \quad (4-47)$$

при  $n = 6$

$$M = \frac{3\mu_0}{\pi} a \left( \ln \frac{a}{x} - 0,15152 + 0,3954 \frac{x}{a} + 0,1160 \frac{x^2}{a^2} - 0,052 \frac{x^4}{a^4} + \dots \right). \quad (4-48)$$

Таблица 4-6. Значения  $f$  в формуле (4-43)

$x/a$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$	$x/a$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,50	0,4792	0,7402	0,9029
0,05	0,7245	0,8642	0,9449	0,55	4686	7329	9003
0,10	6640	8362	9350	0,60	4592	7262	8978
0,15	6217	8165	9283	0,65	4507	7200	8954
0,20	6890	8007	9231	0,70	4437	7140	8931
0,25	0,5624	0,7875	0,9188	0,75	0,4372	0,7085	0,8906
0,30	5402	7760	9150	0,80	4314	7035	8884
0,35	5215	7658	9117	0,85	4263	6988	8863
0,40	5054	7565	9087	0,90	4216	6941	8843
0,45	4914	7480	9057	0,95	4175	6899	8823
0,50	0,4792	0,7402	0,9029	1,00	0,4138	0,6861	0,8802

$a/x$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$	$a/x$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
1,0	0,4138	0,6861	0,8802	0,5	0,3808	0,6439	0,8518
0,9	4066	6783	8761	0,4	3757	6362	8440
0,8	3996	6701	8713	0,3	3714	6289	8364
0,7	3930	6613	8656	0,2	3682	6221	8297
0,6	3866	6525	8592	0,1	3662	6182	8243
0,5	0,3808	0,6439	0,8518	0,0	0,3655	0,6169	0,8225

**Пример 4-5.** Два правильных коаксиальных треугольника расположены так, что их соответственные стороны параллельны. Сторона каждого треугольника равна  $a = 5$  см, расстояние между центрами треугольников равно  $x = 8$  см. Определить взаимную индуктивность треугольников.

**Решение.** Определяем взаимную индуктивность рассматриваемых контуров по формуле (4-43). В данном случае

$$a/x = 5/8 = 0,625; \quad n = 3; \quad l = 3 \cdot 5 = 15 \text{ см};$$

$$R = 15/(2\pi) = 2,387 \text{ см}; \quad 1/\xi = 3 \cdot 5/(8\pi) = 0,5967.$$

Из табл. 4-6 при  $n = 3$  и  $a/x = 0,625$  находим  $f = 0,3882$ .

По табл. 5-4 при  $\gamma = 1/\xi = 0,5967$  находим  $F = 0,4145$ . Следовательно, по формуле (5-16)

$$M_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot 2,387 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4145 = 0,9894 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = fM_0 = 0,3882 \cdot 0,9894 \cdot 10^{-9} = 0,3841 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}.$$

**Пример 4-6.** Решить предыдущий пример при расстоянии между контурами, равном  $x = 1$  см.

**Решение.** Так как контуры расположены близко друг к другу, то можно воспользоваться формулой (4-46). В данном случае

$$\frac{a}{x} = \frac{5}{1} = 5; \quad \frac{x}{a} = \frac{1}{5} = 0,2; \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 0,04; \quad \left(\frac{x}{a}\right)^4 = 1,6 \cdot 10^{-3};$$

$$M = \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 5 \left( \ln 5 - 1,4055 + 2,209 \cdot 0,2 - \right.$$

$$\left. - \frac{11}{22} \cdot 0,04 + \frac{203}{864} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \dots \right) \cdot 10^{-2} =$$

$$= 3 \cdot 10^{-8} (1,6094 + 1,4055 + 0,4418 - 0,0367 + 0,0004 \dots) =$$

$$= 1,827 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}.$$

#### 4-15. ОСОБЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ИНДУКТИВНОСТЕЙ ПЛОСКИХ КОНТУРОВ

Пользуясь методом наложения и применяя теоремы о двух и трех контурах (§ 1-6 и 1-7), можно выразить собственные и взаимные индуктивности одних контуров через индуктивности других контуров. В ряде случаев таким путем удастся свести расчет неизвестных индуктивностей к расчету индуктивностей нескольких контуров, для которых уже имеются готовые формулы. Подобный метод решения задачи в тех случаях, когда он возможен, обычно оказывается более простым, чем метод участков. Ниже этот метод демонстрируется на нескольких примерах.

Пусть, например, мы имеем два сектора 1 и 3 одной окружности (рис. 4-8). Рассматривая контур  $OabcdO$  как совокупность трех контуров 1, 2 и 3 и применяя теорему о трех контурах

$$M_{13} = \frac{1}{2} (L_{123} + L_2 - L_{12} - L_{23}), \quad (4-49)$$



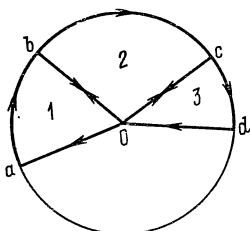


Рис. 4-8

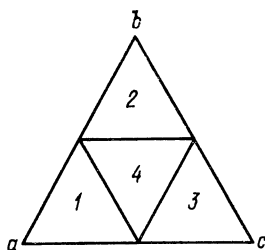


Рис. 4-9

можно определение взаимной индуктивности контуров 1 и 3 свести к вычислению индуктивностей нескольких секторов, каждая из которых определяется по простой формуле (4-26).

Зная  $M_{13}$ , можно легко определить собственную индуктивность  $L_{13}$  контура  $OabOcdO$ , состоящего из контуров 1 и 3:

$$L_{13} = L_1 + L_3 + 2M_{13}. \quad (4-50)$$

Аналогичным путем находятся индуктивности любых контуров, состоящих из нескольких секторов одной окружности.

Рассматривая контур  $abc$ , имеющий форму правильного треугольника (рис. 4-9), как совокупность четырех контуров 1, 2, 3, 4, имеющих такую же форму, можем написать

$$L_{1234} = 4L_1 + 6M_{12} + 6M_{14}. \quad (4-51)$$

По теореме о двух контурах

$$2M_{14} = L_{14} - L_1 - L_4 = L_{14} - 2L_1 \quad (4-52)$$

и, следовательно,

$$M_{12} = \frac{1}{6} (L_{1234} + 2L_1 - 3L_{14}). \quad (4-53)$$

Таким образом, взаимная индуктивность контуров 1 и 2 выражена через собственные индуктивности ромба с углом  $60^\circ$  и двух равносторонних треугольников, т. е. через величины, для которых имеются готовые формулы (4-16) и (4-10). Зная  $M_{12}$ , легко определить собственные индуктивности контуров (1, 2), (1, 2, 3) и (1, 2, 4).

Например, для равнобокой трапеции (1, 2, 4) с углом  $60^\circ$  имеем  $L_{124} = 3L_1 + 4M_{14} + 2M_{12}$ , причем  $M_{12}$  и  $M_{14}$  определяются по формулам (4-53) и (4-52).

Рассматривая контур, имеющий форму правильного шестиугольника (рис. 4-10), как совокупность двух трапеций (1, 2, 3) и (4, 5, 6), на основании теоремы о двух контурах имеем

$$M(1, 2, 3 \times 4, 5, 6) = \frac{1}{2} [L(1, 2, 3, 4, 5, 6) - 2L(1, 2, 3)].$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} M(1, 2, 3 \times 4, 5, 6) &= M(1 \times 4) + M(1 \times 5) + M(1 \times 6) + \\ &+ M(2 \times 4) + M(2 \times 5) + M(2 \times 6) + M(3 \times 4) + M(3 \times 5) + \\ &+ M(3 \times 6) = 3M(1 \times 4) + 4M(1 \times 3) + 2M(1 \times 2), \end{aligned} \quad (4-54)$$

откуда легко выразить  $M(1 \times 4)$  через  $L(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ,  $L(1, 2, 3)$ ,  $M(1 \times 3)$  и  $M(1 \times 2)$ . Пользуясь еще формулами (4-52) и (4-53), можно выразить  $M(1 \times 4)$  через собственные индуктивности шестиугольника, трапеции, ромба и треугольника.

Ограничившись приведенными примерами, рассмотрим еще следующий метод, применимый к расчету собственных индуктивностей целого класса плоских контуров [9]. Пусть имеем контур, состоящий из части правильного многоугольника и двух прямых, совпадающих с его радиусами или апофемами, например контур  $OabcdeO$  на рис. 4-11. Дополняя контур до правильного многоугольника, можем написать

$$L(1) = L(1, 2) + L(2) + 2M(1, 2 \times 2),$$

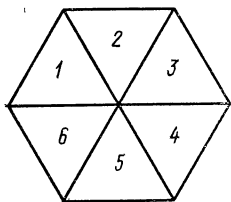


Рис. 4-10

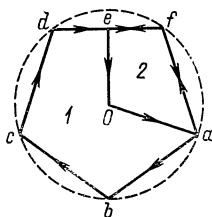


Рис. 4-11

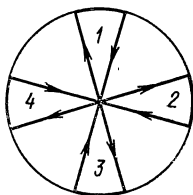


Рис. 4-12

где  $L(1)$ ,  $L(2)$ ,  $L(1, 2)$  — собственные индуктивности контуров  $OabcdeO$ ,  $OafeO$ ,  $abcdefa$ , а  $M(1, 2 \times 2)$  — взаимная индуктивность контуров  $abcdefa$  и  $OafeO$ . С другой стороны, из соображений симметрии следует, что поток взаимной индукции, обусловленный током в контуре  $abcdefa$  и пронизывающий контур  $OafeO$ , относится к потоку самоиндукции контура  $abcdefa$ , как угол  $\alpha = \angle aOe$  к  $2\pi$ , и имеет обратный знак. Поэтому

$$M(1, 2 \times 2) = -\frac{\alpha}{2\pi} L(1, 2)$$

и, следовательно,

$$L(1) = (1 - \alpha/\pi) L(1, 2) + L(2). \quad (4-55)$$

Индуктивность  $L(1, 2)$  правильного многоугольника известна. Если, кроме того, известна индуктивность  $L(2)$  «вырезанной» из него части, то последняя формула позволяет весьма просто определить неизвестную индуктивность контура  $1$ .

Указанный метод применим к контурам, получаемым не только из правильных многоугольников, но и из других симметричных фигур (круг, прямоугольник, ромб). Этот метод можно распространить и на контуры с несколькими входящими углами.

Пусть, например, контур состоит из нескольких одинаковых и симметрично расположенных секторов  $(1, 2, 3, 4)$  одной окружности (рис. 4-12). Удалив один из секторов (например,  $1$ ), получим фигуру, состоящую из секторов  $2, 3, 4$ . Так как в силу симметрии

$$M(1, 2, 3, 4 \times 1) = -\frac{1}{4} L(1, 2, 3, 4),$$

то

$$\begin{aligned} L(2, 3, 4) &= L(1, 2, 3, 4) + L(1) + 2M(1, 2, 3, 4 \times 1) = \\ &= \frac{1}{2} L(1, 2, 3, 4) + L(1), \end{aligned} \quad (4-56)$$

и, следовательно, если индуктивность исходного контура (1, 2, 3, 4) известна, то можно легко определить индуктивность контура (2, 3, 4).

При пользовании методами, рассмотренными в настоящем параграфе, следует иметь в виду, что, выразив собственную или взаимную индуктивность контуров через собственные индуктивности  $L(k)$  других контуров, практически нужно суммировать не  $L(k)$ , а лишь их составляющие  $N(k)$ , так как в соответствии со сказанным в § 4-1 и 4-11 результат сложения составляющих вида  $G(k)$ , равный  $(-G)$  для собственной индуктивности и нулю для взаимной индуктивности контуров, не имеющих общих участков, можно записать заранее.

## ГЛАВА ПЯТАЯ

---

### ИНДУКТИВНОСТИ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ

---

#### 5-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В настоящей главе даны формулы, таблицы и кривые для расчета собственных и взаимных индуктивностей круговых колец, причем предполагается, что линейные размеры поперечного сечения колец малы по сравнению с их радиусами, т. е. кольца рассматриваются как линейные контуры.

2. Для расчета индуктивностей **м а с с и в н ы х** (нелинейных) колец при низкой частоте могут быть использованы формулы, таблицы и кривые, относящиеся к катушкам соответствующей формы и размеров (гл. 6—9). Собственная индуктивность массивного кольца получается путем деления собственной индуктивности соответствующей катушки (без поправки на изоляцию) на квадрат числа витков. Взаимная индуктивность двух массивных колец равна взаимной индуктивности соответствующих катушек, деленной на произведение их чисел витков.

3. Приведенные в настоящей главе формулы дают возможность с достаточной степенью точности определить собственные индуктивности линейных круговых колец во всех случаях, представляющих практический интерес.

Достаточно точно и в то же время просто могут быть найдены взаимные индуктивности коаксиальных круговых контуров. Значительно сложнее и менее точно определяются взаимные индуктивности контуров с несовпадающими осями (§ 5-9—5-12). Относящиеся к этому случаю таблицы вслед-

ствие погрешностей, возникающих при интерполировании, не всегда обеспечивают достаточную точность расчета, а формулы, дающие взаимную индуктивность в виде бесконечных рядов, требуют громоздких вычислений, так как эти ряды, как правило, сходятся довольно медленно. Ввиду этого во всех случаях, когда необходимо иметь не общее выражение взаимной индуктивности, а лишь ее числовое значение для заданных размеров и заданного взаимного расположения контуров, может оказаться целесообразным применение метода однократного численного интегрирования, изложенного в § 5-12. Следует отметить, что этот метод применим при любом взаимном расположении контуров, т. е. и в тех случаях, для которых расчетных формул и таблиц вообще не существует.

4. В настоящей главе под осью контура (не смешивать с осевой линией провода!) всюду понимается ось, проходящая через центр контура перпендикулярно к его плоскости.

## 5-2. ИНДУКТИВНОСТЬ КРУГОВОГО КОЛЬЦА КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

### 1. При низкой частоте

$$L = \mu_0 R \left[ \ln \frac{8R}{r} - \frac{7}{4} + \frac{r^2}{8R^2} \left( \ln \frac{8R}{r} + \frac{1}{3} \right) \right], \quad (5-1)$$

где  $R$  — радиус кольца (радиус осевой линии провода);  
 $r$  — радиус провода (рис. 5-1, а).

Формула верна с точностью до членов порядка  $(r/R)^4$ .

Если  $R \gg r$ , то

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{r} - \frac{7}{4} \right). \quad (5-2)$$

Погрешность формулы (5-2) при  $R = 5r$  составляет около 1 %.

2. При весьма высокой частоте с точностью до членов порядка  $(r/R)^4$

$$L = \mu_0 R \left[ \left( 1 - \frac{r^2}{4R^2} \ln \frac{8R}{r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r^2}{2R^2} \right) \ln \frac{8R}{r} - 2 - \frac{r^2}{16R^2} \right]. \quad (5-3)$$

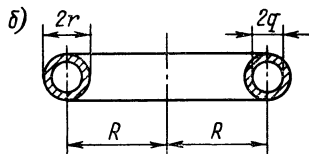
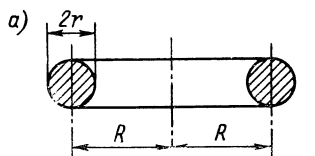


Рис. 5-1

Если  $R \gg r$ , то

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{r} - 2 \right). \quad (5-4)$$

Погрешность формулы (5-4) при  $R = 10r$  составляет около 1,1 %.

3. При любой частоте с точностью до членов порядка  $(r/R)^2$

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{r} - 2 + \frac{\xi}{4} \right), \quad (5-5)$$

где  $\xi$  определяется так, как указано в § 2-2 (например, по табл. 2-1). Если  $\mu \neq \mu_0$  то

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{r} - 2 + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi}{4} \right). \quad (5-6)$$

**Пример 5-1.** Круговое кольцо радиуса  $R = 10$  см выполнено из медного провода кругового сечения, имеющего радиус  $r = 5$  мм.

Определить индуктивность кольца при низкой частоте, весьма высокой частоте и частоте  $f = 2000$  Гц.

**Решение.** В данном случае

$$\frac{8R}{r} = 160; \quad \ln \frac{8R}{r} = 5,075; \quad \frac{r}{R} = 5 \cdot 10^{-2}; \quad \frac{r^2}{R^2} = 2,5 \cdot 10^{-3}.$$

1. При низкой частоте, применяя формулу (5-2), имеем

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,1 (5,075 - 1,75) = 4,180 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

По более точной формуле (5-1)

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,1 \left[ 5,075 - 1,75 + \frac{2,5}{8} \cdot 10^{-3} \left( 5,075 + \frac{1}{3} \right) \right] = \\ = 4\pi \cdot 10^{-8} (3,325 + 3,125 \cdot 10^{-4} \cdot 5,408) = 4,182 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$$

Уточнение по сравнению с формулой (5-2) невелико.

2. При весьма высокой частоте, применяя формулу (5-4), имеем

$$L = 4\pi \cdot 10^{-8} (5,075 - 2) = 4\pi \cdot 10^{-8} \cdot 3,075 = 3,865 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

По более точной формуле (5-3)

$$L = 4\pi \cdot 10^{-8} \left[ \left( 1 - \frac{1}{4} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 5,075 + \frac{2,5}{2} \cdot 10^{-3} \right) 5,075 - \right. \\ \left. - 2 - \frac{1}{16} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \right] = 3,852 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Уточнение по сравнению с формулой (5-4) невелико.

3. При частоте  $f = 2000$  Гц пользуемся формулой (5-5), для чего находим

$$k = \sqrt{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 957,3; \\ kr = 957,3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 4,786.$$

По табл. 2-1 находим  $\xi = 0,5802$ . Искомая индуктивность

$$L = 4\pi \cdot 10^{-8} (5,075 - 2 + 0,5802/4) = 4,048 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

### 5-3. ИНДУКТИВНОСТЬ КРУГОВОГО КОЛЬЦА ИЗ ПОЛОГО ПРОВОДА КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

1. При низкой частоте

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{cr} - 2 \right), \quad (5-7)$$

где  $R$  — радиус кольца (радиус осевой линии провода);  $r$  — наружный радиус поперечного сечения провода (рис. 5-1, б);  $c$  — коэффициент, значения которого даны в табл. 10-1.

Для провода из вещества с магнитной проницаемостью  $\mu$

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{r} - 2 - \frac{\mu}{\mu_0} \ln c \right). \quad (5-8)$$

2. При весьма высокой частоте

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{r} - 2 \right). \quad (5-9)$$

3. При любой частоте

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{r} - 2 \right) + L_i, \quad (5-10)$$

где  $L_i$  — внутренняя индуктивность провода, определяемая так, как указано в § 2-3.

**Пример 5-2.** Круговое кольцо радиуса  $R = 10$  см выполнено из полого медного провода, внутренний и наружный радиусы которого равны соответственно  $q = 0,4$  см,  $r = 0,5$  см.

Определить индуктивность провода при низкой частоте, весьма высокой частоте и частоте  $f = 10^4$  Гц.

**Решение.**

1. При низкой частоте, применяя формулу (5-7), имеем

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,1 \left( \ln \frac{80}{0,5 \cdot 0,9358} - 2 \right) = 4\pi \cdot 10^{-8} \cdot 3,142 = 3,949 \cdot 10^{-7} \text{ Гн},$$

причем значение  $c$  взято из табл. 10-1 для  $q/r = 0,8$ .

2. При весьма высокой частоте

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,1 \left( \ln \frac{80}{0,5} - 2 \right) = 4\pi \cdot 10^{-8} \cdot 3,076 = 3,867 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

3. При частоте  $f = 10^4$  Гц применяем формулу (5-10). Учитывая, что толщина стенки провода  $t \ll r$ , для определения  $L_i$  пользуемся формулой (2-19). В данном случае

$$m = \sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,8 \cdot 10^{17}} = 3026;$$

$$t = r - q = 10^{-3} \text{ м}; \quad mt = 3,026;$$

$$\sin mt = 0,1153; \quad \text{sh } mt = 10,28; \quad 10,28 - 0,1153 = 10,16;$$

$$\cos mt = -0,9933; \quad \text{ch } mt = 10,33; \quad 10,33 + 0,9933 = 11,32.$$

Внутренняя индуктивность

$$L_i = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 0,1}{2\pi \cdot 3026 \cdot 0,005} \frac{10,16}{11,32} = 0,8308 \cdot 0,8975 \cdot 10^{-8} = 7,5 \cdot 10^{-9} \text{ Гн};$$

$$L = L_{\infty} + L_i = 3,942 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

#### 5.4. ИНДУКТИВНОСТЬ КРУГОВОГО КОЛЬЦА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При низкой частоте (рис. 5-2)

$$L = \frac{\mu_0 R}{2\pi} F, \quad (5-11)$$

где  $R$  — радиус кольца (радиус осевой линии провода), а значения  $F$  могут быть определены по кривым рис. 5-3 в зависимости от значений  $\alpha = a/(2R)$  и  $\rho = r/(2R)$ , где  $a$  и  $r$  — размеры поперечного сечения провода в осевом и радиальном направлениях. Для определения  $L$  может также служить формула

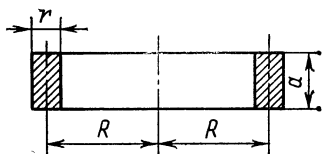


Рис. 5-2

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a+r} - 0,5 \right). \quad (5-12)$$

Более точные значения  $L$  при  $\alpha > \rho$  можно найти по формуле

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{4}{\alpha + \rho} - \frac{1}{2} + \frac{3\alpha^2 + \rho^2}{24} \ln \frac{4}{\sqrt{\alpha^2 + \rho^2}} + f + \frac{\alpha^2}{4} f_1 \right), \quad (5-13)$$

взяв значение  $f$  из табл. 5-1, а значение  $f_1$  — из табл. 5-2.

При  $\alpha < \rho$  последний член в скобках следует заменить на  $\frac{\rho^2}{4} f_2$ , взяв значение  $f_2$  из табл. 5-2.

Таблица 5-1. Значения  $f$  для кольца прямоугольного сечения

$\rho$	$\alpha = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0003	-0,0007	-0,0014
0,1	0,0000	-0,0018	-0,0021	-0,0027	-0,0032	-0,0038
0,2	0,0001	-0,0021	-0,0018	-0,0021	-0,0026	-0,0034
0,3	0,0002	-0,0023	-0,0019	-0,0019	-0,0021	-0,0028
0,4	0,0004	-0,0021	-0,0017	-0,0015	-0,0016	-0,0021
0,5	0,0009	-0,0016	-0,0014	-0,0011	-0,0010	-0,0015

2. При весьма высокой частоте

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{g} - 2 \right), \quad (5-14)$$

где  $R$  — радиус кольца;  $g$  — среднее геометрическое расстояние периметра поперечного сечения провода от самого себя [см. формулу (10-18)].

**Пример 5-3.** Круговое кольцо радиуса  $R = 5$  см выполнено из медного провода прямоугольного сечения  $ar$ , причем  $a = 0,5$  см и  $r = 1$  см. Определить индуктивность провода при низкой частоте и при весьма высокой частоте.

**Решение.** В данном случае  $\alpha = 0,5/10 = 0,05$ ;  $\rho = 1/10 = 0,1$ .

1. При низкой частоте по кривым рис. 5-3 находим  $F = 17,5$ . Следовательно,

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,05}{2\pi} \cdot 17,5 = 1,75 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

По формуле (5-12)

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,05 \left( \ln \frac{40}{1,5} - 0,5 \right) = 2\pi \cdot 10^{-8} \cdot 2,783 = 1,749 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Определяем  $L$  по формуле (5-13). В данном случае

$$\frac{4}{\alpha + \rho} = \frac{4}{0,15}; \quad \ln \frac{4}{\alpha + \rho} = 3,2834;$$

$$\frac{3\alpha^2 + \rho^2}{24} = 0,000728; \quad \ln \frac{4}{\sqrt{\alpha^2 + \rho^2}} = \ln 35,78 = 3,577;$$

$$7,28 \cdot 3,577 \cdot 10^{-4} = 2,6 \cdot 10^{-3}.$$

Таблица 5-2. Значения  $f_1$  и  $f_2$  для кольца прямоугольного сечения

$\rho/\alpha$	$f_1$	$\rho/\alpha$	$f_1$	$\alpha/\rho$	$f_2$	$\alpha/\rho$	$f_2$
0,00	0,1250	0,5	0,3066	0,00	0,5972	0,5	0,6773
0,05	0,1269	0,6	0,3839	0,05	0,5986	0,6	0,7023
0,1	0,1325	0,7	0,4739	0,1	0,6023	0,7	0,7287
0,2	0,1548	0,8	0,5760	0,2	0,6151	0,8	0,7564
0,3	0,1916	0,9	0,6902	0,3	0,6329	0,9	0,7856
0,4	0,2423	1,0	0,8162	0,4	0,6540	1,0	0,8162
0,5	0,3066			0,5	0,6773		

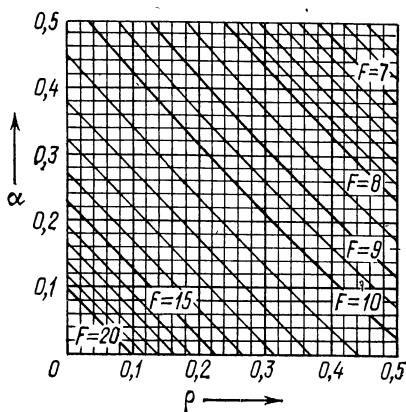


Рис. 5-3



По табл. 5-1 при  $\alpha = 0,05$  и  $\rho = 0,1$  находим  $f = -0,0009$ . По табл. 5-2 при  $\alpha/\rho = 0,5$  находим  $f_2 = 0,6773$ ;

$$\frac{\rho^2}{4} f_2 = 0,0017.$$

Искомая индуктивность

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,05 (3,2834 + 0,0026 - 0,5000 - 0,0009 + 0,0017) = \\ = 2\pi \cdot 10^{-8} \cdot 2,787 = 1,751 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Различные формулы дают результаты, мало отличающиеся друг от друга.

2. При весьма высокой частоте пользуемся формулой (5-14), определяя  $\ln g$  по формуле (10-18). Подставляя в эту формулу  $b = 0,5$  см и  $c = 1$  см, имеем

$$2,25 \cdot \ln g = 0,25 \cdot \ln 0,5 + 1 \cdot \ln 1 + 2 \cdot 0,5 \ln \sqrt{1,25} + \\ + 1 \cdot 1,5 \operatorname{arctg} 0,5 + 0,5 \cdot 1,5 \operatorname{arctg} 2 - \frac{3}{2} \cdot 2,25 = -1,911,$$

откуда  $\ln g = -0,8493$ .

Искомая индуктивность

$$L = 2\pi \cdot 10^{-8} (\ln 40 + 0,8493 - 2) = 2\pi \cdot 10^{-8} \cdot 2,538 = 1,595 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

## 5-5. ИНДУКТИВНОСТЬ КРУГОВОГО КОЛЬЦА СЛОЖНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Если сечение кругового кольца ограничено ломаной линией со взаимно перпендикулярными сторонами (см., например, рис. 5-4), то кольцо можно представить в виде совокупности нескольких ( $n$ ) колец, сечениями которых являются прямоугольники (1 и 2 на рис. 5-4).

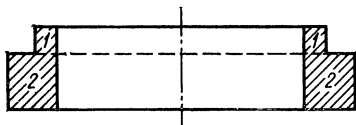


Рис. 5-4

Индуктивность  $L$  основного кольца при низкой частоте может быть найдена по формуле (1-61), если понимать в ней под  $F(A)$  произведение  $s^2 L$ , под  $F(k)$  — произведения вида  $s_k^2 L_k$

и под  $F(k \times i)$  — произведения вида  $s_k s_i M_{ki}$ , где  $L_k$  — собственная индуктивность кольца, сечением которого является прямоугольник  $k$ ;  $M_{ki}$  — взаимная индуктивность колец, сечениями которых являются прямоугольники  $k$  и  $i$ ;  $s$  — площадь сечения кольца;  $s_k$  и  $s_i$  — площади прямоугольников  $k$  и  $i$  (например, для рис. 5-4  $s^2 L = s_1^2 L_1 + s_2^2 L_2 + 2s_1 s_2 M_{12}$ ).

Индуктивности  $L_k$  определяются, как указано в предыдущем параграфе. Взаимные индуктивности  $M_{ki}$  можно выразить через собственные индуктивности нескольких колец по формулам (1-50)–(1-58); их можно определить также по формулам и методам главы седьмой, если в формулах для взаимных индуктивностей соответствующих катушек положить числа витков равными единице.

## 5-6. ИНДУКТИВНОСТЬ КРУГОВОГО КОЛЬЦА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

1. При низкой частоте

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{g} - 2 \right), \quad (5-15)$$

где  $R$  — радиус кольца (радиус осевой линии провода);  $g$  — среднее геометрическое расстояние площади поперечного сечения провода от самой себя (§ 1-8).

2. При весьма высокой частоте справедлива та же формула (5-15), но под  $g$  следует понимать среднее геометрическое расстояние не площади, а периметра поперечного сечения провода от самого себя (§ 1-8).

## 5-7. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОАКСИАЛЬНЫХ КРУГОВЫХ КОНТУРОВ ОДНОГО РАДИУСА

Для коаксиальных круговых контуров одного радиуса

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} RF, \quad (5-16)$$

где  $R$  — радиус контуров;  $F$  — величина, значения которой даны в табл. 5-3 и 5-4 в функции от отношения  $\xi = x/(2R)$  или от обратного отношения  $\gamma = 1/\xi = 2R/x$ .

Таблица 5-3. Значения  $F$  в формуле (5-16) для одинаковых контуров

$\xi$	$F$	$\xi$	$F$	$\xi$	$F$	$\xi$	$F$
0,00	—	0,25	11,126	0,50	4,941	0,75	2,528
1	50,16	26	10,723	51	4,800	76	2,4659
2	41,47	27	10,340	52	4,664	77	2,4060
3	36,39	28	9,974	53	4,532	78	2,3479
4	32,80	29	9,627	54	4,405	79	2,2916
0,05	30,03	0,30	9,296	0,55	4,283	0,80	2,2369
6	27,77	31	8,980	56	4,165	81	2,1838
7	25,88	32	8,679	57	4,051	82	2,1323
8	24,24	33	8,390	58	3,940	83	2,0823
9	22,81	34	8,114	59	3,834	84	2,0337
0,10	21,539	0,35	7,850	0,60	3,730	0,85	1,9865
11	20,396	36	7,597	61	3,631	86	1,9407
12	19,361	37	7,354	62	3,534	87	1,8962
13	18,417	38	7,121	63	3,441	88	1,8530
14	17,550	39	6,898	64	3,351	89	1,8109
0,15	16,750	0,40	6,684	0,65	3,263	0,90	1,7701
16	16,009	41	6,477	66	3,179	91	1,7304
17	15,319	42	6,279	67	3,097	92	1,6918
18	14,676	43	6,089	68	3,018	93	1,6542
19	14,073	44	5,906	69	2,941	94	1,6178
0,20	13,507	0,45	5,730	0,70	2,866	0,95	1,5822
21	12,975	46	5,560	71	2,794	96	1,5477
22	12,473	47	5,396	72	2,725	97	1,5141
23	12,000	48	5,239	73	2,657	98	1,4814
24	11,551	49	5,087	74	2,591	99	1,4496
0,25	11,126	0,50	4,941	0,75	2,528	1,00	1,4186

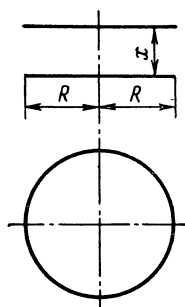


Рис. 5-5

Через  $x$  обозначено расстояние между плоскостями, в которых расположены контуры (рис. 5-5).

Табл. 5-3 и 5-4 неудобны для интерполирования при малых значениях  $\xi$  или соответственно  $\gamma$ , так как при этом соседние табличные значения величины  $F$  значительно отличаются друг от друга.

Для обеспечения необходимой степени точности в указанных случаях можно пользоваться следующими формулами:

при малом значении  $\xi$  (контуры расположены близко друг к другу)

$$M = \mu_0 R \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{15}{64} \xi^4 + \frac{35}{256} \xi^6 + \dots \right) \ln \frac{4}{\xi} - 2 - \frac{1}{4} \xi^2 + \frac{31}{128} \xi^4 - \frac{247}{1536} \xi^6 + \dots \right]; \quad (5-17)$$

Таблица 5-4. Значения  $F$  в формуле (5-16) для одинаковых контуров

$\gamma$	$F$	$\gamma$	$F$	$\gamma$	$F$	$\gamma$	$F$
1,00	1,4186	0,75	0,7345	0,50	0,25999	0,25	0,03683
0,99	1,3882	74	7110	49	24622	24	3270
98	3579	73	6879	48	23287	23	2888
97	3279	72	6651	47	21994	22	2535
96	2982	71	6427	46	20743	21	2212
0,95	1,2686	0,70	0,6206	0,45	0,19533	0,20	0,019165
94	2393	69	5989	44	18365	19	16478
93	2103	68	5775	43	17239	18	14049
92	1814	67	5565	42	16154	17	11865
91	1529	66	5359	41	15109	16	0,009916
0,90	1,1246	0,65	0,5157	0,40	0,14106	0,15	0,008189
89	0966	64	4959	39	13143	14	6672
88	0688	63	4764	38	12221	13	5353
87	0413	62	4573	37	11338	12	4218
86	1,0141	61	4387	36	10495	11	3255
0,85	0,9871	0,60	0,4204	0,35	0,09692	0,10	0,002449
84	9605	59	4025	34	8926	09	1788
83	9341	58	3850	33	8200	08	1257
82	9081	57	3680	32	7510	07	0,000843
81	8823	56	3513	31	6858	06	0532
0,80	0,8569	0,55	0,3350	0,30	0,06242	0,05	0,000308
79	8318	54	3192	29	5662		
78	8070	53	3038	28	5116		
77	7825	52	2888	27	4605		
76	7583	51	2742	26	4128		
0,75	0,7345	0,50	0,2600	0,25	0,03683		

при малом значении  $\gamma$  (контуры расположены далеко друг от друга)

$$M = \frac{\mu_0 \pi R}{16} \gamma^3 \left( 1 - \frac{3}{4} \gamma^2 + \frac{75}{128} \gamma^4 - \frac{245}{512} \gamma^6 + \right. \\ \left. + \frac{6615}{16384} \gamma^8 - \dots \right). \quad (5-18)$$

Формулы настоящего параграфа приближенно справедливы и для круговых колец, т. е. контуров с конечными размерами поперечного сечения; в этом случае при расчете взаимной индуктивности контуров под  $x$  следует понимать среднее геометрическое расстояние между ближайшими друг к другу площадями их поперечных сечений.

**Пример 5-4.** Одинаковые коаксиальные круговые контуры радиуса  $R = 10$  см расположены на расстоянии  $x = 4$  см друг от друга.

Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** В данном случае  $\xi = 4/20 = 0,2$ , и из табл. 5-3 находим  $F = 13,51$ .

Следовательно, по формуле (5-16)

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot 0,1 \cdot 13,51 = 1,351 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Применяя формулу (5-17), имеем

$$\xi^2 = 4 \cdot 10^{-2}; \quad \xi^4 = 1,6 \cdot 10^{-3}; \quad \ln \frac{4}{\xi} = \ln 20 = 2,996;$$

$$1 + \frac{3}{4} \xi^2 = 1,030.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,1 (1,030 \cdot 2,996 - 2 - 0,01) = \\ = 4\pi \cdot 1,076 \cdot 10^{-7} = 1,353 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

**Пример 5-5.** Контуры предыдущего примера расположены на расстоянии  $x = 50$  см друг от друга. Определить их взаимную индуктивность.

**Решение.** В данном случае  $\gamma = 20/50 = 0,4$ , и из табл. 5-4 находим  $F = 0,1411$ . Следовательно, по формуле (5-16)

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot 0,1 \cdot 0,1411 = 1,411 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

Применяя формулу (5-18), имеем

$$\gamma^2 = 0,16; \quad \gamma^3 = 6,4 \cdot 10^{-2}; \quad \gamma^4 = 2,56 \cdot 10^{-2}; \quad \gamma^6 = 4,096 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{3}{4} \gamma^2 = 0,12; \quad \frac{75}{128} \gamma^4 = 1,5 \cdot 10^{-2}; \quad \frac{245}{512} \gamma^6 \approx 1,96 \cdot 10^{-3}.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 0,1}{16} \cdot 6,4 \cdot 10^{-2} (1 - 0,12 + 0,015 - 0,0020) = \\ = 1,579 \cdot 0,8930 \cdot 10^{-9} = 1,410 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

## 5-8. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОАКСИАЛЬНЫХ КРУГОВЫХ КОНТУРОВ С НЕОДИНАКОВЫМИ РАДИУСАМИ

Обозначим через  $R_1$  и  $R_2$  радиусы контуров, через  $x$  — расстояние между плоскостями, в которых они расположены (рис. 5-6). Тогда

$$M = \frac{\mu_0 R_1}{2\pi} \varphi, \quad (5-19)$$

где  $\varphi$  — величина, значения которой могут быть найдены по кривым рис. 5-7, 5-8 и 5-9. На этих рисунках по оси абсцисс отложены значения величины  $\xi = x/(2R_1)$ , а по оси ординат — значения величины  $\delta = R_2/R_1$ ; значения  $\varphi$  указаны на кривых.

Пользуясь кривыми рис. 5-10, дающими значения взаимной индуктивности  $M$  двух **о д и н а к о в ы х** круговых контуров диаметром  $D$ , расположенных на расстоянии  $x$  друг от друга, и имея чертеж двух рассматриваемых **н е о д и н а к о в ы х** контуров  $11'$  и  $22'$ , выполненный на кальке в масштабе рис. 5-10, можно определить взаимную индуктивность контуров  $11'$  и  $22'$ , не прибегая к вычислениям. Для этого кальку с изображением рассматриваемых

контуров накладывают на рис. 5-10 так, чтобы точка 1 совпала с началом координат, а точка 2 лежала на оси абсцисс (рис. 5-11). Тогда значение  $M$  определится по положению точки  $m$ , лежащей на пересечении вертикальной прямой  $2m$  и окружности  $2'm$ , проходящей через точку  $2'$  (например, для контуров рис. 5-11 получаем  $M = 2,4 \cdot 10^{-8}$  Гн).

Следует обратить внимание на то, что расстояние и диаметры  $D$  на рис. 5-10 выражены в сантиметрах, а значения взаимной индуктивности  $M$  на кривых даны в *генри*.

Если размеры контуров превышают размеры рис. 5-10, то при построении на кальке их уменьшают в несколько

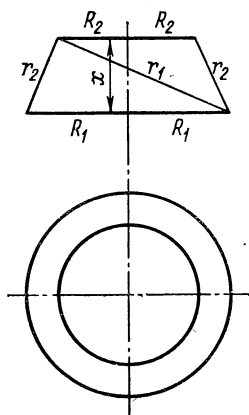


Рис. 5-6

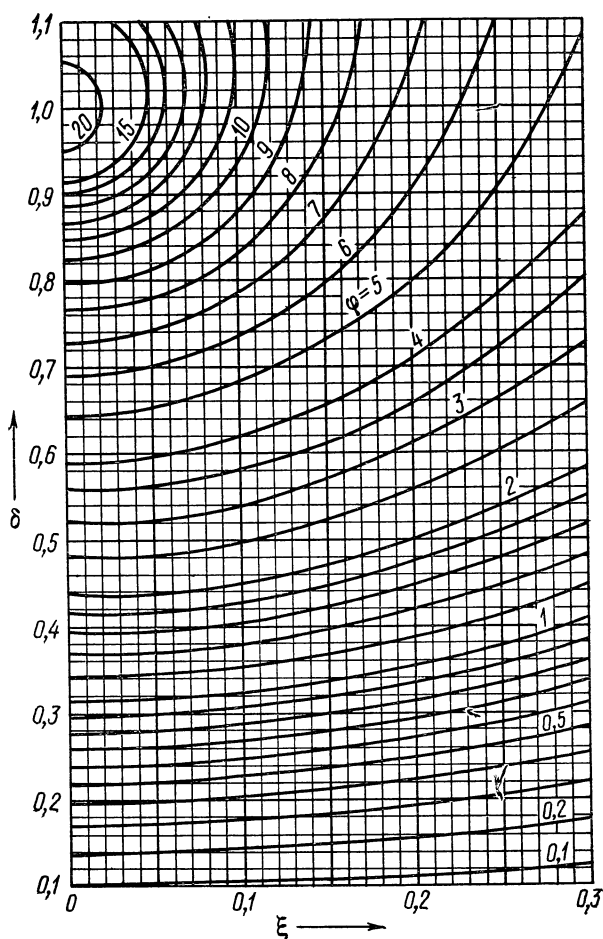


Рис. 5-7

раз, в соответствии с чем полученное из рис. 5-10 значение  $M$  во столько же раз увеличивают.

Указанный здесь способ определения взаимной индуктивности не одинаковых коаксиальных контуров основан на том, что эта величина, как нетрудно показать, равна взаимной индуктивности двух одинаковых коаксиальных контуров  $1m'$  и  $2m$  (рис. 5-12).

Более точные значения взаимной индуктивности коаксиальных круговых контуров можно найти по формуле

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{R_1 R_2} F, \quad (5-20)$$

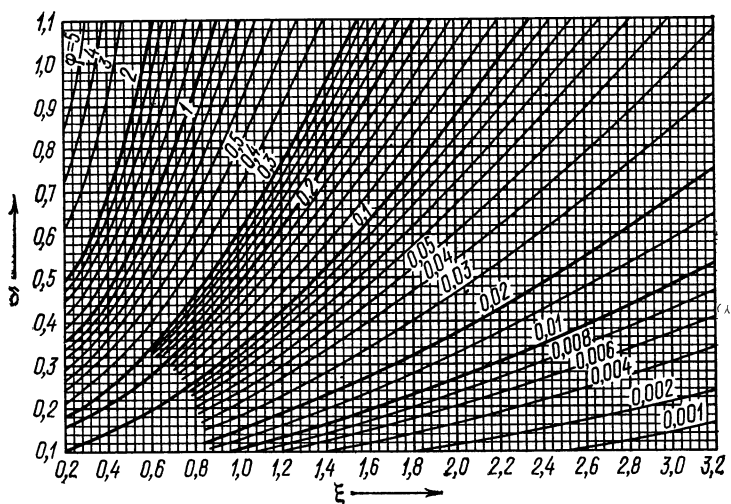


Рис. 5-8

взяв значение  $F$  или  $\lg F$  из табл. 5-5, где эти значения даны в функции от величины

$$m^2 = \frac{(R_1 - R_2)^2 + x^2}{(R_1 + R_2)^2 + x^2} = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2. \quad (5-21)$$

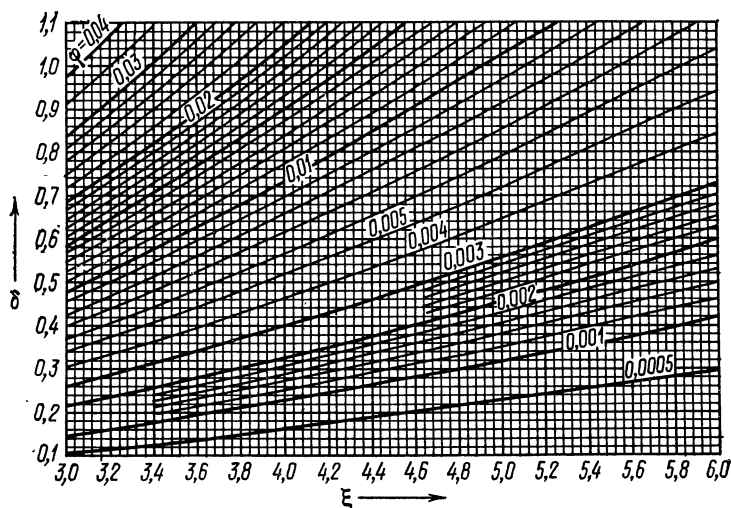


Рис. 5-9

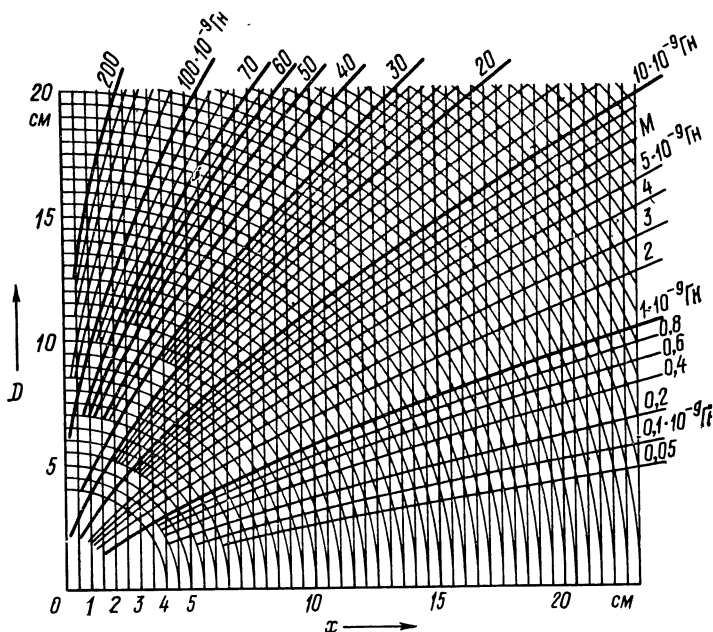


Рис. 5-10

При  $m^2 \leq 0,1$ , т. е. для близко расположенных кругов, удобнее пользоваться табл. 5-6, где значения  $F$  даны в функции от  $\lg m^2$ .

Если оба контура лежат в одной плоскости, т. е. центры их совпадают ( $x = 0$ ), то для определения взаимной индуктивности контуров могут служить формулы:

при малом значении  $\delta$  (один контур много меньше другого)

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 \delta R_2 \left[ 1 + \frac{3}{8} \delta^2 + \frac{15}{64} \delta^4 + \frac{175}{1024} \delta^6 + \dots + \frac{(2n!)^2 (2n+1)}{2^{4n} (n!)^4 (n+1)} \delta^{2n} + \dots \right]; \quad (5-22)$$

при малом значении величины  $\varepsilon = \frac{R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{1}{2} (1 - \delta)$  (контуры близких радиусов)

$$M = \mu_0 R_1 \left[ \left( 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3}{4} + \frac{17}{64} \varepsilon^4 + \frac{19}{64} \varepsilon^5 + \dots \right) \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{4}{\varepsilon} - 2 + \varepsilon + \frac{3}{4} \varepsilon^2 + \frac{1}{6} \varepsilon^3 - \frac{19}{384} \varepsilon^4 - \frac{379}{1920} \varepsilon^5 + \dots \right]. \quad (5-23)$$



С весьма большой степенью точности взаимная индуктивность коаксиальных круговых контуров может быть в общем случае определена по формулам, содержащим различные специальные функции. В частности, часто применяется формула

$$M = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right], \quad (5-24)$$

где

$$k^2 = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + x^2} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2}, \quad (5-25)$$

а  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы

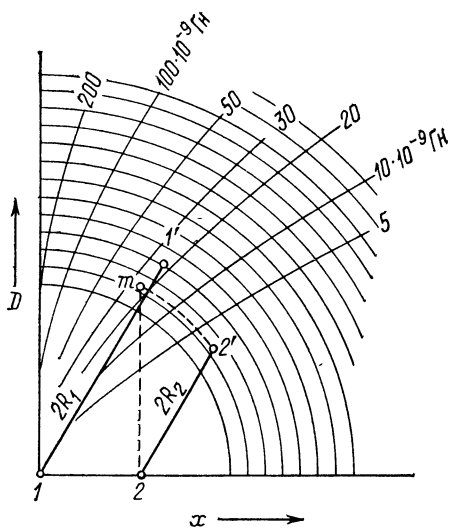


Рис. 5-11

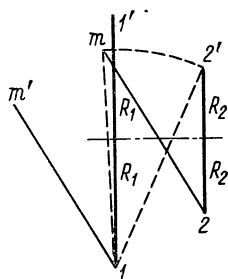


Рис. 5-12

первого и второго рода с модулем  $k$ . Значения  $K$  и  $E$  могут быть найдены по таблицам эллиптических интегралов (приложение 4).

При значениях  $k$ , близких к единице, вычисление по этой формуле становится затруднительным, так как табличные значения  $K$ , соответствующие соседним значениям  $k$ , сильно отличаются друг от друга и сколько-нибудь точное интерполирование между ними практически невозможно. В подобных случаях удобнее пользоваться формулой

$$M = \frac{2\mu_0 \sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{k_1}} (K_1 - E_1), \quad (5-26)$$

где  $K_1$  и  $E_1$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}, \quad k'^2 = 1 - k^2, \quad (5-27)$$

Таблица 5-5. Значения  $F$  в формуле (5-20) для контуров с неодинаковыми радиусами

$m^2$	$F$	$\lg F$	$m^2$	$F$	$\lg F$
0,00	—	—	0,45	1,7519	0,24352
1	21,474	1,33191	46	1,6805	22545
2	17,315	23842	47	1,6116	20726
3	14,937	17246	48	1,5451	18894
4	13,284	12333	49	1,4808	17048
0,05	12,026	1,08014	0,50	1,4186	0,15186
6	11,017	04207	51	1,3585	13307
7	10,179	00770	52	1,3004	11409
8	9,464	0,97608	53	1,2443	09492
9	8,843	94662	54	1,1900	07553
0,10	8,297	0,91890	0,55	1,1374	0,05591
11	7,810	89263	56	1,0865	03604
12	7,371	86754	57	1,0373	01592
13	6,974	84347	58	0,9897	̄1,99551
14	6,611	82026	59	0,9436	97480
0,15	6,278	0,79780	0,60	0,8990	̄1,95377
16	5,970	77599	61	8558	93240
17	5,685	75475	62	8141	91066
18	5,420	73401	63	7736	88853
19	5,173	71371	64	7345	86599
0,20	4,941	0,69380	0,65	6966	̄1,84300
21	4,723	67423	66	6600	81954
22	4,518	65497	67	6246	79556
23	4,325	63598	68	5903	77105
24	4,142	61723	69	5571	74595
0,25	3,969	0,59869	0,70	0,5251	̄1,72022
26	3,805	58034	71	4941	69382
27	3,649	56215	72	4642	66668
28	3,500	54410	73	4353	63877
29	3,359	52618	74	4074	61001
0,30	3,224	0,50835	0,75	0,3805	̄1,58033
31	3,095	49062	76	3545	54965
32	2,971	47295	77	3295	51788
33	2,853	45535	78	3054	48492
34	2,740	43778	79	2823	45065
0,35	2,6317	0,42024	0,80	0,25998	̄1,41495
36	2,5276	40271	81	23859	37765
37	2,4276	38518	82	21806	33859
38	2,3315	36764	83	19840	29754
39	2,2391	35008	84	17959	25428
0,40	2,1502	0,33248	0,85	0,16162	̄1,20851
41	2,0646	31483	86	14450	15986
42	1,9821	29712	87	12821	10792
43	1,9026	27934	88	11276	05215
44	1,8259	26148	89	09815	̄2,99187
0,45	1,7519	0,24352	0,90	0,08438	̄2,92622

$m^2$	$F$	$\lg F$	$m^2$	$F$	$\lg F$
0,90	0,08438	$\bar{2},92622$	0,95	0,02866	$\bar{2},45732$
91	7146	85405	96	2035	30858
92	5940	77382	97	1312	11782
93	4824	68336	98	0708	$\bar{3},85035$
94	3798	57950	99	0249	$\bar{3},39551$
0,95	0,02866	$\bar{2},45732$	1,00	0,00000	—

или формулой

$$M = \frac{4\mu_0 \sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{2} k_2^{1/4} \sqrt{1+k_2}} [(1+k_2) K_2 - E_2], \quad (5-28)$$

где  $K_2$  и  $E_2$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем

$$k_2 = \frac{1-k'_1}{1+k'_1} = \left( \frac{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \right)^2, \quad k_1'^2 = 1 - k_1^2. \quad (5-29)$$

Вычисления по формуле (5-24) становятся неудобными также и в тех случаях, когда модуль  $k$  мал, так как при этом формула содержит раз-

Таблица 5-6. Значения  $F$  в формуле (5-20) для близко расположенных контуров с неодинаковыми радиусами

$\lg m^2$	$F$	$\lg m^2$	$F$	$\lg m^2$	$F$	$\lg m^2$	$F$
$\bar{6},0$	79,093	$\bar{5},3$	60,287	$\bar{4},6$	41,494	$\bar{3},9$	22,881
$\bar{6},1$	77,647	$\bar{5},4$	58,840	$\bar{4},7$	40,051	$\bar{2},0$	21,478
$\bar{6},2$	76,200	$\bar{5},5$	57,394	$\bar{4},8$	38,608	$\bar{2},1$	20,084
$\bar{6},3$	74,753	$\bar{5},6$	55,947	$\bar{4},9$	37,167	$\bar{2},2$	18,700
$\bar{6},4$	73,306	$\bar{5},7$	54,500	$\bar{3},0$	35,727	$\bar{2},3$	17,329
$\bar{6},5$	71,860	$\bar{5},8$	54,055	$\bar{3},1$	34,288	$\bar{2},4$	15,972
$\bar{6},6$	70,413	$\bar{5},9$	51,609	$\bar{3},2$	32,851	$\bar{2},5$	14,632
$\bar{6},7$	68,966	$\bar{4},0$	50,163	$\bar{3},3$	31,416	$\bar{2},6$	13,311
$\bar{6},8$	67,520	$\bar{4},1$	48,717	$\bar{3},4$	29,984	$\bar{2},7$	12,013
$\bar{6},9$	66,073	$\bar{4},2$	47,272	$\bar{3},5$	28,554	$\bar{2},8$	10,742
$\bar{5},0$	64,626	$\bar{4},3$	45,827	$\bar{3},6$	27,128	$\bar{2},9$	9,502
$\bar{5},1$	63,180	$\bar{4},4$	44,382	$\bar{3},7$	25,707	$\bar{1},0$	8,297
$\bar{5},2$	61,733	$\bar{4},5$	42,938	$\bar{3},8$	24,291		
$\bar{5},3$	60,287	$\bar{4},6$	41,494	$\bar{3},9$	22,881		

ность близких друг к другу величин. В подобных случаях удобнее пользоваться формулой

$$M = \frac{\mu_0 \sqrt{R_1 R_2}}{k} \left[ \frac{K_0}{1+k} - (1+k) E_0 \right], \quad (5-30)$$

где  $K_0$  и  $E_0$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем  $k_0 = 2 \sqrt{k/(1+k)}$ .

Вместо формул с эллиптическими интегралами можно пользоваться формулами, дающими взаимную индуктивность коаксиальных контуров в виде бесконечных рядов.

При малых значениях  $k$  ( $k^2 < 0,3$ ) удобна формула

$$M = \frac{\mu_0 \pi \sqrt{R_1 R_2}}{2} k^3 \left( \frac{1}{8} + \frac{3}{32} k^2 + \frac{75}{1024} k^4 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{n}{n+1} A_n k^{2n-2} + \dots \right), \quad (5-31)$$

где

$$A_n = \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 \quad (5-32)$$

и  $k$  определяется по формуле (5-25).

При всех значениях  $k$  от нуля до 0,995 быстро сходится ряд

$$M = \frac{\mu_0 \pi \sqrt{2 R_1 R_2}}{\sqrt{1+q}} q^{3/4} \left[ 1 + \frac{1}{4} q^2 + \frac{9}{64} q^4 + \dots + \right. \\ \left. + A_n q^{2n} + \dots + \frac{1}{2} q + \frac{3}{16} q^3 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{2n+1}{2(n+1)} A_n q^{2n+1} + \dots \right], \quad (5-33)$$

где  $q = k_2$  определяется по формуле (5-29), а  $A_n$  — по формуле (5-32).

При значениях  $k$ , близких к единице ( $k^2 > 0,6$ ), удобна формула

$$M = \frac{\mu_0 \sqrt{R_1 R_2}}{k} \left[ \left( 1 + \frac{m^2}{4} + \frac{m^4}{64} + \dots \right) \ln \frac{4}{m} - \right. \\ \left. - \left( 2 - \frac{m^2}{4} + \frac{m^4}{128} \dots \right) \right], \quad (5-34)$$

где

$$m^2 = k'^2 = 1 - k^2 = (r_2/r_1)^2. \quad (5-35)$$

Формулы настоящего параграфа приближенно справедливы и для круговых колец, т. е. для контуров с конечными размерами поперечного сечения. В этом случае взаимная индуктивность контуров может быть принята равной взаимной индуктивности двух бесконечно тонких контуров, имеющих такие же радиусы, как и оси рассматриваемых колец, и расположенных так, что кратчайшее расстояние между ними равно среднему геометрическому расстоянию между ближайшими друг к другу площадями поперечных сечений колец.

**Пример 5-6.** Коаксиальные круговые контуры, радиусы которых равны  $R_1 = 25$  см и  $R_2 = 20$  см, расположены на расстоянии  $x = 8$  см друг от друга. Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** В данном случае  $\xi = 8/50 = 0,16$ ;  $\delta = 20/25 = 0,8$ .

1. Применяя формулу (5-19), определяем  $\Phi$  по кривым рис. 5-7, из которого находим  $\Phi = 5,8$ . Следовательно,

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,25}{2\pi} \cdot 5,8 = 2,9 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

2. Применяем формулу (5-20). В данном случае  $m^2 = 4,2605 \cdot 10^{-2}$ ;  $\lg m^2 = 2,62945$ , и по табл. 5-6 находим  $F = 12,929$ ; следовательно,

$$M = \sqrt{0,25 \cdot 0,20} \cdot 10^{-7} \cdot 12,929 = 2,8911 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

3. Применяем формулу (5-24). В данном случае

$$k^2 = \frac{4 \cdot 0,25 \cdot 0,2}{0,45^2 + 0,08^2} = 0,95740; \quad k = 0,97847,$$

по таблицам эллиптических интегралов [19] находим

$$K = 2,9855; \quad E = 1,0531.$$

Подставляя найденные значения  $k$ ,  $K$  и  $E$  в формулу (5-24), получим

$$M = 2,8906 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

4. Ввиду того что в рассматриваемом примере  $k$  близко к единице, применяем формулу (5-26).

В данном случае

$$k'^2 = 1 - k^2 = 0,042605; \quad k' = 0,20641; \quad k_1 = 0,79359/1,2064 = 0,65781;$$

$$\sqrt{k_1} = 0,81106; \quad k_1^2 = 0,43271.$$

По таблицам [19] находим

$$K_1 = 1,8009; \quad E_1 = 1,3838; \quad K_1 - E_1 = 0,4171$$

и

$$M = \frac{2\sqrt{0,25 \cdot 0,20}}{0,81106} \cdot 0,4171 \cdot 10^{-7} = 2,890 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

5. Применяем формулу (5-28). В данном случае

$$k_1'^2 = 1 - k_1^2 = 0,56729; \quad k_1' = 0,75319; \quad k_2 = 0,14078;$$

$$k_2^2 = 0,019819; \quad 1 + k_2 = 1,14078; \quad \sqrt{1 + k_2} = 1,0681;$$

$$k_2^{1/4} = 0,61253.$$

По таблицам [13] находим

$$K_2 = 1,5787; \quad E_2 = 1,5630,$$

и, следовательно,

$$M = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \sqrt{0,25 \cdot 0,20}}{\sqrt{2} \cdot 0,61253 \cdot 1,0681} (1,14078 \cdot 1,5787 - 1,5630) =$$

$$= 2,8903 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

6. Применяем разложение в ряд (5-34). В данном случае

$$m^2 = k'^2 = 0,042605; \quad \frac{m^2}{4} = 0,01065; \quad \ln \frac{4}{m} = 2,9641;$$

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \sqrt{0,25 \cdot 0,20}}{0,97847} \cdot 1,0063 = 2,8900 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

7. Применяем разложение в ряд (5-33). В данном случае

$$q = k_2 = 0,14078; \quad \sqrt{1+q} = 1,0681; \quad q^{3/4} = 0,22983;$$

$$\frac{1}{4} q^2 = 0,0050; \quad \frac{1}{2} q = 0,0704; \quad \frac{3}{16} q^3 = 0,0005;$$

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \sqrt{2 \cdot 0,25 \cdot 0,20}}{1,0681} \cdot 0,22983 \cdot 1,0759 = 2,8902 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Результаты, полученные различными способами, мало отличаются друг от друга.

## 5-9. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ КРУГОВЫХ КОНТУРОВ

Взаимная индуктивность концентрических круговых контуров

$$M = \frac{\mu_0 R_1}{2\pi} \varphi, \quad (5-36)$$

где  $R_1$  — радиус большего контура, а  $\varphi$  — величина, значения которой могут быть найдены по кривым рис. 5-13. На этом рисунке по оси абсцисс отложены значения  $\cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между плоскостями контуров, а по оси ординат — значения  $\delta = R_2/R_1$ , где  $R_2$  — радиус меньшего контура (рис. 5-14); значения величины  $\varphi$  определяются путем

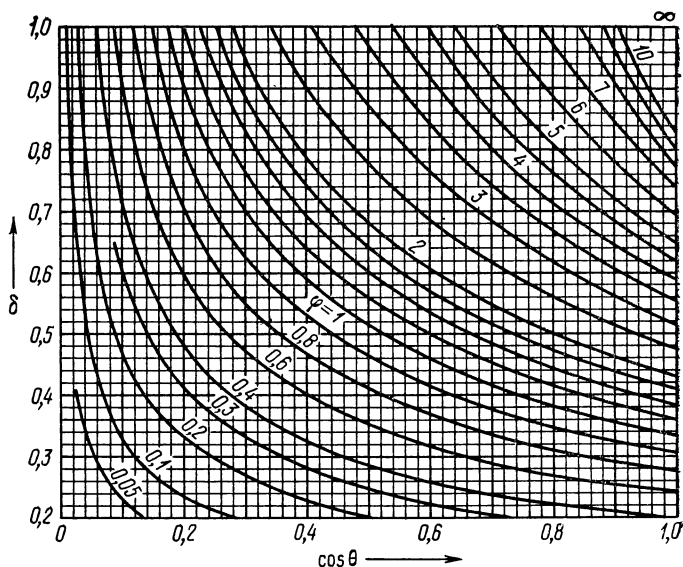


Рис. 5-13

интерполирования — по значениям, указанным на соответствующих кривых.

Для более точного определения взаимной индуктивности концентрических круговых контуров можно пользоваться формулой

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 \delta R_2 \left[ P_1(\cos \theta) + \frac{3}{8} \delta^2 P_3(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{15}{64} \delta^4 P_5(\cos \theta) + \frac{175}{1024} \delta^6 P_7(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \dots + \frac{(2n!)^2 \cdot (2n+1)}{2^{4n} (n!)^4 (n+1)} \delta^{2n} \times \right. \\ \left. \times P_{2n+1}(\cos \theta) + \dots \right], \quad (5-37)$$

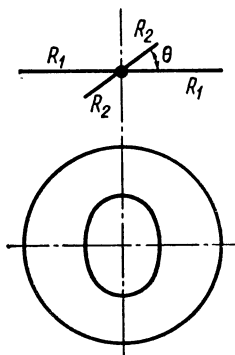


Рис. 5-14

где  $P_1(\cos \theta)$ ,  $P_3(\cos \theta)$ ,  $\dots$ ,  $P_{2n+1}(\cos \theta)$   $\dots$  — полиномы Лежандра, значения которых для различных  $n$  и различных  $\cos \theta$  можно найти по таблицам или формулам, приведенным в приложениях 1 и 5. Формула удобна

при малых значениях  $\delta$ , т. е. при условии, что один из контуров значительно меньше другого. В противном случае ряд (5-37) сходится медленно.

**Пример 5-7.** Два концентрических круговых контура, радиусы которых равны  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 2,5$  см, расположены под углом  $\theta = 60^\circ$  друг к другу. Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** В данном случае

$$\delta = 2,5/10 = 0,25; \quad \delta^2 = 0,0625; \quad \delta^4 = 0,003906; \quad \cos \theta = 0,5.$$

По кривым рис. 5-13 находим  $\varphi = 0,3$ , и, следовательно,

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,10}{2\pi} \cdot 0,3 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

Более точное значение  $M$  определяем по формуле (5-37). Из таблиц полиномов Лежандра при  $\cos \theta = 0,5$  находим

$$P_1 = 0,5000; \quad P_3 = -0,4375; \quad P_5 = 0,0898;$$

$$\frac{3}{8} \delta^2 P_3 = -0,0103; \quad \frac{15}{64} \delta^4 P_5 = 0,000082.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,25 \cdot 0,025 (0,5000 - 0,0103 + 0,0001) =$$

$$= 0,1234 \cdot 10^{-7} \cdot 0,4898 = 6,044 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

## 5-10. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КРУГОВЫХ КОНТУРОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

**1. Контурь одного радиуса (рис. 5-15).** Для контуров одного радиуса

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} R \varphi, \quad (5-38)$$

где  $R$  — радиус контуров;  $\varphi$  — величина, определяемая по кривым рис. 5-16 и 5-17. На этих рисунках по оси абсцисс отложено отношение  $\eta = y/(2R)$ , по оси ординат — отношение  $\xi = x/(2R)$ , где  $y$  — расстояние между осями контуров;  $x$  — расстояние, на которое центры контуров смещены в осевом направлении. Значения величины  $\varphi$  определяются путем интерполирования — по значениям, указанным на соответствующих кривых.

Более точно взаимная индуктивность в рассматриваемом случае может быть найдена по формуле

$$M = M_0 k, \quad (5-39)$$

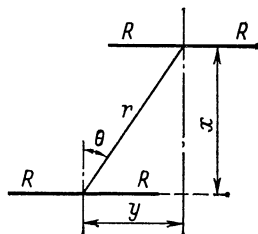


Рис. 5-15



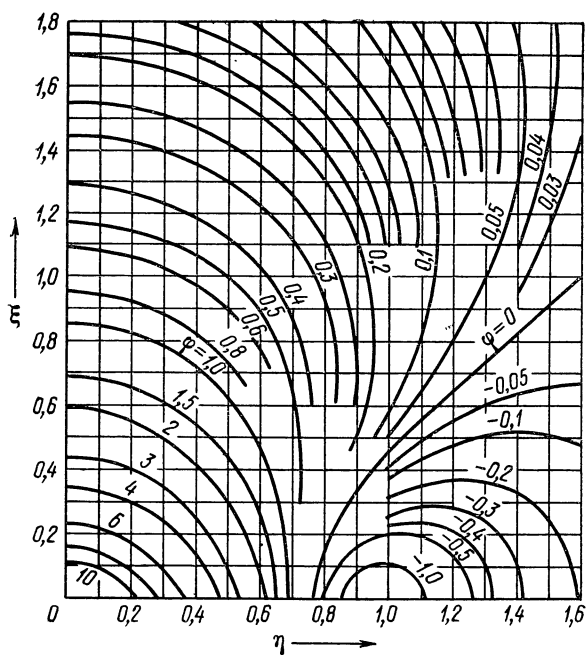


Рис. 5-16

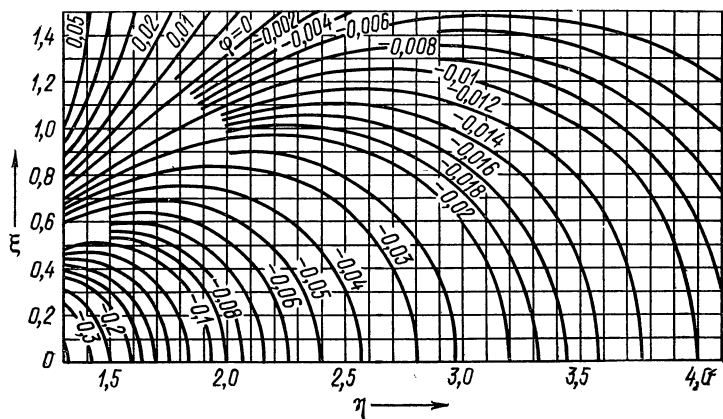


Рис. 5-17

где  $M_0$  — взаимная индуктивность тех же контуров, но расположенных коаксиально ( $\theta = 0$ ) при том же расстоянии  $r$  между центрами;  $k$  — коэффициент, зависящий от угла  $\theta$  и от отношения  $\gamma = 2R/r$ .

Взаимную индуктивность  $M_0$  определяют одним из способов, указанных в § 5-7. Значения коэффициента  $k$  находят по табл. 5-7.

Для контуров, лежащих в одной плоскости, для определения взаимной индуктивности можно пользоваться следующими формулами:

для пересекающихся контуров

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} R f_1; \quad (5-40)$$

для контуров, расположенных на большом расстоянии друг от друга,

$$M = -\frac{\mu_0 \pi R}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^3 f_2. \quad (5-41)$$

Значения коэффициентов  $f_1$  и  $f_2$  определяются по табл. 5-8.

Интерполирование по табл. 5-7 и 5-8 не всегда может быть выполнено с достаточной степенью точности. В подобных случаях пользование формулами (5-39)—(5-41) становится неудобным и величину  $M$  следует определять иначе.

При больших расстояниях между контурами ( $r > 2R$ ,  $\gamma = 2R/r < 1$ ) можно применять формулу

$$\begin{aligned} M = & \frac{\pi}{16} \mu_0 R \gamma^3 \left[ P_2(\cos \theta) - \frac{3}{4} \gamma^2 P_4(\cos \theta) + \right. \\ & + \frac{75}{128} \gamma^4 P_6(\cos \theta) - \frac{245}{512} \gamma^6 P_8(\cos \theta) + \dots + \\ & \left. + (-1)^{n+1} \frac{(2n!)^2 n}{2^{4n-3} (n!)^4 (n+1)} \gamma^{2n-2} P_{2n}(\cos \theta) + \dots \right], \quad (5-42) \end{aligned}$$

где  $P_2(\cos \theta)$ ,  $P_4(\cos \theta)$ , ...,  $P_{2n}(\cos \theta)$  ... — полиномы Лежандра, значения которых для различных  $n$  и различных  $\cos \theta$  можно найти по таблицам или формулам, приведенным в приложениях 1 и 5.

Если расстояние  $r$  между центрами контуров меньше их диаметра или одного порядка с ним, то взаимную индуктивность контуров можно определить методом однократного численного интегрирования (§ 5-12).

Таблица 5-7. Значения  $k$  в формуле (5-39) для одинаковых круговых контуров с параллельными осями

$\theta$ град	$1/\gamma = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$1/\gamma = 1$	$\theta$ град
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0
0,9	1	1,0267	1,0330	1,0329	1,0265	1,0146	0,9982	0,9790	0,9584	0,9376	0,9176	0,9
0,8	1	1,0552	1,0692	1,0699	1,0568	1,0313	0,9954	0,9527	0,9070	0,8613	0,8180	0,8
0,7	1	1,0857	1,1087	1,1112	1,0919	1,0509	0,9917	0,9200	0,8428	0,7665	0,6959	0,7
0,6	1	1,1155	1,1517	1,1580	1,1328	1,0750	0,9876	0,8787	0,7619	0,6472	0,5441	0,6
0,5	1	1,1536	1,1997	1,2111	1,1812	1,1052	0,9842	0,8291	0,6585	0,4938	0,3515	0,5
0,4	1	1,1917	1,2524	1,2717	1,2390	1,1440	0,9836	0,7668	0,5246	0,2914	0,1014	0,4
0,3	1	1,2330	1,3109	1,3411	1,3085	1,1952	0,9897	0,6964	0,3489	0,0137	-0,2378	0,3
0,2	1	1,2780	1,3760	1,4212	1,3929	1,2641	1,0102	0,5850	0,1178	-0,3874	-0,7240	0,2
0,1	1	1,3274	1,4489	1,5139	1,4959	1,3577	1,0557	0,5505	-0,1681	-1,0231	-1,5087	0,1
0,0	1	1,3820	1,5311	1,6214	1,6220	1,4851	1,145	0,5253	-0,4672	-1,953	-4,053	0,0

$\theta$ град	$\gamma = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	$\gamma = 0$	$\theta$ град
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0
0,9	0,9176	0,8968	0,8736	0,8482	0,8231	0,7946	0,7693	0,7471	0,7298	0,7188	0,7150	0,9
0,8	0,8180	0,7741	0,7266	0,6771	0,6292	0,5812	0,5398	0,5058	0,4806	0,4652	0,4600	0,8
0,7	0,6959	0,6267	0,5551	0,4848	0,4196	0,3626	0,3157	0,2798	0,2546	0,2399	0,2350	0,7
0,6	0,5441	0,4477	0,3543	0,2700	0,1992	0,1434	0,1019	0,0729	0,0540	0,0434	0,0400	0,6
0,5	0,3515	0,2275	0,1190	0,0336	-0,0287	-0,0697	-0,0956	-0,1109	-0,1195	-0,1237	-0,1250	0,5
0,4	0,1014	-0,0470	-0,1551	-0,2212	-0,2551	-0,2681	-0,2704	-0,2678	-0,2640	-0,2610	-0,2600	0,4
0,3	-0,2378	-0,3940	-0,4670	-0,4809	-0,4704	-0,4410	-0,4156	-0,3941	-0,3780	-0,3683	-0,3650	0,3
0,2	-0,7240	-0,8337	-0,7992	-0,7204	-0,6357	-0,5764	-0,5250	-0,4867	-0,4604	-0,4451	-0,4400	0,2
0,1	-1,5087	-1,3509	-1,0900	-0,8992	-0,7586	-0,6632	-0,5930	-0,5434	-0,5102	-0,4912	-0,4850	0,1
0,0	-4,053	-1,677	-1,2154	-0,9636	-0,8030	-0,6931	-0,6160	-0,5624	-0,5269	-0,5066	-0,5000	0,0

**Таблица 5-8. Значения  $f_1$  и  $f_2$  в формулах (5-40) и (5-41) для контуров, лежащих в одной плоскости**

$1/\gamma$	$f_1$	$1/\gamma$	$f_1$	$\gamma$	$f_2$	$\gamma$	$f_2$
—	—	0,5	7,334	0,0	1,0000	0,5	1,1686
0,1	29,766	0,6	4,272	0,1	1,0057	0,6	1,2669
0,2	20,681	0,7	1,506	0,2	1,0232	0,7	1,4132
0,3	15,073	0,8	-1,045	0,3	1,0538	0,8	1,6482
0,4	10,840	0,9	-3,457	0,4	1,1006	0,9	2,0969
0,5	7,334	1,0	-5,749	0,5	1,1686	1,0	4,6604

**Пример 5-8.** Одинаковые круговые контуры радиуса  $R = 5$  см расположены в параллельных плоскостях (рис. 5-15) так, что расстояние между центрами контуров равно  $r = 40$  см, а  $\cos \theta = 0,4$ . Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** В данном случае  $\gamma = 10/40 = 0,25$ . Применяем формулу (5-39). При  $\gamma = 0,25$  и  $\cos \theta = 0,4$  по табл. 5-7 находим  $k = -0,2659$ . Взаимную индуктивность  $M_0$  коаксиальных круговых контуров определяем по формуле (5-16), при этом значение  $F$  берем из табл. 5-4. При  $\gamma = 0,25$  находим  $F = 0,03683$ . Следовательно,

$$M_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot 0,05 \cdot 0,03683 = 1,842 \cdot 10^{-10} \text{ Гн}$$

и окончательно

$$M = -1,842 \cdot 0,2659 \cdot 10^{-10} = -4,898 \cdot 10^{-11} \text{ Гн.}$$

Для определения  $M$  по формуле (5-42) вычисляем

$$\gamma^2 = 0,0625; \quad \gamma^3 = 0,01563; \quad \gamma^4 = 0,003906.$$

По таблице полиномов Лежандра при  $\cos \theta = 0,4$  находим

$$P_2(\cos \theta) = -0,2600; \quad P_4(\cos \theta) = -0,1130; \quad P_6(\cos \theta) = 0,2926.$$

Подставляя найденные величины в формулу (5-42), получаем

$$M = 1,929 \cdot 10^{-10} (-0,2600 + 0,0053 + 0,0007) = -4,900 \cdot 10^{-11} \text{ Гн,}$$

что почти совпадает с результатом, найденным по формуле (5-39) и табл. 5-7.

## 2. Контуры неодинаковых радиусов (рис. 5-18).

Если контуры лежат в одной плоскости ( $x = 0$ ), то их взаимную индуктивность можно найти по формуле

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} R_1 \Phi, \quad (5-43)$$

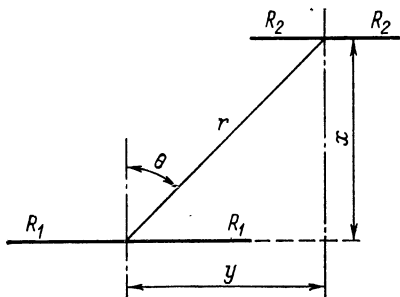


Рис. 5-18

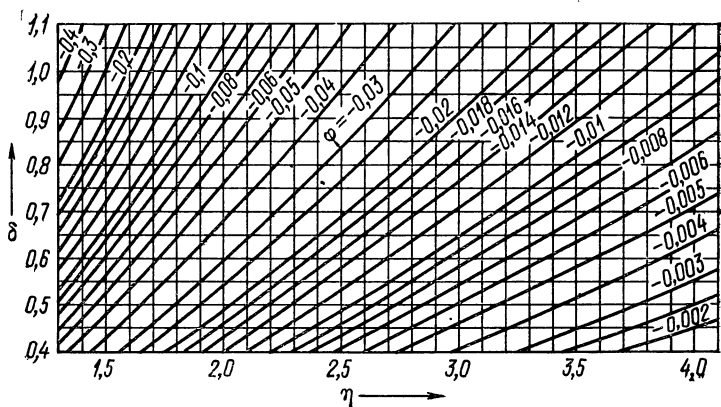


Рис. 5-19

взяв значение  $\varphi$  из рис. 5-19. На этом рисунке по оси абсцисс отложено отношение  $\eta = y/(2R_1)$ , а по оси ординат — отношение радиусов контуров  $\delta = R_2/R_1$ . Значения величины  $\varphi$  определяются путем интерполирования — по значениям, указанным на соответствующих кривых.

В общем случае (рис. 5-18), если расстояние  $r$  между центрами контуров больше суммы их радиусов, то  $M$  можно приближенно определить по формуле

$$M = M_0 \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad (5-44)$$

где  $M_0$  — взаимная индуктивность двух коаксиальных контуров с теми же радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и тем же расстоянием между центрами  $r$ ;  $k_1$  и  $k_2$  — значения функции  $k$ , определенные по табл. 5-7 один раз для  $\gamma = 2R_1/r$ , а другой раз — для  $\gamma = 2R_2/r$ . Значение  $M_0$  может быть найдено одним из способов, указанных в § 5-8.

Если расстояние  $r$  между центрами контуров одного порядка с суммой  $R_1 + R_2$  или меньше, чем эта сумма, то взаимную индуктивность контуров можно определить методом однократного численного интегрирования (§ 5-12).

В некоторых случаях для определения взаимной индуктивности неодинаковых контуров с параллельными осями могут быть использованы приводимые ниже формулы, дающие  $M$  в виде бесконечных рядов.

При  $r > R_1 + R_2$

$$M = -\frac{2\pi\mu_0 R_2^2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} F\left(-n, -n+1, 2, \frac{R_2^2}{R_1^2}\right) \times \\ \times \left(\frac{R_1}{2r}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos \theta), \quad (5-45)$$

где  $P_{2n}(\cos \theta)$  — полином Лежандра, а  $F\left(-n, -n+1, 2, \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)$  — гипергеометрический ряд (см. приложение 1).

Если радиусы  $R_1$  и  $R_2$  контуров близки друг к другу, удобнее формула

$$M = -\frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_1^2 + R_2^2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n!)^2 n}{2^{3n} (n!)^4 (n+1)} \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{r^2}\right)^n \times \\ \times F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2} - n, \lambda\right) P_{2n}(\cos \theta), \quad (5-46)$$

где

$$\lambda = \left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}\right)^2.$$

При  $r < R_1 - R_2$

$$M = \pi\mu_0 \frac{R_2^2}{R_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{2n} \times \\ \times F\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}, 2, \frac{R_2^2}{R_1^2}\right) P_{2n}(\cos \theta). \quad (5-47)$$

Ввиду громоздкости отдельных членов этих выражений применение формул (5-45)–(5-47) может оказаться целесообразным лишь в тех случаях, когда можно ограничиться двумя-тремя первыми членами ряда, т. е. при  $r \gg R_1 + R_2$  для формул (5-45) и (5-46) и при  $r \ll R_1$  для формулы (5-47).

**Пример 5-9.** Два круговых контура с параллельными осями имеют радиусы  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 5$  см и расположены так, что центры их удалены на расстояние  $r = 20$  см, причем  $\cos \theta = 0,8$ . Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** Применяем формулу (5-44), определяя  $M_0$  по формуле (5-19) и кривым рис. 5-8. В данном случае  $\delta = 5/10 = 0,5$ ,  $\xi = 20/20 = 1$ , и из рис. 5-8 находим  $\varphi = 0,21$ , так что

$$M_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 0,10 \cdot 0,21 = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  определяем по табл. 5-7. При  $\cos \theta = 0,8$  и  $\gamma_1 = 20/20 = 1$  имеем  $k_1 = 0,8180$ ; при  $\cos \theta = 0,8$  и  $\gamma_2 = 20/10 = 2$  ( $1/\gamma_2 = 0,5$ ) имеем  $k_2 = 0,5812$ . Таким образом,  $\frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0,70$  и, следовательно,

$$M = 4,2 \cdot 10^{-9} \cdot 0,70 = 2,95 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

**Пример 5-10.** Два круговых контура с параллельными осями имеют радиусы  $R_1 = 20$  см и  $R_2 = 4$  см и расположены так (рис. 5-18), что расстояние между их центрами равно  $r = 2$  см, причем  $\cos \theta = 0,66$ . Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** Так как  $r < R_1 - R_2$ , то применяем формулу (5-47). При  $n = 0$  коэффициент

$$A = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} \cdot (n!)^2} \left( \frac{r}{R_1} \right)^{2n} = \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot 1 = 0,5,$$

а гипергеометрическая функция

$$F = F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{1}{25}\right) = 1 + \frac{0,5 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,04 + \\ + \frac{0,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5}{2 \cdot 2 \cdot 3} 0,0016 = 1 + 0,015 + 0,0004 = 1,015.$$

Аналогично при  $n = 1$  получаем

$$A = -7,5 \cdot 10^{-3}; \quad F = 1,079;$$

при  $n = 2$

$$A = 0,9375 \cdot 10^{-4}; \quad F = 1,193.$$

По таблицам полиномов Лежандра находим

$$P_0(0,66) = 1; \quad P_2(0,66) = 0,1534; \quad P_4(0,66) = -0,4284.$$

Подставляя найденные значения в формулу (5-47), получаем

$$M = 3,158 \cdot 10^{-8} (0,5 \cdot 1,015 - 0,0075 \cdot 0,1534 \cdot 1,079 - \\ - 0,9375 \cdot 10^{-4} \cdot 1,193 \cdot 0,4284) = 3,158 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5062 = 1,599 \cdot 10^{-8} \text{ Гн.}$$

## 5-11. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КРУГОВЫХ КОНТУРОВ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ

**1.** Два контура, оси которых пересекаются в центре меньшего из них (рис. 5-20). Обозначим радиусы контуров через  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ), расстояние между их центрами через  $r$ , угол, под которым пересекаются оси контуров, через  $\theta$ . Тогда

$$M = M_0 q \cos \theta, \quad (5-48)$$

где  $M_0$  — взаимная индуктивность контуров при  $\theta = 0$ ;  $q$  — коэффициент, зависящий от взаимного расположения контуров. Значения  $q$  даны в табл. 5-9 в зависимости от величин

Рис. 5-20

$$\delta = R_2/R_1, \quad \rho = r/R_1 \text{ и } \nu = \cos \theta.$$

Значение  $M_0$  может быть найдено одним из способов, указанных в § 5-8.

Таблица 5-9 дает значения коэффициента  $q$  для значений  $\delta$  от 0,5 до 0,9. При  $\delta < 0,5$  для определения взаимной индуктивности можно пользоваться формулой

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 u^2 v^2 a_1 v \left[ 1 - \frac{1}{4} v^2 P'(\eta) \frac{P_3(v)}{v} + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} v^4 P'_5(\eta) \frac{P_5(v)}{v} - \frac{5}{64} v^6 P'_7(\eta) \frac{P_7(v)}{v} + \dots + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{(2n!)}{2^{2n} (n!)^2 (n+1)} v^{2n} P'_{2n+1}(\eta) \frac{P_{2n+1}(v)}{v} + \dots \right], \quad (5-49)$$

где

$$u^2 = \frac{R_1^2}{a_1^2} = \frac{1}{1 + \rho^2}; \quad v^2 = \frac{R_2^2}{a_1^2} = \frac{\delta^2}{1 + \rho^2}; \quad \eta = \frac{r}{a_1} = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho^2}};$$

$P_{2n+1}(v)$  — полиномы Лежандра порядка  $(2n + 1)$  от аргумента  $v$ ;  $P'_{2n+1}(\eta)$  — производные от полиномов Лежандра  $P_{2n+1}(\eta)$ , взятые по их аргументу  $\eta$ . Значения полиномов Лежандра и их производных могут быть найдены по таблицам и формулам, приведенным в приложениях 1, 5, 6. Формула (5-49) справедлива и при  $\delta > 0,5$ .

В тех случаях, когда интерполирование по табл. 5-9 становится неточным, а ряд (5-49) сходится недостаточно быстро, для вычисления взаимной индуктивности контуров может быть использован метод однократного численного интегрирования (§ 5-12).

**Пример 5-11.** Два круговых контура имеют радиусы, равные соответственно  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 6$  см. Ось первого контура проходит через центр второго, расстояние между центрами  $r = 8$  см, оси контуров наклонены под углом, косинус которого  $\cos \theta = 0,7$ . Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** Применяем формулу (5-48). Взаимную индуктивность  $M_0$  определяем по формуле (5-20) и табл. 5-5. В данном случае

$$m^2 = \frac{16 + 64}{256 + 64} = 0,25; \quad F = 3,969;$$

$$M_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \sqrt{0,10 \cdot 0,06 \cdot 3,969} = 3,074 \cdot 10^{-8} \text{ Гн.}$$

Таблица 5-9 при  $\delta = 6/10 = 0,6$  и  $v = \cos \theta = 0,7$  дает  $q = 1,0779$ . Таким образом,

$$M = 3,074 \cdot 1,078 \cdot 0,7 \cdot 10^{-8} = 2,320 \cdot 10^{-8} \text{ Гн.}$$



Таблица 5-9. Значения  $q$  в формуле (5-48) для контуров с пересекающимися осями  
Отношение радиусов  $\delta = 0,5$

$\nu$	$1/\rho = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$1/\rho = \infty$
0,0	1	1,0092	1,0349	1,0719	1,1129	1,1496	1,1793	1,1965	1,2019	1,1988	1,1852
0,1	1	1,0091	1,0346	1,0712	1,1116	1,1489	1,1774	1,1944	1,1999	1,1969	1,1837
0,2	1	1,0088	1,0335	1,0688	1,1080	1,1439	1,1715	1,1882	1,1938	1,1912	1,1790
0,3	1	1,0084	1,0317	1,0650	1,1018	1,1357	1,1618	1,1778	1,1837	1,1816	1,1710
0,4	1	1,0077	1,0292	1,0598	1,0934	1,1243	1,1483	1,1634	1,1694	1,1681	1,1596
0,5	1	1,0069	1,0260	1,0530	1,0827	1,1099	1,1312	1,1450	1,1511	1,1507	1,1442
0,6	1	1,0059	1,0221	1,0449	1,0698	1,0927	1,1107	1,1227	1,1286	1,1292	1,1247
0,7	1	1,0047	1,0175	1,0355	1,0550	1,0727	1,0870	1,0968	1,1020	1,1034	1,1007
0,8	1	1,0033	1,0123	1,0248	1,0382	1,0506	1,0605	1,0674	1,0714	1,0734	1,0719
0,9	1	1,0017	1,0064	1,0129	1,0201	1,0262	1,0313	1,0350	1,0373	1,0390	1,0382
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\nu$	$\rho = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	$\rho = 0$
0,0	1,1852	1,1660	1,1376	1,0993	1,0522	0,9966	0,9407	0,8835	0,8361	0,8045	0,7934
0,1	1,1837	1,1648	1,1368	1,0989	1,0523	0,9972	0,9414	0,8841	0,8373	0,8058	0,7947
0,2	1,1790	1,1612	1,1343	1,0979	1,0526	0,9989	0,9434	0,8873	0,8410	0,8097	0,7987
0,3	1,1710	1,1548	1,1300	1,0958	1,0529	1,0016	0,9468	0,8928	0,8472	0,8164	0,8054
0,4	1,1596	1,1455	1,1234	1,0925	1,0529	1,0050	0,9517	0,9007	0,8563	0,8261	0,8154
0,5	1,1442	1,1328	1,1143	1,0874	1,0523	1,0088	0,9582	0,9111	0,8686	0,8394	0,8289
0,6	1,1247	1,1161	1,1016	1,0797	1,0502	1,0125	0,9663	0,9242	0,8844	0,8568	0,8468
0,7	1,1007	1,0950	1,0847	1,0685	1,0457	1,0153	0,9757	0,9401	0,9046	0,8794	0,8701
0,8	1,0719	1,0688	1,0627	1,0523	1,0372	1,0159	0,9858	0,9587	0,9299	0,9087	0,9008
0,9	1,0382	1,0372	1,0346	1,0300	1,0227	1,0121	0,9944	0,9795	0,9614	0,9474	0,9420
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Отношение радиусов  $\delta = 0,6$ 

$\nu$	$1/\rho = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$1/\rho = 1$	$\nu$
0,0	1	1,0133	1,0507	1,1052	1,1665	1,2234	1,2670	1,2925	1,2998	1,2942	1,2722	0,0
0,1	1	1,0131	1,0502	1,1040	1,1646	1,2208	1,2639	1,2894	1,2968	1,2913	1,2702	0,1
0,2	1	1,0127	1,0486	1,1006	1,1589	1,2131	1,2549	1,2800	1,2880	1,2826	1,2641	0,2
0,3	1	1,0121	1,0459	1,0949	1,1496	1,2005	1,2400	1,2643	1,2731	1,2690	1,2535	0,3
0,4	1	1,0111	1,0422	1,0870	1,1368	1,1830	1,2194	1,2425	1,2521	1,2505	1,2378	0,4
0,5	1	1,0099	1,0375	1,0770	1,1206	1,1651	1,1934	1,2147	1,2247	1,2253	1,2163	0,5
0,6	1	1,0085	1,0319	1,0650	1,1014	1,1351	1,1624	1,1810	1,1910	1,1933	1,1882	0,6
0,7	1	1,0067	1,0252	1,0510	1,0794	1,1055	1,1268	1,1420	1,1510	1,1537	1,1526	0,7
0,8	1	1,0047	1,0177	1,0356	1,0549	1,0727	1,0874	1,0983	1,1053	1,1087	1,1090	0,8
0,9	1	1,0025	1,0092	1,0185	1,0283	1,0373	1,0449	1,0506	1,0546	1,0570	1,0579	0,9
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0

$\nu$	$\rho = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	$\rho = 0$	$\nu$
0,0	1,2722	1,2425	1,1996	1,1431	1,0754	0,9970	0,9166	0,8404	0,7746	0,7306	0,7149	0,0
0,1	1,2702	1,2411	1,1988	1,1430	1,0758	0,9979	0,9179	0,8418	0,7761	0,7321	0,7164	0,1
0,2	1,2641	1,2366	1,1963	1,1425	1,0771	1,0006	0,9216	0,8461	0,7806	0,7366	0,7209	0,2
0,3	1,2535	1,2288	1,1918	1,1413	1,0790	1,0051	0,9278	0,8533	0,7883	0,7444	0,7287	0,3
0,4	1,2378	1,2169	1,1844	1,1388	1,0810	1,0111	0,9366	0,8638	0,7996	0,7560	0,7403	0,4
0,5	1,2163	1,2000	1,1732	1,1340	1,0826	1,0183	0,9480	0,8779	0,8150	0,7718	0,7563	0,5
0,6	1,1882	1,1768	1,1566	1,1253	1,0823	1,0258	0,9619	0,9060	0,8544	0,8132	0,7979	0,6
0,7	1,1526	1,1460	1,1327	1,1105	1,0779	1,0323	0,9777	0,9277	0,8821	0,8418	0,8071	0,7
0,8	1,1090	1,1064	1,0995	1,0866	1,0660	1,0344	0,9936	0,9600	0,9272	0,8908	0,8722	0,8
0,9	1,0579	1,0575	1,0554	1,0505	1,0417	1,0260	1,0048	0,9764	0,9429	0,9160	0,9055	0,9
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0

Отношение радиусов  $\delta = 0,7$ 

$\nu$	$1/\rho = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$1/\rho = 1$	$\nu$
0,0	1	1,0181	1,0696	1,1459	1,2331	1,3150	1,3778	1,4136	1,4221	1,4080	1,3788	0,0
0,1	1	1,0180	1,0689	1,1442	1,2303	1,3112	1,3734	1,4091	1,4182	1,4049	1,3765	0,1
0,2	1	1,0174	1,0667	1,1393	1,2220	1,2999	1,3602	1,3958	1,4062	1,3952	1,3693	0,2
0,3	1	1,0165	1,0630	1,1312	1,2084	1,2813	1,3384	1,3735	1,3858	1,3783	1,3565	0,3
0,4	1	1,0152	1,0578	1,1199	1,2084	1,2558	1,3083	1,3422	1,3566	1,3534	1,3370	0,4
0,5	1	1,0136	1,0514	1,1058	1,1666	1,2240	1,2704	1,3021	1,3180	1,3193	1,3091	0,5
0,6	1	1,0115	1,0435	1,0890	1,1393	1,1866	1,2256	1,2536	1,2698	1,2750	1,2708	0,6
0,7	1	1,0092	1,0344	1,0697	1,1084	1,1446	1,1749	1,1976	1,2125	1,2197	1,2205	0,7
0,8	1	1,0064	1,0240	1,0482	1,0744	1,0988	1,1194	1,1354	1,1470	1,1540	1,1574	0,8
0,9	1	1,0034	1,0125	1,0249	1,0381	1,0502	1,0606	1,0689	1,0752	1,0795	1,0827	0,9
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0

$\nu$	$\rho = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	$\rho = 0$	$\nu$
0,0	1,3788	1,3354	1,2746	1,1967	1,1055	1,0028	0,8979	0,7974	0,7104	0,6498	0,6276	0,0
0,1	1,3765	1,3340	1,2740	1,1970	1,1066	1,0044	8995	7990	7121	6513	6291	0,1
0,2	1,3693	1,3294	1,2721	1,1978	1,1097	1,0088	9044	8041	7172	6562	6337	0,2
0,3	1,3565	1,3210	1,2684	1,1986	1,1140	1,0159	9127	8129	7259	6645	6420	0,3
0,4	1,3370	1,3076	1,2618	1,1986	1,1198	1,0255	9247	8258	7387	6769	6542	0,4
0,5	1,3091	1,2872	1,2504	1,1962	1,1254	1,0375	9406	8434	0,7566	0,6943	0,6714	0,5
0,6	1,2708	1,2572	1,2308	1,1886	1,1293	1,0512	9607	8667	7807	7182	6950	0,6
0,7	1,2205	1,2144	1,1992	1,1712	1,1276	1,0642	0,9846	8971	8135	7512	7279	0,7
0,8	1,1574	1,1568	1,1512	1,1375	1,1125	1,0702	1,0097	9354	8585	7984	7753	0,8
0,9	1,0827	1,0842	1,0840	1,0808	1,0729	1,0557	1,0251	0,9790	0,9217	0,8710	0,8503	0,9
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0

Отношение радиусов  $\delta = 0,8$ 

$\nu$	$1/\rho = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$1/\rho = 1$	$\nu$
0,0	1	1,0238	1,0920	1,1947	1,3140	1,4287	1,5156	1,5633	1,5718	1,5492	1,5060	0,0
0,1	1	1,0235	1,0910	1,1924	1,3100	1,4232	1,5094	1,5573	1,5668	1,5456	1,5037	0,1
0,2	1	1,0228	1,0880	1,1856	1,2983	1,4070	1,4908	1,5393	1,5517	1,5342	1,4964	0,2
0,3	1	1,0216	1,0830	1,1743	1,2792	1,3805	1,4600	1,5089	1,5254	1,5142	1,4828	0,3
0,4	1	1,0199	1,0761	1,1589	1,2531	1,3444	1,4177	1,4658	1,4868	1,4834	1,4608	0,4
0,5	1	1,0177	1,0674	1,1396	1,2209	1,2997	1,3645	1,4101	1,4346	1,4393	1,4272	0,5
0,6	1	1,0151	1,0570	1,1169	1,1833	1,2478	1,3018	1,3424	1,3682	1,3795	1,3777	0,6
0,7	1	1,0120	1,0449	1,0911	1,1414	1,1901	1,2317	1,2645	1,2881	1,3026	1,3085	0,7
0,8	1	1,0084	1,0314	1,0627	1,0961	1,1285	1,1562	1,1791	1,1970	1,2101	1,2187	0,8
0,9	1	1,0044	1,0162	1,0322	1,0485	1,0646	1,0782	1,0897	1,0992	1,1068	1,1128	0,9
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0

$\nu$	$\rho = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	$\rho = 0$	$\nu$
0,0	1,5060	1,4454	1,3638	1,2627	1,1475	1,0190	0,8911	0,768	0,655	0,566	0,530	0,0
0,1	1,5037	1,4443	1,3640	1,2636	1,1492	1,0210	0,8928	0,767	0,654	0,568	0,533	0,1
0,2	1,4964	1,4408	1,3636	1,2664	1,1540	1,0271	0,8985	0,773	0,658	0,573	0,536	0,2
0,3	1,4828	1,4337	1,3528	1,2706	1,1617	1,0368	0,9090	0,782	0,667	0,578	0,544	0,3
0,4	1,4608	1,4209	1,3593	1,2752	1,1721	1,0508	0,9245	0,796	0,680	0,592	0,556	0,4
0,5	1,4272	1,3990	1,3503	1,2782	1,1845	1,0693	0,9453	0,819	0,700	0,611	0,573	0,5
0,6	1,3777	1,3628	1,3304	1,2754	1,1963	1,0916	0,9729	0,847	0,729	0,633	0,598	0,6
0,7	1,3085	1,3059	1,2913	1,2583	1,2016	1,1153	1,0077	0,886	0,765	0,668	0,627	0,7
0,8	1,2187	1,2235	1,2231	1,2126	1,1855	1,1309	1,0475	0,938	0,818	0,719	0,680	0,8
0,9	1,1128	1,1178	1,1222	1,1242	1,1216	1,1069	1,0719	1,008	0,905	0,807	0,764	0,9
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0

Отношение радиусов  $\delta = 0,9$ 

$\nu$	$1/\rho = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$1/\rho = 1$	$\nu$
0,0	1	1,0305	1,1178	1,2526	1,4133	1,5682	1,6850	1,7454	1,7477	1,7158	1,6554	0,0
0,1	1	1,0302	1,1165	1,2495	1,4079	1,5605	1,6765	1,7379	1,7420	1,7120	1,6541	0,1
0,2	1	1,0292	1,1126	1,2403	1,3916	1,5379	1,6514	1,7148	1,7242	1,7003	1,6470	0,2
0,3	1	1,0276	1,1061	1,2251	1,3651	1,5010	1,6091	1,6751	1,6926	1,6787	1,6343	0,3
0,4	1	1,0255	1,0971	1,2045	1,3294	1,4510	1,5508	1,6178	1,6443	1,6437	1,6131	0,4
0,5	1	1,0227	1,0858	1,1789	1,2857	1,3897	1,4777	1,5425	1,5765	1,5899	1,5765	0,5
0,6	1	1,0193	1,0723	1,1490	1,2353	1,3192	1,3922	1,4501	1,4875	1,5118	1,5155	0,6
0,7	1	1,0153	1,0568	1,1154	1,1800	1,2423	1,2975	1,3438	1,3783	1,4066	1,4221	0,7
0,8	1	1,0108	1,0394	1,0789	1,1213	1,1618	1,1977	1,2291	1,2546	1,2781	1,2955	0,8
0,9	1	1,0056	1,0204	1,0402	1,0609	1,0802	1,0972	1,1126	1,1248	1,1374	1,1478	0,9
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0

$\nu$	$\rho = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	$\rho = 0$	$\nu$
0,0	1,6564	1,5738	1,4700	1,3451	1,2034	1,0588	0,9025	0,7511	0,6078	0,4741	0,4099	0,0
0,1	1,6541	1,5734	1,4705	1,3466	1,2057	1,0580	0,9050	0,7520	0,6095	0,4763	0,4114	0,1
0,2	1,6470	1,5722	1,4725	1,3517	1,2130	1,0644	0,9109	0,7596	0,6150	0,4807	0,4161	0,2
0,3	1,6343	1,5686	1,4762	1,3606	1,2260	1,0808	0,9273	0,7725	0,6246	0,4890	0,4229	0,3
0,4	1,6131	1,5598	1,4793	1,3724	1,2427	1,0973	0,9432	0,7887	0,6389	0,5012	0,4311	0,4
0,5	1,5765	1,5403	1,4771	1,3845	1,2665	1,1207	0,9693	0,8121	0,6593	0,5185	0,4472	0,5
0,6	1,5155	1,5008	1,4620	1,3922	1,2887	1,1564	1,0067	0,8473	0,6886	0,5431	0,4673	0,6
0,7	1,4221	1,4276	1,4178	1,3820	1,3091	1,2007	1,0567	0,8960	0,7308	0,5794	0,4969	0,7
0,8	1,2955	1,3100	1,3214	1,3226	1,2993	1,2332	1,1190	0,9648	0,7951	0,6383	0,5433	0,8
0,9	1,1478	1,1580	1,1698	1,1829	1,1972	1,1918	1,1694	1,0658	0,9064	0,7313	0,6278	0,9
1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,0

2. Два контура, оси которых пересекаются в произвольной точке (рис. 5-21). Для двух контуров, оси которых пересекаются в произвольной точке,

$$M = \frac{\pi \mu_0 R_1^2 R_2^2}{a_1^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{n-1} \times \\ \times \frac{P_n(v) P'_n(\eta_1) P'_n(\eta_2)}{n(n+1)}, \quad (5-50)$$

где

$$a_1^2 = R_1^2 + r_1^2; \quad \eta_1 = \cos \alpha_1 = r_1/a_1;$$

$$v = \cos \theta; \quad a_2^2 = R_2^2 + r_2^2;$$

$$\eta_2 = \cos \alpha_2 = r_2/a_2; \quad a_1 > a_2;$$

$\theta$  — угол между осями контуров ( $0 \leq \theta \leq \pi$ );  $P_n(v)$  — полином Лежандра;  $P'_n(\eta_1)$  и  $P'_n(\eta_2)$  — производные от полиномов Лежандра  $P_n(\eta_1)$  и  $P_n(\eta_2)$  по их аргументам. Значения  $P_n(v)$ ,  $P'_n(\eta_1)$  и  $P'_n(\eta_2)$  могут быть найдены по таблицам и формулам, приведенным в приложениях 1, 5, 6.

Если ряд (5-50) сходится недостаточно быстро, то взаимную индуктивность можно вычислить методом однократного численного интегрирования (§ 5-12).

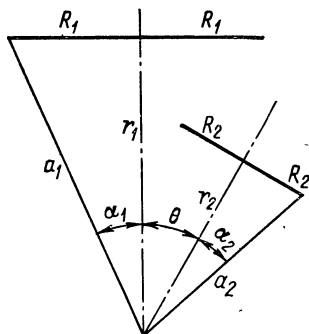


Рис. 5-21

## 5-12. ЧИСЛОВОЙ РАСЧЕТ ВЗАИМНЫХ ИНДУКТИВНОСТЕЙ КРУГОВЫХ КОНТУРОВ

Приводимые ниже формулы сводят расчет взаимных индуктивностей круговых контуров при любом их взаимном расположении к задаче однократного численного интегрирования\*, выполняемого при помощи любой из формул механических квадратур (приложение 3).

Взаимная индуктивность круговых контуров с параллельными или пересекающимися осями может быть представлена в виде

$$M = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f M_{\lambda}}{A^2} d\theta,$$

где  $f$  и  $A$  — указанные ниже определенные функции от  $\theta$ , а  $M_{\lambda}$  — взаимная индуктивность коаксиальных круговых контуров, радиусы которых равны  $R_1$  и  $\rho = AR_2$  и плоскости которых находятся друг от друга на расстоянии  $d$ , определяемом так, как указано ниже.

\* Обоснование метода дано в § 1-12.

Величина  $M_\lambda$  может быть вычислена по формулам § 5-8 или же определена по кривым рис. 5-7—5-9.

Если определять  $M_\lambda$  по табл. 5-5 и 5-6, то удобнее представить  $M$  в виде

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \sqrt{R_1 R_2} \int_0^\pi \frac{jF}{A^{3/2}} d\vartheta, \quad (5-51)$$

где  $F$  — величина, данная в таблицах, причем аргумент  $m^2$ , зависящий от  $\vartheta$ , определяется по формуле

$$m^2 = \frac{(1 - \delta A)^2 + \beta^2}{(1 + \delta A)^2 + \beta^2}, \quad (5-52)$$

где  $\delta = R_2/R_1$ ;  $\beta = d/R_1$ .

1. Для контуров с параллельными осями (рис. 5-18)

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{R_2}\right)^2 - 2 \frac{a}{R_2} \cos \vartheta}; \quad (5-53)$$

$$f = 1 - \frac{a}{R_2} \cos \vartheta; \quad d = r \cos \theta = x, \quad (5-54)$$

где  $a = r \sin \theta = y$ .

2. Для контуров с пересекающимися осями (рис. 5-21)

$$A^2 = 1 - \cos^2 \vartheta \sin^2 \theta - 2 \frac{a}{R_2} \cos \vartheta \cos \theta + \left(\frac{a}{R_2}\right)^2; \quad (5-55)$$

$$f = \cos \theta - \frac{a}{R_2} \cos \vartheta; \quad d = r_1 - R_2 \cos \vartheta \sin \theta - r_2 \cos \theta, \quad (5-56)$$

где  $a = r_2 \sin \theta$ .

В частности, если оси контуров пересекаются в центре круга с радиусом  $R_2$ , то  $r_2 = 0$ ,  $r_1 = r$ ,  $a = 0$  и

$$A^2 = 1 - \cos^2 \vartheta \sin^2 \theta; \quad f = \cos \theta; \quad d = r - R_2 \cos \vartheta \sin \theta. \quad (5-57)$$

Если контуры имеют общий центр, то, кроме того,  $r = 0$ .

В общем случае совместим центр  $O_1$  первого круга с началом декартовой системы координат, ось  $z$  направим вдоль оси этого круга, а плоскость  $xz$  проведем через центр  $O_2$  второго круга (рис. 5-22). Ось второго круга пересечет любую сферу, проведенную из точки  $O_2$  как из центра, в некоторой точке  $P$ , положение которой определим долготой  $\psi$ , отсчитываемой от плоскости  $xz$  по часовой стрелке, и широтой  $\theta$ , отсчитываемой от прямой  $O_2 z'$ , па-

параллельной оси  $z$ . Тогда, полагая

$$A^2 = 1 - \cos^2 \vartheta \sin^2 \theta + \frac{2a}{R_2} (\sin \psi \sin \vartheta - \cos \psi \cos \vartheta \cos \theta) + \frac{a^2}{R_2^2}; \quad (5-58)$$

$$f = \cos \theta - \frac{a}{R_2} (\cos \psi \cos \vartheta - \sin \psi \sin \vartheta \cos \theta); \quad (5-59)$$

$$d = h - R_2 \cos \vartheta \sin \theta, \quad (5-60)$$

имеем

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f M_\lambda}{A^2} d\vartheta = \frac{\mu_0 V \sqrt{R_1 R_2}}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{f F}{A^{3/2}} d\vartheta, \quad (5-61)$$

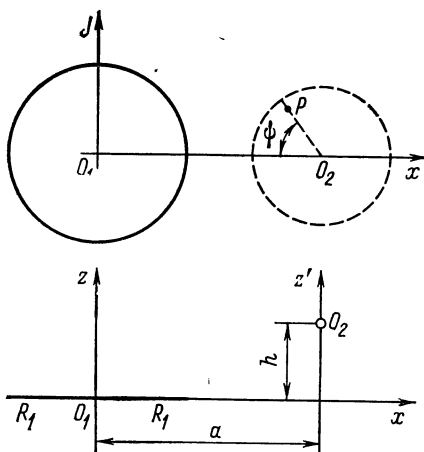


Рис. 5-22

где по-прежнему  $M_\lambda$  — взаимная индуктивность коаксиальных контуров с радиусами  $R_1$  и  $\rho = AR_2$ , отстоящих друг от друга на расстояние  $d$ , а  $F$  — функция, данная в табл. 5-5 и 5-6, причем аргумент  $m^2$  определяется по формуле (5-52).

**Пример 5-12.** Два круговых контура, радиусы которых равны  $R_1 = 20$  см и  $R_2 = 10$  см, расположены так, что ось первого контура проходит через центр второго. Расстояние между центрами контуров  $r_1 = 20$  см. Оси контуров составляют угол  $\theta = 30^\circ$ . Определить взаимную индуктивность контуров.

**Решение.** Для определения взаимной индуктивности контуров применяем метод однократного численного интегрирования. В данном случае величина  $f$  постоянна ( $f = \cos \theta = 0,8660$ ) и ее можно вынести за знак интеграла в формуле (5-51).

Последовательность расчета такова. Сначала по формулам (5-57) вычисляем значения величин  $A$  и  $d$ , соответствующие различным значениям переменной  $\vartheta$ . Зная  $A$  и  $\beta = d/R_1$ , находим по формуле (5-52) величину  $m^2$ , после чего по табл. 5-5 определяем соответствующие значения функции  $F$ .

Результат расчета сводим в табл. 5-10 и производим численное интегрирование.

Применяя параболическую формулу (приложение 3), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{F d \vartheta}{A^{3/2}} &= \frac{1}{3} \frac{\pi}{12} [2(3,429 + \dots + 1,607) + 4(3,381 + \\ &+ \dots + 1,625) - (3,429 + 1,607)] = \frac{\pi}{36} (2 \cdot 16,938 + \\ &+ 4 \cdot 14,421 - 5,035) = 2,403 \pi. \end{aligned}$$



Таблица 5-10. Числовые величины к примеру 5-12

$\phi, \dots^\circ$	$A^2$	$A$	$A^{3/2}$	$d,$ см	$\beta$	$m^2$	$F$	$\frac{F}{A^{3/2}}$
0	0,7500	0,8660	0,8059	15,00	0,7500	0,3379	2,764	3,429
15	0,7667	0,8762	0,8202	15,17	0,7585	0,3373	2,770	3,381
30	0,8125	0,9014	0,8558	15,67	0,7835	0,3368	2,778	3,243
45	0,8750	0,9354	0,9047	16,46	0,8230	0,3394	2,747	3,037
60	0,9375	0,9682	0,9527	17,50	0,8750	0,3476	2,657	2,789
75	0,9832	0,9916	0,9874	18,71	0,9355	0,3626	2,500	2,532
90	1,0000	1,0000	1,0000	20,00	1,000	0,3848	2,288	2,288
105	0,9832	0,9916	0,9874	21,29	1,065	0,4117	2,050	2,076
120	0,9375	0,9682	0,9527	22,50	1,125	0,4417	1,813	1,903
135	0,8750	0,9354	0,9047	23,54	1,177	0,4714	1,602	1,771
150	0,8125	0,9014	0,8558	24,33	1,217	0,4970	1,437	1,679
165	0,7667	0,8762	0,8202	24,83	1,242	0,5147	1,331	1,625
180	0,7500	0,8660	0,8059	25,00	1,250	0,5210	1,295	1,607

Подставив найденное значение интеграла в формулу (5-51), получим искомую взаимную индуктивность

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi^2} \sqrt{0,2 \cdot 0,1} \cdot 0,8660 \cdot 2,403\pi = 2,944 \cdot 10^{-8} \text{ Гн.}$$

Расчет по формуле (5-48) с применением табл. 5-9 дает в данном случае тот же результат.

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### СОБСТВЕННЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ КРУГОВЫХ КАТУШЕК

#### 6-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В настоящей главе даны формулы, таблицы и кривые для расчета собственных индуктивностей круговых катушек, т. е. катушек, обмотка которых занимает объем, имеющий форму тела вращения. В подавляющем большинстве случаев катушки имеют прямоугольное поперечное сечение\*, и вопросы расчета индуктивностей наиболее полно разработаны именно для таких катушек. На рис. 6-1 изображен

\* Здесь и далее в этой главе поперечным сечением катушки называется сечение, перпендикулярное направлению тока в витках катушки,

разрез катушки прямоугольного поперечного сечения, причем через  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d$  обозначены соответственно внешний, внутренний и средний диаметры катушки, через  $a$  — ее длина (аксиальный размер), через  $r = (d_1 - d_2)/2$  — толщина (радиальный размер) поперечного сечения обмотки.

В зависимости от соотношения между размерами  $a$ ,  $r$  и  $d$  катушки прямоугольного сечения называются:

длинными, если  $a > d$ ;

короткими, если  $a < d$ ;

весьма короткими, если  $a \ll d$ ;

плоскими (дисковыми), если  $a = 0$ ;

толстыми, если  $r$  одного порядка с  $d$ ;

тонкими, если  $r \ll d$ ;

соленоидами, если  $r = 0$ .

2. Формулы, таблицы и кривые настоящей главы дают значения так называемых *расчетных индуктивностей*, т. е. индуктивностей, вычисленных в предположении, что витки катушки представляют собой коаксиальные круговые контуры, имеют бесконечно тонкую изоляцию и плотно заполняют все пространство, занятое обмоткой (§ 1-14); предполагается, кроме того, что витки катушки уложены равномерно как по длине, так и в радиальном направлении.

Отличие действительной индуктивности катушки от ее расчетной индуктивности обычно настолько невелико, что в большинстве технических расчетов им вообще пренебрегают. Это отличие бывает необходимо учитывать лишь в расчетах, требующих высокой степени точности, а также относящихся к катушкам с малым коэффициентом заполнения, например к реакторам, применяемым для ограничения токов короткого замыкания. В подобных случаях для получения действительной индуктивности  $L$  к расчетной индуктивности  $L_p$  прибавляют поправку  $\Delta L$ , обычно называемую *поправкой на изоляцию*. Эта поправка состоит из двух частей, первая из которых ( $\Delta_1 L$ ) учитывает различие между собственными индуктивностями действительных и «расчетных» витков, а вторая ( $\Delta_2 L$ ) — различие между их

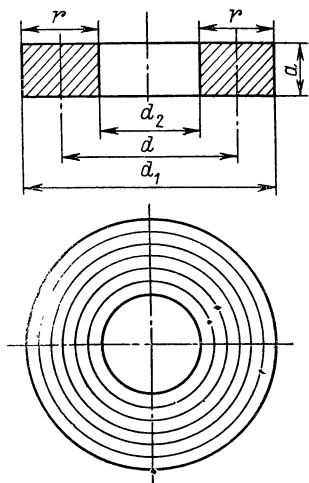


Рис. 6-1

взаимными индуктивностями (§ 1-14). Во многих случаях поправка  $\Delta_2 L$  в несколько раз меньше поправки  $\Delta_1 L$ , вследствие чего ее чаще всего не учитывают. Формулы и таблицы для вычисления обеих поправок при прямоугольной форме поперечного сечения обмотки даны в § 6-9.

3. Приступая к расчету индуктивности катушки, прежде всего определяют ее расчетную индуктивность, после чего, если необходимо, вносят поправки на изоляцию.

При определении расчетной индуктивности средний диаметр катушки берется равным среднему диаметру действительной катушки; аксиальный размер  $a$  и радиальный размер  $r$  поперечного сечения принимаются равными шагу обмотки, умноженному на число слоев обмотки в данном направлении (например, для катушки, сечение которой изображено на рис. 6-11, в,  $a = 2p$ ,  $r = 2q$ , где  $p$  — шаг обмотки в аксиальном направлении,  $q$  — то же в радиальном направлении).

Если катушка имеет в каком-либо направлении только один слой, ее размер ( $r$  или  $a$ ) в этом направлении чаще всего принимают равным нулю, т. е. рассчитывают катушку как соленоид или соответственно как плоскую катушку. Однако для провода кругового сечения этот размер можно также принять равным диаметру голого провода или шагу обмотки; для провода прямоугольного сечения размер  $r$  (или  $a$ ) можно принять равным соответствующему размеру поперечного сечения голого провода. В зависимости от принятого варианта расчета значения расчетной индуктивности, соответствующие одной и той же действительной катушке, будут отличаться друг от друга. Однако, так как и поправки на изоляцию будут в разных вариантах различными, значение индуктивности, полученное после внесения поправок, во всех вариантах расчета должно получиться одним и тем же.

4. Все формулы, таблицы и кривые настоящей главы получены в предположении, что ток распределен по сечениям отдельных витков равномерно, и пригодны, следовательно, для определения индуктивностей, строго говоря, лишь при низкой частоте.

Расчет индуктивностей катушек с учетом поверхностного эффекта представляет собой задачу, еще не получившую удовлетворительного разрешения. Для оценки погрешности, вызываемой пренебрежением поверхностным эффектом, следует иметь в виду, что поправка на изменение частоты является величиной того же порядка, что и поправка на изоляцию.

5. При одинаковом распределении тока по сечению расчетные индуктивности катушек отличаются от индуктивностей соответствующих массивных колец только множителем  $\omega^2$  (§ 1-14). Поэтому приведенные в этой главе формулы, таблицы и кривые могут быть использованы и для определения индуктивностей массивных колец при низкой частоте.

## 6-2. ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДА

Индуктивность соленоида

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 d \Phi, \quad (6-1)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида;  $d$  — его диаметр (рис. 6-2);  $\Phi$  — величина, значения которой даны в табл. 6-1 в зависимости от отношения  $\alpha = a/d$  ( $a$  — длина соленоида).

Более точно значения индуктивности соленоида можно найти по формуле

$$L = \frac{\pi}{4} \mu_0 \omega^2 \frac{d^2}{a} K_a, \quad (6-2)$$

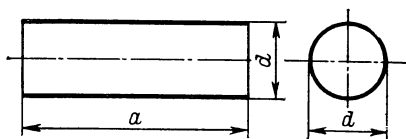


Рис. 6-2

где  $\omega$ ,  $d$  и  $a$  — то же, что и в предыдущей формуле, а  $K_a$  — коэффициент, значения которого в зависимости от  $\alpha$  или  $1/\alpha$  даны в табл. 6-2.

Точное выражение для величины  $\Phi$ , входящей в формулу (6-1), имеет вид

$$\Phi = \frac{4\pi}{3} \left[ \sqrt{a^2 + 1} \left( K + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} E \right) - \frac{1}{\alpha^2} \right], \quad (6-3)$$

где  $K$  и  $E$  — соответственно полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем

$$k = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \quad (6-4)$$

(приложение 1).

При большом  $\alpha$ , т. е. для длинного соленоида, можно пользоваться формулой

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{\pi^2}{\alpha} \left[ 1 - \frac{4}{3\pi} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{8} \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{64} \frac{1}{\alpha^4} + \dots + \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \frac{(3 \cdot 5 \dots 2n-3)^2}{2^{2n} \cdot n! (n+1)!} \frac{2n-1}{\alpha^{2n}} + \dots \right] \end{aligned} \quad (6-5)$$

Таблица 6-1. Значения  $\Phi$ 

$1/\alpha$	$\Phi$	$1/\alpha$	$\Phi$	$1/\alpha$	$\Phi$	$1/\alpha$	$\Phi$
0,00	0,000	0,25	2,225	0,50	4,04	0,75	5,54
01	0,098	26	2,304	51	4,10	76	5,59
2	0,196	27	2,384	52	4,17	77	5,64
3	0,292	28	2,462	53	4,23	78	5,70
4	0,388	29	2,540	54	4,30	79	5,75
0,05	0,483	0,30	2,617	0,55	4,36	0,80	5,80
6	0,577	31	2,693	56	4,42	81	5,86
7	0,671	32	2,769	57	4,48	82	5,91
8	0,763	33	2,844	58	4,55	83	5,96
9	0,855	34	2,919	59	4,61	84	6,01
0,10	0,946	0,35	2,993	0,60	4,67	0,85	6,06
11	1,037	36	3,067	61	4,73	86	6,11
12	1,126	37	3,140	62	4,79	87	6,16
13	1,215	38	3,212	63	4,85	88	6,22
14	1,303	39	3,284	64	4,91	89	6,27
0,15	1,390	0,40	3,355	0,65	4,97	0,90	6,32
16	1,477	41	3,426	66	5,03	91	6,36
17	1,563	42	3,496	67	5,08	92	6,41
18	1,648	43	3,565	68	5,14	93	6,46
19	1,732	44	3,634	69	5,20	94	6,51
0,20	1,816	0,45	3,703	0,70	5,26	0,95	6,56
21	1,899	46	3,771	71	5,31	96	6,61
22	1,982	47	3,838	72	5,37	97	6,65
23	2,063	48	3,905	73	5,42	98	6,70
24	2,144	49	3,972	74	5,48	99	6,75
0,25	2,225	0,50	4,037	0,75	5,54	1,00	6,79

или формулой

$$\Phi = \frac{\pi^2}{2\alpha^2} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{8}{3\pi} - \frac{\beta^3}{8} + \frac{\beta^5}{16} - \frac{15}{128} \beta^7 + \frac{21}{128} \beta^9 - \right. \\ \left. - \frac{315}{1024} \beta^{11} + \frac{297}{512} \beta^{13} - \dots \right), \quad (6-6)$$

где

$$\beta = \frac{d/2}{\sqrt{a^2 + d^2/4}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}}. \quad (6-7)$$

При малом  $\alpha$ , т. е. для короткого соленоида,

$$\Phi = 2\pi \left[ \left( 1 + \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^4}{64} + \dots \right) \ln \frac{4}{\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{32} + \frac{\alpha^4}{96} + \dots \right]. \quad (6-8)$$

Последняя формула может заменить табл. 6-1 и 6-2 в тех случаях, когда интерполирование по этим таблицам при малых значениях  $\alpha$  не обеспечивает необходимой степени точности расчета.

Все формулы настоящего параграфа применимы не только для расчета индуктивностей соленоида, т. е. бесконечно

в формуле (6-1) для соленоида

$\alpha$	$\Phi$	$\alpha$	$\Phi$	$\alpha$	$\Phi$	$\alpha$	$\Phi$
1,00	6,79	0,75	8,20	0,50	10,37	0,25	14,43
0,99	6,84	74	8,27	49	10,48	24	14,67
98	6,89	73	8,34	48	10,60	23	14,93
97	6,94	72	8,41	47	10,72	22	15,20
96	6,98	71	8,48	46	10,84	21	15,48
0,95	7,03	0,70	8,55	0,45	10,97	0,20	15,78
94	7,08	69	8,63	44	11,10	19	16,10
93	7,14	68	8,70	43	11,23	18	16,43
92	7,19	67	8,78	42	11,36	17	16,78
91	7,24	66	8,86	41	11,50	16	17,15
0,90	7,29	0,65	8,94	0,40	11,64	0,15	17,55
89	7,35	64	9,02	39	11,79	14	17,98
88	7,40	63	9,11	38	11,94	13	18,44
87	7,46	62	9,19	37	12,10	12	18,93
86	7,51	61	9,28	36	12,26	11	19,47
0,85	7,57	0,60	9,37	0,35	12,42	0,10	20,07
84	7,63	59	9,46	34	12,59	09	20,72
83	7,69	58	9,55	33	12,77	08	21,46
82	7,75	57	9,65	32	12,95	07	22,29
81	7,81	56	9,75	31	13,14	06	23,26
0,80	7,87	0,55	9,85	0,30	13,33	0,05	24,40
79	7,94	54	9,95	29	13,53	04	25,80
78	8,00	53	10,05	28	13,74	03	27,60
77	8,06	52	10,15	27	13,96	02	30,15
76	8,13	51	10,26	26	14,19	01	34,50
0,75	8,20	0,50	10,37	0,25	14,43	0,00	$\infty$

тонкой катушки ( $r = 0$ ), но и для расчета индуктивностей весьма тонких катушек, т. е. катушек с достаточно малым значением отношения  $r/d$ , в частности — для расчета большинства однослойных (в радиальном направлении) катушек. Более точно влияние толщины обмотки может быть учтено так, как указано в § 6-5.

**Пример 6-1.** Соленоид диаметром  $d = 10$  см и длиной  $a = 50$  см имеет  $\omega = 500$  витков. Определить индуктивность соленоида.

**Решение.**

1. Применяем формулу (6-1) и табл. 6-1. В данном случае  $\alpha = 50/10 = 5$ ,  $1/\alpha = 0,2$ , и из табл. 6-1 находим  $\Phi = 1,816$ . Следовательно,

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} 25 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 1,816 = 4,540 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

2. Применяем формулу (6-2) и табл. 6-2. При  $1/\alpha = 0,2$  из табл. 6-2 находим  $K_a = 0,9201$  и, следовательно,

$$L = \frac{\pi}{4} 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^4 \frac{0,01}{0,5} \cdot 0,9201 = 4,541 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Таблица 6-2. Значения  $K_a$  в формуле (6-2) для соленоида

$\alpha$	$K_a$	$\alpha$	$K_a$	$\alpha$	$K_a$	$\alpha$	$K_a$
0,00	0,000000	0,25	0,365432	0,50	0,525510	0,75	0,623011
01	034960	26	373818	51	530309	76	626122
02	061098	27	381986	52	535017	77	629185
03	083908	28	389945	53	539637	78	632200
0,04	0,104562	0,29	0,397703	0,54	0,544170	0,79	0,635170
0,05	0,123615	0,30	0,405269	0,55	0,548620	0,80	0,638094
06	141395	31	412651	56	552989	81	640973
07	158119	32	419856	57	557278	82	643810
08	173942	33	426890	58	561490	83	646604
0,09	0,188980	0,34	0,433761	0,59	0,565627	0,84	0,649357
0,10	0,203324	0,35	0,440475	0,60	0,569691	0,85	0,652070
11	217044	36	447036	61	573683	86	654742
12	230200	37	453451	62	577606	87	657376
13	242842	38	459724	63	581462	88	659972
0,14	0,255011	0,39	0,465860	0,64	0,585251	0,89	0,662530
0,15	0,266744	0,40	0,471865	0,65	0,588976	0,90	0,665052
16	278070	41	477741	66	592638	91	667539
17	289019	42	483495	67	596240	92	669990
18	299614	43	489128	68	599781	93	672407
0,19	0,309876	0,44	0,494646	0,69	0,603264	0,94	0,674791
0,20	0,319826	0,45	0,500051	0,70	0,606690	0,95	0,677141
21	329479	46	505348	71	610060	96	679460
22	338852	47	510539	72	613376	97	681746
23	347961	48	515628	73	616639	98	684002
24	356816	49	520617	74	619850	0,99	0,686227
0,25	0,365432	0,50	0,525510	0,75	0,623011	1,00	0,688423

$1/\alpha$	$K_a$	$1/\alpha$	$K_a$	$1/\alpha$	$K_a$	$1/\alpha$	$K_a$
0,00	1,000000	0,25	0,901649	0,50	0,818136	0,75	0,747762
01	0,995768	26	898033	51	815082	76	745190
02	991562	27	894440	52	812049	77	742637
03	987380	28	890871	53	809037	78	740100
0,04	0,983223	0,29	0,887325	0,54	0,806046	0,79	0,737581
0,05	0,979092	0,30	0,883803	0,55	0,803075	0,80	0,735079
06	974985	31	880304	56	800125	81	732594
07	970903	32	876829	57	797195	82	730126
08	966846	33	873377	58	794285	83	727674
0,09	0,962814	0,34	0,869948	0,59	0,791395	0,84	0,725239
0,10	0,958807	0,35	0,866542	0,60	0,788525	0,85	0,722820
11	954825	36	863159	61	785674	86	720418
12	950867	37	859799	62	782843	87	718032
13	946934	38	856461	63	780032	88	715662
0,14	0,943026	0,39	0,853146	0,64	0,777240	0,89	0,713308
0,15	0,939143	0,40	0,849853	0,65	0,774467	0,90	0,710969
16	935284	41	846583	66	771713	91	708646
17	931449	42	843335	67	768978	92	706339
18	927639	43	840109	68	766262	93	704047
0,19	0,923854	0,44	0,836905	0,69	0,763564	0,94	0,701770
0,20	0,920093	0,45	0,833723	0,70	0,760885	0,95	0,699508
21	916356	46	830563	71	758224	96	697262
22	912643	47	827424	72	755582	97	695030
23	908954	48	824307	73	752957	98	692813
24	905290	49	821211	74	750350	0,99	0,690611
0,25	0,901649	0,50	0,818136	0,75	0,747762	1,00	0,688423



3. Применяем формулу (6-1), определяя  $\Phi$  по формуле (6-3). Модуль эллиптических интегралов  $k = 1/\sqrt{25+1} = 1/\sqrt{26}$ ; его квадрат  $k^2 = 1/26 = 0,038462$ . По таблицам эллиптических интегралов находим  $K = 1,58624$  и  $E = 1,55559$ . Кроме того,

$$\sqrt{\alpha^2 + 1} = 5,0990; \quad (1 - \alpha^2)/\alpha^2 = -0,96; \quad 1/\alpha^2 = 0,0400.$$

Подставляя найденные значения в формулу (6-3), находим

$$\Phi = \frac{4\pi}{3} [5,0990 (1,58624 - 1,49337) - 0,0400] =$$

$$= \frac{4\pi}{3} (5,0990 \cdot 0,09287 - 0,0400) = 1,816;$$

$$L = 25 \cdot 10^{-4} \cdot 1,816 = 4,540 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

В данном случае выражение для  $\Phi$  содержит разность близких величин, поэтому для обеспечения достаточной степени точности эллиптические интегралы пришлось определять с сохранением шести значащих цифр.

4. Применяем формулу (6-1), определяя  $\Phi$  по формуле (6-5):

$$\frac{4}{3\pi} \frac{1}{\alpha} = 0,08487; \quad \frac{1}{8} \frac{1}{\alpha^2} = 0,00500;$$

$$\Phi = \frac{\pi^2}{\alpha} \cdot 0,9201 = 1,816; \quad L = 4,540 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

5. Применяем формулу (6-1), определяя  $\Phi$  по формуле (6-6). В данном случае

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+100}} = 0,09950; \quad \frac{1}{\beta} = 10,05; \quad \frac{8}{3\pi} = 0,8487;$$

$$\Phi = \frac{\pi^2}{2 \cdot 25} (10,05 - 0,8487) = 1,816; \quad L = 4,540 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

В рассмотренном примере для аналитического расчета наиболее удобно определять  $\Phi$  по формуле (6-6).

**Пример 6-2.** Соленоид диаметром  $d = 50$  см и длиной  $a = 20$  см имеет  $\omega = 110$  витков. Определить индуктивность соленоида.

**Решение.**

1. Применяем формулу (6-1) и табл. 6-1. В данном случае  $\alpha = 20/50 = 0,4$ . По табл. 6-1 находим  $\Phi = 11,64$ , и, следовательно,

$$L = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 121 \cdot 10^2 \cdot 0,5 \cdot 11,64 = 7,042 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

2. Применяем формулу (6-2) и табл. 6-2. При  $\alpha = 0,4$  из табл. 6-2 находим  $K_a = 0,4719$ , и, следовательно,

$$L = \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 121 \cdot 10^2 \frac{0,25}{0,20} \cdot 0,4719 = 7,045 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Применяем формулу (6-1), определяя  $\Phi$  по формуле (6-8). В данном случае

$$\frac{4}{\alpha} = 10; \quad \ln \frac{4}{\alpha} = 2,303; \quad \frac{\alpha^2}{8} = 0,02; \quad \frac{\alpha^2}{32} = 0,005;$$

$$\Phi = 2\pi (1,020 \cdot 2,303 - 0,500 + 0,005) = 2\pi \cdot 1,854 = 11,65;$$

$$L = 7,048 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

### 6-3. ИНДУКТИВНОСТЬ ПЛОСКОЙ (ДИСКОВОЙ) КАТУШКИ

Индуктивность плоской (дисковой) катушки

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} \omega^2 d \Psi, \quad (6-9)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $d = (d_1 + d_2)/2$  — ее средний диаметр (рис. 6-3);  $\Psi$  — величина, значения которой даны в табл. 6-3 в зависимости от отношения  $\rho = r/d$ .

При малых значениях  $\rho$  интерполирование по табл. 6-3 может оказаться недостаточно точным, и тогда для определения  $\Psi$  следует пользоваться формулой

$$\Psi = 4\pi \left[ \left( 1 + \frac{\rho^2}{24} + \frac{11}{2880} \rho^4 + \dots \right) \ln \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2} + \frac{43}{288} \rho^2 + \frac{1}{150} \rho^4 + \dots \right]. \quad (6-10)$$

Наоборот, при больших  $\rho$  ( $\rho > 0,5$ )

$$\Psi = \frac{(1+\rho)^3}{\rho^3} (1,7424 + 3,2900\gamma^3 \ln \gamma - 2,2700\gamma^3 + 0,3702\gamma^5 + 0,0826\gamma^7 + 0,0312\gamma^9 + \dots), \quad (6-11)$$

где

$$\gamma = \frac{d_2}{d_1} = \frac{1-\rho}{1+\rho}. \quad (6-12)$$

Формулы настоящего параграфа применимы для расчета индуктивностей не только плоских катушек, т. е. катушек с длиной  $a = 0$ , но и весьма коротких катушек, т. е. катушек с достаточно малым отношением  $\alpha = a/d$ , в частности — для расчета большинства однослойных (в аксиаль-

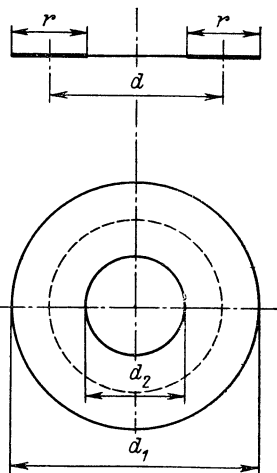


Рис. 6-3

Таблица 6-3. Значения  $\Psi$  в формуле (6-9) для плоской катушки

	$\Psi$	$\rho$	$\Psi$	$\rho$	$\Psi$	$\rho$	$\Psi$
0,00	—	0,25	28,767	0,50	20,601	0,75	16,360
01	69,008	26	28,290	51	20,381	76	16,235
02	60,299	27	27,832	52	20,165	77	16,112
03	55,206	28	27,392	53	19,955	78	15,992
04	51,595	29	26,968	54	19,750	79	15,874
0,05	48,794	0,30	26,560	0,55	19,550	0,80	15,759
06	46,507	31	26,166	56	19,354	81	15,646
07	44,574	32	25,786	57	19,162	82	15,536
08	42,902	33	25,418	58	18,976	83	15,428
09	41,428	34	25,063	59	18,793	84	15,323
0,10	40,111	0,35	24,719	0,60	18,614	0,85	15,220
11	38,920	36	24,386	61	18,440	86	15,119
12	37,835	37	24,063	62	18,269	87	15,021
13	36,838	38	23,750	63	18,102	88	14,925
14	35,916	39	23,446	64	17,939	89	14,832
0,15	35,058	0,40	23,150	0,65	17,779	0,90	14,740
16	34,258	41	22,863	66	17,623	91	14,650
17	33,507	42	22,584	67	17,470	92	14,563
18	32,800	43	22,313	68	17,320	93	14,478
19	32,132	44	22,049	69	17,174	94	14,394
0,20	31,500	0,45	21,792	0,70	17,032	0,95	14,314
21	30,900	46	21,541	71	16,891	96	14,235
22	30,330	47	21,297	72	16,754	97	14,158
23	29,785	48	21,059	73	16,620	98	14,083
24	29,265	49	20,827	74	16,489	99	14,010
0,25	28,767	0,50	20,601	0,75	16,360	1,00	13,939

ном направлении) катушек. Более точно влияние аксиальной толщины обмотки может быть учтено так, как указано в § 6-5.

**Пример 6-3.** Плоская катушка со средним диаметром  $d = 50$  см и радиальным размером  $r = 10$  см имеет  $w = 10$  витков. Определить индуктивность катушки.

**Решение.** Применяем формулу (6-9). В данном случае  $\rho = 10/50 = 0,2$ , и из табл. 6-3 получаем  $\Psi = 31,500$ , откуда

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^7}{8\pi} \cdot 100 \cdot 0,5 \cdot 31,50 = 7,875 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

Так как  $\rho$  мало, то  $\Psi$  можно определить и по формуле (6-10):

$$\frac{\rho^2}{24} = 1,667 \cdot 10^{-3}; \quad \ln \frac{4}{\rho} = 2,996; \quad \frac{43}{288} \rho^2 = 0,006;$$

$$\Psi = 4\pi (1,002 \cdot 2,996 - 0,500 + 0,006) = 4\pi \cdot 2,508 = 31,51;$$

$$L = 0,25 \cdot 31,51 \cdot 10^{-5} = 7,878 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

**Пример 6-4.** Плоская катушка со средним диаметром  $d = 50$  см и радиальным размером  $r = 30$  см имеет  $w = 30$  витков. Определить индуктивность катушки.

**Решение.** Применяем формулу (6-9). В данном случае  $\rho = 30/50 = 0,6$ , и из табл. 6-3 имеем  $\Psi = 18,61$ , откуда

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8\pi} \cdot 900 \cdot 0,5 \cdot 18,61 = 4,187 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Так как  $\rho > 0,5$ , то  $\Psi$  можно определить и по формуле (6-11):

$$\frac{(1 + \rho)^3}{\rho^2} = 11,38; \quad \gamma = \frac{0,4}{1,6} = 0,25; \quad \gamma^3 = 1,563 \cdot 10^{-2}; \quad \ln \gamma = -1,386;$$

$$\Psi = 11,38 (1,7424 - 3,290 \cdot 1,563 \cdot 10^{-2} \cdot 1,386 - 2,270 \cdot 1,563 \cdot 10^{-2}) = \\ = 11,38 \cdot 1,636 = 18,62;$$

$$L = 2,25 \cdot 10^{-5} \cdot 18,62 = 4,190 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Оба результата практически совпадают.

#### 6-4. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШКИ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

Индуктивность катушки квадратного сечения

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} w^2 d \Phi, \quad (6-13)$$

где  $w$  — число витков катушки;  $d$  — ее средний диаметр;  $\Phi$  — величина, значения которой даны в табл. 6-4 в зависимости от отношения  $\alpha = a/d$ , где  $a$  — длина катушки, равная радиальной ее толщине  $r$  (рис. 6-4, а).

При малых значениях  $\alpha$  ( $\alpha < 0,2$ ) интерполирование по табл. 6-4 становится неточным и для вычисления  $\Phi$  лучше пользоваться формулой

$$\Phi = 2\pi \left[ \left( 1 + \frac{1}{6} \alpha^2 \right) \ln \frac{8}{\alpha^2} - 1,6967 + 0,4082 \alpha^2 \right]. \quad (6-14)$$

Катушка квадратного сечения при заданной длине провода и заданном его сечении обладает наибольшей индуктивностью, если отношение  $1/\alpha = d/a$  близко к 3. Для катушки соотношением  $d/a = 3$  (рис. 6-4, б) индуктивность выражается формулой

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 8,497 w^2 d. \quad (6-15)$$

Если заданы индуктивность катушки  $L$  и внешний диаметр провода  $\delta$  (диаметр провода с изоляцией), то размер  $a$  можно найти по формуле

$$a^3 = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\delta^4 L}{25,5}. \quad (6-16)$$

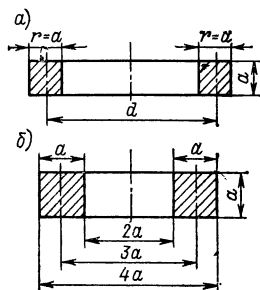


Рис. 6-4

Таблица 6-4. Значения  $\Phi$  в формуле (6-13) для катушки квадратного сечения

$\alpha$	$\Phi$	$\alpha$	$\Phi$	$\alpha$	$\Phi$	$\alpha$	$\Phi$
0,00	$\infty$	0,25	20,304	0,50	12,666	0,75	9,022
01	60,277	26	19,844	51	12,469	76	8,920
02	51,570	27	19,404	52	12,276	77	8,820
03	46,480	28	18,982	53	12,090	78	8,723
04	42,873	29	18,577	54	11,908	79	8,628
0,05	40,078	0,30	18,189	0,55	11,732	0,80	8,535
06	37,798	31	17,814	56	11,559	81	8,445
07	35,873	32	17,454	57	11,392	82	8,357
08	34,208	33	17,107	58	11,230	83	8,271
09	32,743	34	16,771	59	11,072	84	8,188
0,10	31,436	0,35	16,448	0,60	10,918	0,85	8,106
11	30,256	36	16,136	61	10,767	86	8,027
12	29,181	37	15,834	62	10,620	87	7,950
13	28,196	38	15,542	63	10,478	88	7,874
14	27,286	39	15,260	64	10,339	89	7,801
0,15	26,441	0,40	14,986	0,65	10,203	0,90	7,730
16	25,652	41	14,721	66	10,071	91	7,660
17	24,916	42	14,464	67	9,942	92	7,592
18	24,224	43	14,216	68	9,816	93	7,526
19	23,571	44	13,974	69	9,694	94	7,462
0,20	22,954	0,45	13,739	0,70	9,575	0,95	7,400
21	22,370	46	13,512	71	9,459	96	7,339
22	21,816	47	13,291	72	9,346	97	7,280
23	21,288	48	13,077	73	9,235	98	7,222
24	20,785	49	12,868	74	9,128	0,99	7,166
0,25	20,304	0,50	12,666	0,75	9,022	1,00	7,112

Определив  $\alpha$ , можно найти остальные размеры катушки:

$$d_2 = 2a; d_1 = 4a; d = 3a.$$

**Пример 6-5.** Катушка со средним диаметром  $d = 6$  см имеет обмотку, сечение которой представляет собой квадрат со стороной  $a = 1,2$  см. Катушка имеет  $w = 144$  витка. Определить ее индуктивность.

**Решение.** В данном случае  $\alpha = 1,2/6 = 0,2$ , и из табл. 6-4 находим  $\Phi = 22,95$ .

Следовательно,

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8\pi} \cdot 144^2 \cdot 0,06 \cdot 22,95 = 1,428 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Если для определения  $\Phi$  воспользоваться формулой (6-14), то будем иметь

$$\alpha^2 = 0,04; \quad \frac{8}{\alpha^2} = 200; \quad \ln \frac{8}{\alpha^2} = 5,298; \quad \frac{\alpha^2}{6} = 6,667 \cdot 10^{-3};$$

$$0,4082\alpha^2 = 1,633 \cdot 10^{-2};$$

$$\Phi = 2\pi (1,007 \cdot 5,298 - 1,697 + 0,016) = 22,96;$$

$$L = 6,221 \cdot 22,96 \cdot 10^{-5} = 1,429 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

## 6-5. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШКИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

**1. Расчет по кривым.** Индуктивность катушки прямоугольного сечения может быть найдена по формуле

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 d \Phi, \quad (6-17)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $d$  — ее средний диаметр (рис. 6-1);  $\Phi$  — величина, значения которой можно определить по кривым рис. 6-5, 6-6 и 6-7. На этих рисунках по оси абсцисс отложены значения величины  $\rho = r/d$ , а по оси ординат — значения величины  $\alpha = a/d$ , где  $a$  и  $r$  — аксиальный и радиальный размеры поперечного сечения катушки. Значения величины  $\Phi$  определяются путем интерполирования — по значениям, указанным на соответствующих кривых.

**2. Расчет с помощью таблиц.** При  $\alpha > 7,2$ , а также в тех случаях, когда расчет по кривым не обеспечивает необходимой степени точности, можно определять индуктивность катушки прямоугольного сечения с помощью табл. 6-5, 6-6, 6-7, 6-8 одним из следующих двух способов:

а) по формуле

$$L = \frac{\pi}{4} \mu_0 \omega^2 \frac{d}{\alpha} (K_a - k), \quad (6-18)$$

где  $K_a$  — входящий в формулу (6-2) коэффициент, значения которого даны в табл. 6-2;  $k$  — величина, учитывающая уменьшение индуктивности, обусловленное конечностью радиальной толщины  $r$  обмотки; значения  $k$  даны в табл. 6-5 и 6-6 в зависимости от значений  $\rho = r/d$  и  $\gamma = \rho/\alpha = r/a$ ;

б) по формуле

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} \omega^2 d \Psi F, \quad (6-19)$$

где  $\Psi$  — коэффициент, входящий в формулу (6-9) для индуктивности плоской катушки (§ 6-3);  $F$  — коэффициент, учитывающий уменьшение индуктивности, обусловленное конечностью аксиального размера (длины  $a$ ) катушки. Значения коэффициента  $F$  даны в табл. 6-7, 6-8 в зависимости от значений  $\rho = r/d$  и  $\gamma = \rho/\alpha = r/a$ .

Расчет по формулам (6-18) и (6-19) требует примерно одинаковой затраты времени. Каждая из этих формул может служить для проверки расчета, выполненного по другой формуле.

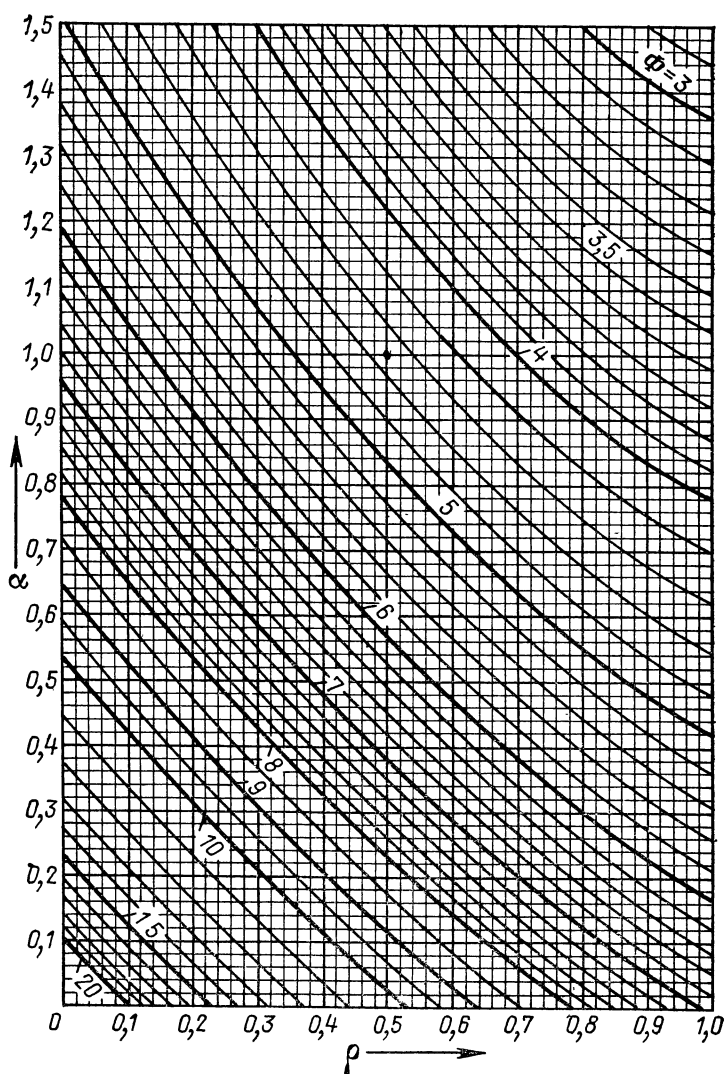


Рис. 6-5

**3. Аналитический расчет.** В тех случаях, когда расчет по кривым и таблицам не обеспечивает достаточной степени точности или когда необходимо иметь индуктивность в виде явной аналитической зависимости от геометрических размеров катушки, можно пользоваться следующими формулами.

1) Для длинной катушки ( $\alpha = a/d > 3/4$ )

$$L = L_0 - \Delta, \quad (6-20)$$

где  $L_0$  — индуктивность соленоида длиной, равной длине  $a$  катушки, и диаметром, равным среднему диаметру  $d$  катушки;  $\Delta$  — поправка, учитывающая уменьшение индуктивности, обусловленное конечностью радиальной толщины обмотки.

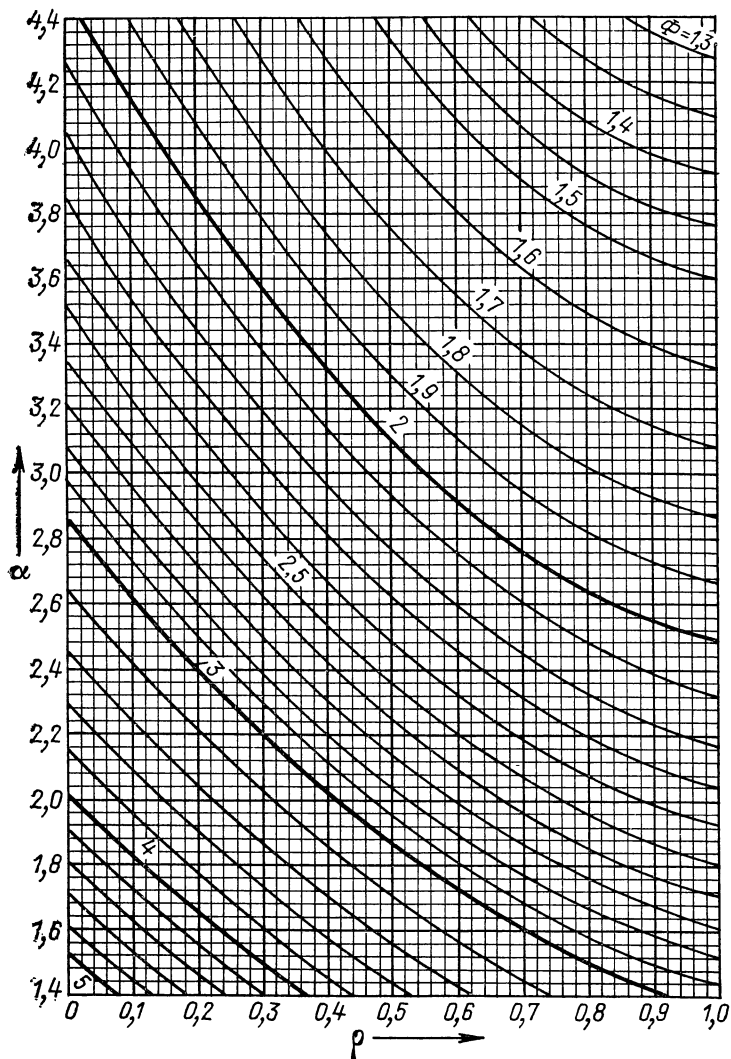


Рис. 6-6



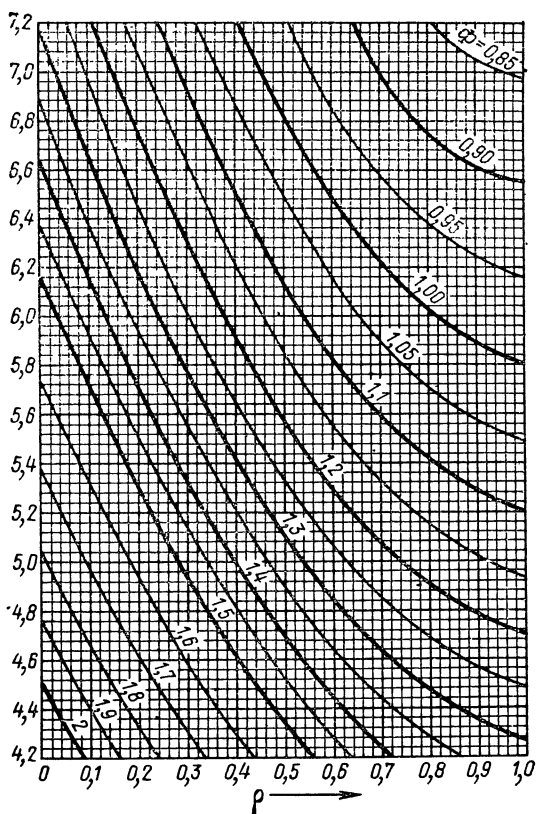


Рис. 6-7

Величина  $L_0$  может быть определена так, как указано в § 6-2, в частности по формуле (6-2).

Для определения  $\Delta$  может служить формула

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{\pi}{8} \mu_0 \omega^2 \frac{d}{\alpha^2} \left\{ \frac{4}{3} \alpha \rho - \frac{2}{3} \alpha \rho^2 - \rho^3 \left[ \frac{2}{3\pi} \left( \ln \frac{4}{\rho} - \frac{23}{12} \right) + \frac{\beta}{3} - \frac{5}{12} \beta^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{3} \beta^5 - \frac{95}{64} \beta^7 + \frac{217}{64} \beta^9 - \frac{2135}{256} \beta^{11} + \frac{21571}{1024} \beta^{13} \dots \right] + \right. \\ & + \rho^4 \left[ \frac{1}{30\pi} \left( \ln \frac{4}{\rho} - \frac{1}{20} \right) - \frac{\beta}{18} + \frac{17}{90} \beta^3 - \frac{53}{48} \beta^5 + \frac{1265}{288} \beta^7 - \frac{38857}{2304} \beta^9 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{3513}{64} \beta^{11} + \frac{2206281}{10240} \beta^{13} \dots \right] + \rho^6 \left[ \frac{1}{336\pi} \left( \frac{23}{20} \ln \frac{4}{\rho} - \frac{4547}{5600} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta^3}{60} - \frac{15}{56} \beta^5 + \frac{1117}{336} \beta^7 - \frac{1183}{48} \beta^9 + \frac{76461}{512} \beta^{11} - \frac{4043831}{5120} \beta^{13} \dots \right] \right\}, \quad (6-21) \end{aligned}$$

Таблица 6-5. Значения  $k$  в формуле (6-18) для катушки прямоугольного сечения при  $r \leq a$

$\gamma = \frac{r}{a}$	$\rho = r/d$										$\gamma = \frac{r}{a}$	
	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45		0,50
0,00	0	0,0325	0,0633	0,0925	0,1200	0,1458	0,1700	0,1925	0,2133	0,2325	0,2500	0,00
05	0	0316	0621	0911	1186	1445	1687	1913	2123	2317	2494	05
10	0	0305	0608	0896	1170	1428	1671	1898	2109	2304	2484	10
15	0	0300	0594	0879	1151	1409	1651	1879	2091	2288	2470	15
0,20	0	0,0293	0,0581	0,0861	0,1131	0,1388	0,1630	0,1858	0,2071	0,2270	0,2453	0,20
0,25	0	0,0286	0,0569	0,0843	0,1109	0,1365	0,1607	0,1835	0,2048	0,2248	0,2432	0,25
30	0	0280	0557	0826	1085	1342	1583	1810	2024	2224	2410	30
35	0	0274	0546	0810	1069	1319	1558	1785	1999	2199	2386	35
40	0	0269	0535	0796	1051	1297	1533	1759	1973	2174	2361	40
0,45	0	0,0264	0,0525	0,0782	0,1033	0,1276	0,1510	0,1732	0,1945	0,2146	0,2335	0,45
0,50	0	0,0259	0,0516	0,0769	0,1016	0,1256	0,1487	0,1706	0,1916	0,2118	0,2308	0,50
55	0	0254	0507	0755	0999	1236	1464	1682	1890	2091	2280	55
60	0	0250	0498	0742	0982	1216	1442	1658	1866	2065	2252	60
65	0	0246	0490	0730	0966	1197	1421	1635	1842	2039	2225	65
0,70	0	0,0242	0,0482	0,0719	0,0952	0,1179	0,1400	0,1613	0,1818	0,2014	0,2199	0,70
0,75	0	0,0238	0,0474	0,0708	0,0937	0,1161	0,1380	0,1591	0,1794	0,1988	0,2173	0,75
80	0	0234	0467	0697	0923	1144	1360	1569	1770	1963	2147	80
85	0	0230	0460	0687	0910	1128	1341	1548	1747	1939	2121	85
90	0	0227	0453	0677	0897	1113	1323	1527	1725	1915	2096	90
0,95	0	0,0224	0,0447	0,0667	0,0884	0,1097	0,1305	0,1507	0,1704	0,1892	0,2071	0,95
1,00	0	0,0221	0,0441	0,0658	0,0872	0,1082	0,1288	0,1489	0,1683	0,1869	0,2047	1,00

$\gamma = \frac{r}{a}$	$\rho = r/d$										$\gamma = \frac{r}{a}$
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,00	0,2500	0,2658	0,2800	0,2925	0,3033	0,3125	0,3200	0,3258	0,3300	0,3325	0,3333
0,05	0,2494	0,2655	0,2800	0,2928	0,3040	0,3135	0,3213	0,3275	0,3321	0,3351	0,3363
0,10	0,2484	0,2648	0,2795	0,2926	0,3040	0,3138	0,3221	0,3287	0,3337	0,3371	0,3388
0,15	0,2470	0,2636	0,2786	0,2920	0,3037	0,3139	0,3225	0,3294	0,3349	0,3386	0,3408
0,20	0,2453	0,2621	0,2773	0,2910	0,3031	0,3136	0,3225	0,3296	0,3356	0,3397	0,3423
0,25	0,2432	0,2603	0,2758	0,2897	0,3021	0,3129	0,3221	0,3298	0,3359	0,3404	0,3434
0,30	0,2410	0,2582	0,2739	0,2881	0,3007	0,3118	0,3213	0,3294	0,3359	0,3408	0,3441
0,35	0,2386	0,2559	0,2718	0,2862	0,2991	0,3104	0,3202	0,3286	0,3355	0,3407	0,3445
0,40	0,2361	0,2535	0,2695	0,2841	0,2972	0,3088	0,3189	0,3276	0,3347	0,3403	0,3445
0,45	0,2335	0,2509	0,2671	0,2818	0,2951	0,3070	0,3173	0,3263	0,3337	0,3397	0,3442
0,50	0,2308	0,2483	0,2645	0,2794	0,2929	0,3050	0,3156	0,3248	0,3326	0,3389	0,3436
0,55	0,2280	0,2456	0,2619	0,2769	0,2906	0,3028	0,3137	0,3231	0,3311	0,3377	0,3428
0,60	0,2252	0,2428	0,2592	0,2743	0,2881	0,3005	0,3116	0,3213	0,3295	0,3363	0,3417
0,65	0,2225	0,2400	0,2564	0,2716	0,2856	0,2981	0,3093	0,3192	0,3277	0,3348	0,3404
0,70	0,2199	0,2373	0,2536	0,2689	0,2830	0,2957	0,3070	0,3171	0,3258	0,3331	0,3390
0,75	0,2173	0,2346	0,2509	0,2662	0,2804	0,2932	0,3046	0,3149	0,3238	0,3313	0,3375
0,80	0,2147	0,2320	0,2483	0,2636	0,2777	0,2906	0,3022	0,3126	0,3217	0,3294	0,3358
0,85	0,2121	0,2294	0,2456	0,2609	0,2750	0,2880	0,2998	0,3103	0,3195	0,3274	0,3340
0,90	0,2096	0,2268	0,2430	0,2582	0,2724	0,2855	0,2973	0,3079	0,3172	0,3253	0,3321
0,95	0,2071	0,2242	0,2404	0,2556	0,2698	0,2829	0,2949	0,3055	0,3149	0,3231	0,3301
1,00	0,2047	0,2217	0,2378	0,2530	0,2672	0,2804	0,2924	0,3031	0,3126	0,3209	0,3281

Таблица 6-6. Значения  $k$  в формуле (6-18) для катушки прямоугольного сечения при  $a \leq r$

$\frac{1}{\gamma} = \frac{a}{r}$	$\rho = r/d$											$\frac{1}{\gamma} = \frac{a}{r}$
	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
0,05	0	0,0045	0,0090	0,0134	0,0178	0,0226	0,0269	0,0314	0,0359	0,0398	0,0436	0,05
10	0	0,0077	0,0153	0,0229	0,0304	0,0379	0,0453	0,0527	0,0601	0,0674	0,0745	10
15	0	0,0098	0,0194	0,0291	0,0387	0,0482	0,0576	0,0669	0,0763	0,0855	0,0944	15
0,20	0	0,0114	0,0228	0,0341	0,0454	0,0566	0,0677	0,0786	0,0894	0,1000	0,1105	0,20
0,25	0	0,0128	0,0256	0,0383	0,0510	0,0635	0,0759	0,0881	0,1001	0,1120	0,1237	0,25
30	0	0,0140	0,0280	0,0419	0,0557	0,0694	0,0829	0,0962	0,1093	0,1221	0,1347	30
35	0	0,0151	0,0301	0,0451	0,0598	0,0745	0,0889	0,1031	0,1172	0,1309	0,1443	35
40	0	0,0160	0,0319	0,0478	0,0634	0,0789	0,0942	0,1092	0,1240	0,1385	0,1526	40
0,45	0	0,0168	0,0335	0,0501	0,0666	0,0828	0,0988	0,1146	0,1300	0,1452	0,1599	0,45
0,50	0	0,0175	0,0349	0,0522	0,0694	0,0863	0,1030	0,1194	0,1354	0,1511	0,1663	0,50
55	0	0,0182	0,0362	0,0541	0,0720	0,0895	0,1068	0,1237	0,1403	0,1563	0,1720	55
60	0	0,0188	0,0374	0,0559	0,0743	0,0924	0,1102	0,1276	0,1446	0,1611	0,1772	60
65	0	0,0193	0,0385	0,0576	0,0764	0,0950	0,1132	0,1311	0,1485	0,1655	0,1819	65
0,70	0	0,0198	0,0395	0,0591	0,0784	0,0974	0,1160	0,1343	0,1521	0,1694	0,1861	0,70
0,75	0	0,0203	0,0404	0,0605	0,0802	0,0996	0,1186	0,1373	0,1554	0,1729	0,1899	0,75
80	0	0,0207	0,0413	0,0617	0,0818	0,1016	0,1210	0,1400	0,1584	0,1762	0,1934	80
85	0	0,0211	0,0421	0,0629	0,0833	0,1035	0,1232	0,1424	0,1611	0,1792	0,1966	85
90	0	0,0215	0,0428	0,0639	0,0847	0,1052	0,1252	0,1447	0,1637	0,1820	0,1995	90
0,95	0	0,0218	0,0435	0,0649	0,0860	0,1068	0,1271	0,1469	0,1661	0,1846	0,2022	0,95
1,00	0	0,0221	0,0441	0,0658	0,0872	0,1082	0,1288	0,1489	0,1683	0,1869	0,2047	1,00

$\frac{1}{\gamma} = \frac{a}{r}$	$\rho = r/d$											$\frac{1}{\gamma} = \frac{a}{r}$
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
0,05	0,0436	0,0484	0,0529	0,0572	0,0613	0,0653	0,0692	0,0730	0,0767	0,0803	0,0839	0,05
10	0,745	0,816	0,885	0,953	1,020	1,085	1,149	1,211	1,272	1,331	1,388	10
15	0,944	1,023	1,120	1,204	1,287	1,368	1,447	1,523	1,597	1,668	1,736	15
0,20	0,1105	0,1208	0,1308	0,1406	0,1501	0,1594	0,1684	0,1771	0,1854	0,1933	0,2009	0,20
0,25	0,1237	0,1350	0,1460	0,1568	0,1673	0,1775	0,1874	0,1968	0,2058	0,2142	0,2224	0,25
30	1,347	1,471	1,590	1,706	1,819	1,928	2,032	2,132	2,226	2,315	2,399	30
35	1,443	1,574	1,701	1,823	1,942	2,057	2,166	2,269	2,366	2,458	2,544	35
40	1,526	1,663	1,796	1,924	2,048	2,167	2,279	2,384	2,484	2,577	2,664	40
0,45	0,1599	0,1742	0,1880	0,2012	0,2140	0,2262	0,2377	0,2484	0,2585	0,2679	0,2766	0,45
0,50	0,1663	0,1811	0,1953	0,2089	0,2220	0,2345	0,2462	0,2571	0,2672	0,2766	0,2852	0,50
55	1,720	1,872	2,018	2,157	2,291	2,418	2,536	2,645	2,748	2,842	2,926	55
60	1,772	1,927	2,076	2,218	2,354	2,482	2,601	2,712	2,814	2,907	2,990	60
65	1,819	1,977	2,128	2,272	2,409	2,539	2,659	2,770	2,872	2,964	3,046	65
0,70	0,1861	0,2022	0,2175	0,2321	0,2459	0,2589	0,2710	0,2821	0,2923	0,3014	0,3095	0,70
0,75	0,1899	0,2062	0,2217	0,2365	0,2504	0,2634	0,2755	0,2866	0,2968	0,3058	0,3137	0,75
80	1,934	2,098	2,255	2,404	2,544	2,665	2,796	2,907	3,007	3,096	3,174	80
85	1,966	2,132	2,291	2,440	2,581	2,712	2,833	2,943	3,042	3,130	3,206	85
90	1,995	2,163	2,323	2,473	2,614	2,745	2,866	2,976	3,074	3,160	3,234	90
0,95	0,2022	0,2191	0,2352	0,2503	0,2644	0,2776	0,2896	0,3005	0,3102	0,3186	0,3259	0,95
1,00	0,2047	0,2217	0,2378	0,2530	0,2672	0,2804	0,2924	0,3031	0,3126	0,3209	0,3281	1,00

Таблица 6-7. Значения  $F$  в формуле (6-19) для катушки прямоугольного сечения при  $a \leq r$

$\frac{1}{\gamma} - \frac{a}{r}$	$\rho = r/d$											$\frac{1}{\gamma} = \frac{a}{r}$
	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
0,00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,00
0,05	1	0,9871	0,9843	0,9821	0,9801	0,9782	0,9763	0,9745	0,9728	0,9712	0,9696	0,05
10	1	9749	9695	9651	9612	9575	9541	9507	9474	9442	9412	10
15	1	9634	9555	9491	9434	9381	9332	9283	9237	9189	9145	15
0,20	1	0,9524	0,9422	0,9339	0,9266	0,9197	0,9133	0,9070	0,9010	0,8951	0,8894	0,20
0,25	1	0,9419	0,9294	0,9194	0,9105	0,9021	0,8943	0,8868	0,8795	0,8725	0,8656	0,25
30	1	9318	9172	9059	8950	8853	8762	8675	8591	8510	8431	30
35	1	9221	9054	8920	8802	8692	8589	8491	8396	8305	8217	35
40	1	9128	8941	8792	8660	8537	8423	8314	8210	8110	8013	40
0,45	1	0,9038	0,8832	0,8668	0,8523	0,8389	0,8264	0,8145	0,8032	0,7923	0,7819	0,45
0,50	1	0,8951	0,8727	0,8548	0,8391	0,8246	0,8111	0,7983	0,7861	0,7744	0,7632	0,50
55	1	8867	8625	8434	8264	8108	7964	7827	7697	7573	7454	55
60	1	8786	8527	8322	8141	7975	7822	7677	7540	7409	7284	60
65	1	8707	8432	8214	8022	7847	7686	7533	7389	7251	7121	65
0,70	1	0,8630	0,8339	0,8109	0,7907	0,7723	0,7554	0,7394	0,7243	0,7100	0,6965	0,70
0,75	1	0,8556	0,8249	0,8007	0,7796	0,7603	0,7426	0,7260	0,7103	0,6955	0,6816	0,75
80	1	8484	8162	7908	7688	7487	7303	7130	6968	6816	6672	80
85	1	8413	8077	7813	7584	7374	7184	7005	6838	6681	6533	85
90	1	8345	7995	7720	7482	7265	7068	6884	6712	6551	6399	90
0,95	1	0,8279	0,7914	0,7629	0,7383	0,7159	0,6956	0,6767	0,6591	0,6426	0,6271	0,95
1,00	1	0,8214	0,7837	0,7541	0,7287	0,7056	0,6848	0,6656	0,6474	0,6306	0,6148	1,00

$\frac{1}{\gamma} = \frac{a}{r}$	$\rho = r/d$										$\frac{1}{\gamma} = \frac{a}{r}$	
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95		1,00
0,00	1											0,00
0,05	0,9696	0,9679	0,9663	0,9648	0,9633	0,9618	0,9604	0,9591	0,9577	0,9562	0,9547	0,05
10	9412	9381	9351	9322	9293	9265	9238	9212	9187	9161	9136	10
15	9145	9102	9059	9017	8977	8938	8900	8863	8829	8794	8763	15
0,20	0,8894	0,8839	0,8785	0,8732	0,8683	0,8634	0,8586	0,8540	0,8497	0,8457	0,8421	0,20
0,25	0,8656	0,8590	0,8526	0,8463	0,8405	0,8347	0,8292	0,8239	0,8190	0,8144	0,8103	0,25
30	8431	8355	8282	8210	8143	8078	8017	7959	7905	7854	7807	30
35	8217	8132	8051	7971	7897	7825	7759	7697	7638	7583	7532	35
40	8013	7920	7831	7745	7664	7587	7515	7450	7388	7329	7274	40
0,45	0,7819	0,7718	0,7622	0,7531	0,7443	0,7360	0,7285	0,7217	0,7152	0,7090	0,7032	0,45
0,50	0,7632	0,7526	0,7424	0,7327	0,7234	0,7146	0,7068	0,6996	0,6929	0,6865	0,6805	0,50
55	7454	7342	7235	7132	7036	6945	6862	6787	6717	6651	6590	55
60	7284	7166	7054	6947	6847	6754	6668	6589	6516	6448	6386	60
65	7121	6998	6882	6771	6668	6572	6484	6402	6326	6256	6194	65
0,70	0,6965	0,6837	0,6717	0,6603	0,6497	0,6399	0,6308	0,6224	0,6146	0,6075	0,6012	0,70
0,75	0,6816	0,6683	0,6560	0,6443	0,6334	0,6234	0,6140	0,6055	0,5976	0,5904	0,5839	0,75
80	6672	6536	6409	6290	6179	6076	5981	5894	5815	5742	5676	80
85	6533	6394	6264	6143	6030	5926	5829	5742	5662	5589	5521	85
90	6399	6257	6124	6002	5888	5782	5684	5597	5517	5443	5375	90
0,95	0,6271	0,6126	0,5991	0,5867	0,5752	0,5644	0,5545	0,5459	0,5378	0,5303	0,5236	0,95
1,00	0,6148	0,6001	0,5865	0,5738	0,5621	0,5512	0,5413	0,5324	0,5244	0,5170	0,5102	1,00

Таблица 6-8. Значения  $F$  в формуле (6-19) для катушки прямоугольного сечения при  $r \leq a$

$\gamma = \frac{r}{a}$	$\rho = r/d$										$\gamma = \frac{r}{a}$	
	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45		0,50
0,00		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
0,05		—	—	—	0,1224	0,1064	0,0948	0,0856	0,0784	0,0725	0,0679	0,05
0,10	0,4002	0,3088	0,3088	0,2560	0,2197	0,1942	0,1747	0,1595	0,1472	0,1370	0,1287	0,10
0,15	0,4845	0,3942	0,3942	0,3388	0,2977	0,2669	0,2426	0,2232	0,2074	0,1944	0,1831	0,15
0,20	0,5439	0,4600	0,4600	0,4038	0,3608	0,3276	0,3007	0,2787	0,2604	0,2451	0,2317	0,20
0,25	0,5885	0,5103	0,5103	0,4560	0,4131	0,3789	0,3506	0,3272	0,3073	0,2901	0,2754	0,25
0,30	0,6247	0,5514	0,5514	0,4993	0,4571	0,4227	0,3940	0,3695	0,3487	0,3305	0,3147	0,30
0,35	0,6540	0,5853	0,5853	0,5354	0,4946	0,4609	0,4320	0,4071	0,3856	0,3667	0,3503	0,35
0,40	0,6786	0,6140	0,6140	0,5663	0,5269	0,4939	0,4654	0,4407	0,4188	0,3995	0,3825	0,40
0,45	0,6996	0,6386	0,6386	0,5932	0,5551	0,5231	0,4951	0,4707	0,4488	0,4292	0,4118	0,45
0,50	—	0,7178	0,6600	0,6167	0,5801	0,5487	0,5215	0,4976	0,4759	0,4562	0,4385	0,50
0,55		0,7337	0,6789	0,6375	0,6023	0,5718	0,5453	0,5218	0,5003	0,4807	0,4631	0,55
0,60		0,7478	0,6957	0,6561	0,6222	0,5929	0,5668	0,5436	0,5224	0,5031	0,4856	0,60
0,65		0,7604	0,7107	0,6728	0,6401	0,6119	0,5863	0,5636	0,5426	0,5235	0,5063	0,65
0,70		0,7717	0,7242	0,6877	0,6563	0,6289	0,6041	0,5818	0,5612	0,5426	0,5253	0,70
0,75		0,7819	0,7364	0,7013	0,6710	0,6442	0,6204	0,5985	0,5785	0,5601	0,5430	0,75
0,80		0,7912	0,7475	0,7138	0,6845	0,6585	0,6353	0,6140	0,5944	0,5762	0,5594	0,80
0,85		0,7997	0,7577	0,7253	0,6969	0,6717	0,6491	0,6282	0,6091	0,5912	0,5747	0,85
0,90		0,8075	0,7671	0,7358	0,7083	0,6839	0,6619	0,6415	0,6227	0,6052	0,5890	0,90
0,95		0,8147	0,7757	0,7454	0,7189	0,6952	0,6738	0,6540	0,6354	0,6183	0,6023	0,95
1,00		0,8214	0,7837	0,7541	0,7287	0,7056	0,6848	0,6656	0,6474	0,6306	0,6148	1,00



$\gamma = \frac{r}{a}$	$\rho = r/d$											$\gamma = \frac{r}{a}$
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
0,05	0,0679	0,0640	0,0606	0,0578	0,0554	0,0532	0,0512	0,0494	0,0480	0,0467	0,0455	0,05
10	1287	1215	1155	1102	1056	1015	0980	0950	0924	0900	0878	10
15	1831	1734	1652	1581	1517	1461	1412	1372	1335	1301	1271	15
0,20	0,2317	0,2202	0,2103	0,2017	0,1940	0,1872	0,1813	0,1761	0,1715	0,1673	0,1636	0,20
0,25	0,2754	0,2625	0,2513	0,2415	0,2327	0,2250	0,2186	0,2121	0,2067	0,2019	0,1976	0,25
30	3147	3008	2886	2778	2682	2597	2521	2454	2394	2340	2293	30
35	3503	3356	3226	3111	3009	2917	2835	2763	2698	2639	2588	35
40	3825	3673	3537	3417	3309	3212	3126	3049	2980	2918	2862	40
0,45	0,4118	0,3963	0,3823	0,3698	0,3587	0,3486	0,3396	0,3315	0,3243	0,3177	0,3119	0,45
0,50	0,4385	0,4228	0,4086	0,3958	0,3843	0,3740	0,3647	0,3563	0,3488	0,3420	0,3360	0,50
55	4631	4472	4328	4198	4081	3976	3881	3795	3717	3648	3586	55
60	4856	4697	4552	4421	4302	4195	4098	4011	3932	3861	3797	60
65	5063	4905	4760	4628	4507	4399	4301	4213	4133	4060	3995	65
0,70	0,5253	0,5097	0,4953	0,4820	0,4699	0,4590	0,4491	0,4402	0,4321	0,4248	0,4182	0,70
0,75	0,5430	0,5274	0,5132	0,4999	0,4879	0,4769	0,4670	0,4580	0,4499	0,4425	0,4358	0,75
80	5594	5440	5298	5166	5046	4937	4838	4747	4665	4591	4524	80
85	5747	5595	5454	5323	5203	5094	4995	4904	4823	4748	4680	85
90	5890	5740	5600	5470	5351	5242	5143	5053	4971	4896	4829	90
0,95	0,6023	0,5875	0,5736	0,5608	0,5490	0,5381	0,5282	0,5193	0,5111	0,5037	0,4969	0,95
1,00	0,6148	0,6001	0,5865	0,5738	0,5621	0,5512	0,5413	0,5324	0,5244	0,5170	0,5102	1,00

где

$$\beta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}}.$$

Для длинных катушек со значительной толщиной обмотки, т. е. при  $\rho = r/d$ , близком к единице, лучше пользоваться формулой

$$L = \frac{\mu_0 \omega^2}{2a r^2} \left[ \frac{q^4}{3} - \frac{4}{3} q p^3 + p^4 - \frac{1}{a} \left( 0,2441272 q^5 - \frac{2}{3} q^2 p^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,4277559 p^5 + \frac{p^5}{10} \ln \frac{q}{p} \right) + \frac{p^5}{a} \left( 0,004464 \frac{p^2}{q^2} + 0,000543 \frac{p^4}{q^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,000129 \frac{p^6}{q^6} + \dots \right) + \frac{1}{9a^2} (q^3 - p^3)^2 - \frac{1}{30a^4} (q^3 - p^3) (q^5 - p^5) + \right. \\ \left. + \frac{1}{84a^6} (q^3 - p^3) (q^7 - p^7) + \frac{3}{200a^6} (q^5 - p^5)^2 \dots \right], \quad (6-22)$$

где  $p = \frac{d-r}{2} = \frac{d}{2} (1 - \rho)$  — внутренний радиус катушки;

$q = \frac{d+r}{2} = \frac{d}{2} (1 + \rho)$  — внешний ее радиус.

2) Для короткой катушки ( $\alpha = a/d < 3/4$ ) применима формула (6-20), причем значение  $L_0$  может быть определено, как указано в § 6-2, в частности по формуле (6-2), а для определения  $\Delta$  при  $r < a$  может служить формула

$$\Delta = \frac{\mu_0}{2} \omega^2 d \left[ \frac{\pi}{3} \gamma - \frac{25}{72} \gamma^2 - \frac{\rho^2}{8} + \frac{19}{768} \alpha^2 \rho^2 - \frac{\gamma^4}{180} + \frac{67}{7200} \gamma^2 \rho^2 - \right. \\ \left. - \frac{17}{3840} \rho^4 \dots - \left( \frac{\rho^2}{24} + \frac{7}{384} \alpha^2 \rho^2 + \frac{11}{2880} \rho^4 \dots \right) \ln \frac{4}{\alpha} - \right. \\ \left. - \left( \frac{\gamma^2}{6} - \frac{\rho^2 \gamma^2}{120} \dots \right) \ln \frac{1}{\gamma} \dots \right], \quad (6-23)$$

где  $\gamma = r/a = \rho/\alpha < 1$ .

3) Для весьма короткой катушки ( $\alpha = a/d \ll 1$ ) применима формула (6-20), в которой под  $L_0$  следует понимать индуктивность плоской (дисковой) катушки с таким же средним диаметром  $d$  и такой же радиальной толщиной  $r$ , как и у рассматриваемой короткой катушки, а под  $\Delta$  — поправку, учитывающую уменьшение индуктивности, обусловленное конечностью аксиальной толщины (длины  $a$ ) катушки.

Величина  $L_0$  может быть найдена так, как указано в 6-3. Для определения поправки  $\Delta$  при  $r > a$  может служить формула

$$\Delta = \frac{\mu_0}{2} \omega^2 d \left[ \frac{\pi}{3} \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{5} + \frac{\alpha^2 \rho^2}{15} - \frac{2}{35} \alpha^4 \dots \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^4}{64} + \frac{7}{384} \alpha^2 \rho^2 \right) \ln \frac{4}{\rho} - \frac{1}{6\gamma^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2 \rho^2}{4} \right) \ln \gamma - \frac{\alpha^2}{8} - \right. \\ \left. - \frac{25}{72} \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2 \rho^2}{2304} - \frac{1}{180} \frac{1}{\gamma^4} - \frac{23}{288} \frac{\alpha^2}{\gamma^2} - \frac{31}{2304} \alpha^4 \dots \right], \quad (6-24)$$

где  $\gamma = r/a = \rho/\alpha > 1$ .

**Пример 6-6.** Катушка прямоугольного сечения со средним диаметром  $d = 6,82$  см имеет  $w = 220$  витков, причем отношение толщины к диаметру  $\rho = r/d = 0,209$ , а отношение длины к толщине  $a/r = \alpha/\rho = 4/9$ . Определить индуктивность катушки.

**Решение.**

1. Применяем формулу (6-17). В данном случае  $\rho = 0,209$  и  $\alpha = 4/9 \rho = 0,09289$ . По кривым рис. 6-5 находим  $\Phi = 13,2$ , и, следовательно,

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot 220^2 \cdot 6,82 \cdot 10^{-2} \cdot 13,2 = 4,36 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

2. Для более точного определения  $L$  применяем формулу (6-18). При  $\alpha = 0,09289$  из табл. 6-2 находим  $K_a = 0,1932$ .

При заданных значениях  $\alpha$  и  $\rho$  ( $1/\gamma = 0,4444$ ) из табл. 6-6 получаем  $k = 0,0692$ . Таким образом, искомая индуктивность

$$L = \frac{\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{4} \cdot 220^2 \frac{6,82 \cdot 10^{-2}}{0,09289} (0,1932 - 0,0692) = 4,349 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

3. Вместо формулы (6-18) можно применить формулу (6-19). При  $\rho = 0,209$  по табл. 6-3 находим  $\Psi = 30,96$ . По табл. 6-7 при заданных  $\rho$  и  $\alpha$  ( $1/\gamma = 0,4444$ ) определяем  $F = 0,8514$ .

Таким образом,

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8\pi} \cdot 220^2 \cdot 6,82 \cdot 10^{-2} \cdot 30,96 \cdot 0,8514 = 4,350 \cdot 10^{-3} \text{ Гн,}$$

что совпадает с ответом по формуле (6-18).

4. Применяем формулу (6-20), причем индуктивность соответствующей плоской катушки определяем по формуле (6-9).

При  $\rho = 0,209$  по табл. 6-3 находим  $\Psi = 30,96$ , и, следовательно,

$$L_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8\pi} \cdot 220^2 \cdot 6,82 \cdot 10^{-2} \cdot 30,96 = 5,111 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Поправку  $\Delta$ , учитывающую конечность длины катушки, определяем по формуле (6-24). В данном случае

$$\alpha = 0,09289; \quad \alpha^2/5 = 1,932 \cdot 10^{-3}; \quad \alpha^2/8 = 1,208 \cdot 10^{-3};$$

$$\gamma = \frac{9}{4} = 2,25; \quad \ln \gamma = 0,8109; \quad \frac{1}{6\gamma^2} \ln \gamma = 0,02670;$$

$$\frac{25}{72} \frac{1}{\gamma^2} = 0,06859; \quad \frac{\pi}{3} \frac{1}{\gamma} = 0,4657; \quad \frac{4}{\rho} = 19,14; \quad \ln \frac{4}{\rho} = 2,952;$$

$$\Delta = \frac{4\pi}{2} \cdot 10^{-7} \cdot 220^2 \cdot 6,82 \cdot 10^{-2} (0,4663 - 0,0036 - 0,0267 - 0,0012 - 0,0686) = 0,7597 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Искомая индуктивность

$$L = (5,111 - 0,7597) \cdot 10^{-3} = 4,351 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Этот ответ практически совпадает с найденными по другим формулам.

**Пример 6-7.** Катушка прямоугольного сечения со средним диаметром  $d = 10$  см имеет  $w = 500$  витков. Длина катушки  $a = 20$  см, радиальный размер поперечного сечения обмотки  $r = 2$  см. Определить индуктивность катушки.

**Решение.** В данном случае

$$\alpha = 20/10 = 2; \quad 1/\alpha = 0,5; \quad \rho = 2/10 = 0,2; \quad \gamma = 0,2/2 = 0,1.$$

1. Применяя формулу (6-17), по кривым рис. 6-5 находим  $\Phi = 3,46$ , и

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot 25 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 3,46 = 8,65 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

2. Для более точного определения индуктивности применяем формулу (6-18). При  $1/\alpha = 0,5$  по табл. 6-2 находим  $K_a = 0,8181$ . По табл. 6-5 при заданных  $\alpha$  и  $\rho$  ( $\gamma = 0,1$ ) находим  $k = 0,1170$ . Следовательно,

$$L = \frac{\pi \cdot 4\pi}{4} \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,1}{2} (0,8181 - 0,1170) = 8,652 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

3. Вместо формулы (6-18) можно применить формулу (6-19). По табл. 6-3 и 6-8 при заданных  $\alpha$ ,  $\rho$  и  $\gamma$  находим  $\Psi = 31,50$ ,  $F = 0,2197$ , и, следовательно,

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8\pi} \cdot 25 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 31,50 \cdot 0,2197 = 8,651 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

4. Применяем формулу (6-20), причем индуктивность  $L_0$  соответствующего соленоида определяем по формуле (6-2).

В данном случае  $K_a = 0,8181$  и

$$L_0 = \pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot \frac{0,1}{2} \cdot 0,8181 = 10,095 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Поправку  $\Delta$ , учитывающую конечность толщины катушки, определяем по формуле (6-21). В данном случае  $\rho = 0,2$ ;

$$\rho^2 = 4 \cdot 10^{-2}; \quad \rho^4 = 1,6 \cdot 10^{-3}; \quad \beta = 1/\sqrt{17} = 0,2425;$$

$$\frac{4}{3} \alpha \rho - \frac{2}{3} \alpha \rho^2 = 0,4880; \quad \frac{2}{3\pi} \left( \ln \frac{4}{\rho} - \frac{23}{12} \right) = 0,2289;$$

$$\frac{\beta}{3} - \frac{5}{12} \beta^3 + \frac{2}{3} \beta^5 = 0,0759; \quad \frac{\pi}{8} \mu_0 \omega^2 \frac{d}{\alpha^2} = 3,084 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

$$\Delta = 3,084 \cdot 10^{-3} (0,4880 - 0,04 \cdot 0,3148) = 1,441 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

$$L = (10,095 - 1,441) \cdot 10^{-3} = 8,654 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Этот результат хорошо согласуется с двумя предыдущими.

## 6-6. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШКИ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

Индуктивность катушки кругового сечения

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 d \Phi, \quad (6-25)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  
 $d$  — ее средний диаметр (рис. 6-8);  
 $\Phi$  — величина, значения которой даны на рис. 6-9 в зависимости от отношения  $\gamma = r/d$ , где  $r$  — радиус поперечного сечения катушки.

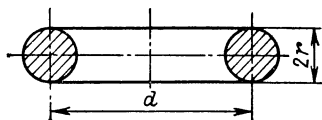


Рис. 6-8

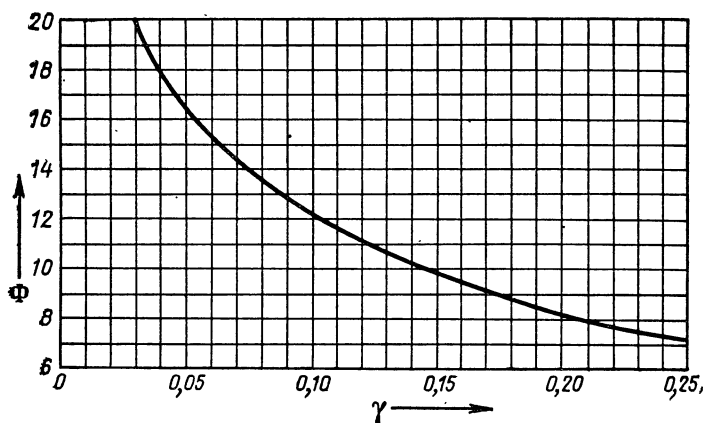


Рис. 6-9

Для более точного определения  $\Phi$  может служить формула

$$\Phi = 2\pi \left[ \left( 1 + \frac{\gamma^2}{2} \right) \ln \frac{4}{\gamma} - 1,75 + \frac{\gamma^2}{6} \right]. \quad (6-26)$$

При заданной индуктивности расход меди у катушки с круговым сечением (при оптимальном значении  $\gamma$ , равном 0,19) примерно такой же, как и у катушки прямоугольного сечения. С этой точки зрения катушка кругового сечения не имеет никаких преимуществ по сравнению с катушкой прямоугольного сечения.

## 6-7. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШКИ СЛОЖНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Если сечение катушки ограничено ломаной линией со взаимно перпендикулярными сторонами (как, например, на рис. 6-10, а), то всегда можно представить катушку в виде совокупности нескольких ( $n$ ) «простых» катушек, сечениями которых являются прямоугольники (1 и 2 на рис. 6-10, а). Тогда для определения индуктивности можно пользоваться формулой

$$L = \sum_{k=1}^n L_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ki}, \quad i \neq k, \quad (6-27)$$

где  $L_k$  — собственная индуктивность  $k$ -й частичной катушки;  $M_{ki}$  — взаимная индуктивность  $k$ -й и  $i$ -й катушек. (Например, для рис. 6-10, а  $L = L_1 + L_2 + 2M_{12}$ .) Индуктивности  $L_k$  определяются, как указано в § 6-5, а для определения взаимных индуктивностей  $M_{ki}$  могут быть использованы

ны методы, формулы и таблицы, данные в главе седьмой. В частности, с помощью метода, основанного на теореме о четырех прямоугольниках, можно свести определение  $M_{ki}$  к определению собственных индуктивностей нескольких катушек прямоугольного сечения (§ 7-12, п. 3).

**Пример 6-8.** Катушка с  $\omega = 600$  витков имеет сложное прямоугольное сечение (рис. 6-10, б), причем  $d=20$  см,  $a_1 = a_2 = 2$  см,  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 4$  см. Определить

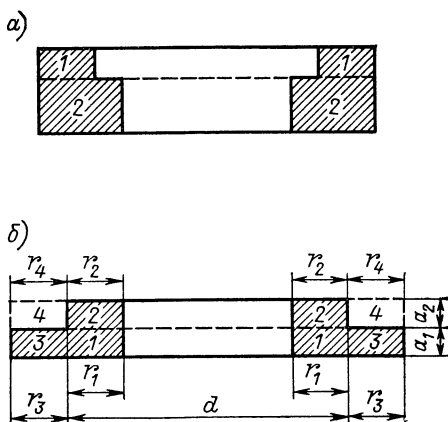


Рис. 6-10

индуктивность катушки.  
Решение. Для целей расчета представляем данную катушку состоящей из трех катушек 1, 2 и 3 по 200 витков в каждой и дополняем их четвертой, фиктивной, катушкой 4, имеющей также 200 витков. Тогда, применяя формулы § 1-10, можно выразить  $M_{12}$ ,  $M_{23}$  и  $M_{31}$  через собственные индуктивности катушек прямоугольного сечения:

$$\begin{aligned} 2M_{12} &= L_{12} - L_1 - L_2 = L_{12} - 2L_1; \quad 2M_{13} = L_{13} - L_1 - L_3; \\ 4M_{23} &= L_{1234} + L_1 + L_2 + L_3 + L_4 - L_{12} - L_{13} - L_{24} - L_{34} = \\ &= L_{1234} + 2L_1 + 2L_3 - L_{12} - 2L_{13} - L_{34}. \end{aligned}$$

Подставляя значения  $M_{12}$ ,  $M_{13}$  и  $M_{23}$  в (6-27), получаем

$$L = \frac{1}{2} L_{1234} + L_3 + \frac{1}{2} L_{12} - \frac{1}{2} L_{34}. \quad (6-28)$$

Каждый из членов этой суммы определяем по формуле (6-19), причем значения  $\Psi$  и  $F$  берем из табл. 6-3 и 6-7.

Например, для катушки 1234 имеем  $d = 20$  см,  $r = 8$  см,  $a = 4$  см,  $\rho = r/d = 0,4$ ,  $1/\gamma = a/r = 0,5$ . По табл. 6-3 и 6-7 находим  $\Psi = 23,15$  и  $F = 0,7861$ . Следовательно,

$$L_{1234} = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 800^2 \frac{0,2}{2} 23,15 \cdot 0,7861 = 0,1165 \text{ Гн} = 116,5 \text{ мГн}.$$

Аналогично определяем  $L_3$ ,  $L_{12}$  и  $L_{34}$ . Результаты расчета сводим в таблицу:

Катушка	$d$ , см	$r$ , см	$a$ , см	$\Psi$	$F$	$\omega$	$L$ , мГн
1234	20	8	4	23,15	0,7861	800	116,5
3	24	4	2	33,76	0,8496	200	13,76
12	16	4	4	28,77	0,7056	400	25,99
34	24	4	4	33,76	0,7456	400	48,33

Подставляя найденные значения в формулу (6-28), имеем

$$L = 58,25 + 13,76 + 13,00 - 24,17 = 60,84 \text{ мГн}.$$

## 6-8. ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

1. Если линейные размеры поперечного сечения катушки малы по сравнению с ее средним радиусом, то индуктивность катушки в первом приближении можно определить по формуле

$$L = \mu_0 \omega^2 R \left( \ln \frac{8R}{g} - 2 \right), \quad (6-29)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $R$  — ее средний радиус;  $g$  — среднее геометрическое расстояние площади поперечного сечения катушки от самой себя (§ 1-8).

2. Если линейные размеры поперечного сечения катушки соизмеримы с ее средним радиусом, то индуктивность катушки можно определить следующим путем.

Катушку подразделяют на несколько частей (катушек), имеющих одинаковые числа витков и относительно небольшие поперечные сечения. Тогда искомая индуктивность может быть найдена по формуле

$$L = \sum_{k=1}^n L_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ki}, \quad i \neq k, \quad (6-30)$$

где  $n$  — число катушек (частей), на которые подразделена рассматриваемая катушка;  $L_k$  — индуктивность  $k$ -й катушки;  $M_{ki}$  — взаимная индуктивность  $k$ -й и  $i$ -й катушек. Индуктивности  $L_k$  могут быть вычислены так, как указано в предыдущем пункте этого параграфа, а для определения  $M_{ki}$  можно в первом приближении пользоваться формулой

$$M_{ki} = (\omega/n)^2 M'_{ki}, \quad (6-31)$$

где  $\omega$  — общее число витков катушки;  $M'_{ki}$  — взаимная индуктивность центральных витков  $k$ -й и  $i$ -й катушек, определяемая по формулам, таблицам и кривым § 5-8 (в частности, для расчетов подобного рода удобно пользоваться кривыми рис. 5-10, для чего необходимо начертить поперечный разрез катушки на кальке в масштабе рис. 5-10.)

Точность расчета возрастает с возрастанием числа частей, на которые подразделена катушка. Наиболее точным расчет будет при  $n = \omega$ , т. е. тогда, когда каждая часть состоит из одного витка.

## 6-9. ПОПРАВКИ НА ИЗОЛЯЦИЮ

1. Поправка, учитывающая отличие собственной индуктивности действительных витков катушки от собственной индуктивности соответствующих расчетных витков, определяется формулой

$$\Delta_1 L = \mu_0 \omega \frac{d}{2} I = \mu_0 \omega \frac{d}{2} \ln \frac{g_p}{g}, \quad (6-32)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $d$  — ее средний диаметр;  $g$  — среднее геометрическое расстояния площади поперечного сечения действительного витка (провода) от самой себя;  $g_p$  — то же для расчетного витка (§ 1-14).

Величина  $I$  определяется в различных случаях так, как указано ниже.

1) Провод кругового сечения, намотанный с малым коэффициентом заполнения без изолирующих прокладок (рис. 6-11, а). Величина

$$I = \ln \frac{2\delta}{\delta_i} - 0,5551 = \ln \frac{\delta}{\delta_i} + 0,1381, \quad (6-33)$$

где  $\delta_i$  — диаметр голого провода;  $\delta$  — диаметр провода с изоляцией.

2) То же, но при большом коэффициенте заполнения (рис. 6-11, б). Величина

$$I = \ln \frac{1,866\delta}{\delta_i} - 0,5551 = \ln \frac{\delta}{\delta_i} + 0,0687. \quad (6-34)$$

3) Провод кругового сечения, намотанный с шагом  $p$  в аксиальном направлении и с шагом  $q$  в радиальном направлении (рис. 6-11, в). Величина

$$I = \ln \frac{p+q}{\delta_i} - 0,5569 + \varepsilon(p, q), \quad (6-35)$$

где  $\delta_i$  — диаметр голого провода;  $\varepsilon(p, q)$  — величина, определяемая по табл. 10-3 при аргументе, равном  $p/q$  (или  $q/p$ ).

4) Провод прямоугольного сечения, намотанный с шагом  $p$  в аксиальном направлении и с шагом  $q$  в радиальном направлении (рис. 6-11, г).

Величина

$$I = \ln \frac{p+q}{b+c} + \varepsilon(p, q) - \varepsilon(b, c), \quad (6-36)$$

где  $\varepsilon(p, q)$  и  $\varepsilon(b, c)$  — величины, определяемые по табл. 10-3 при аргументе, равном соответственно  $p/q$  (или  $q/p$ ) и  $b/c$  (или  $c/b$ ) (см. пример 6-11).



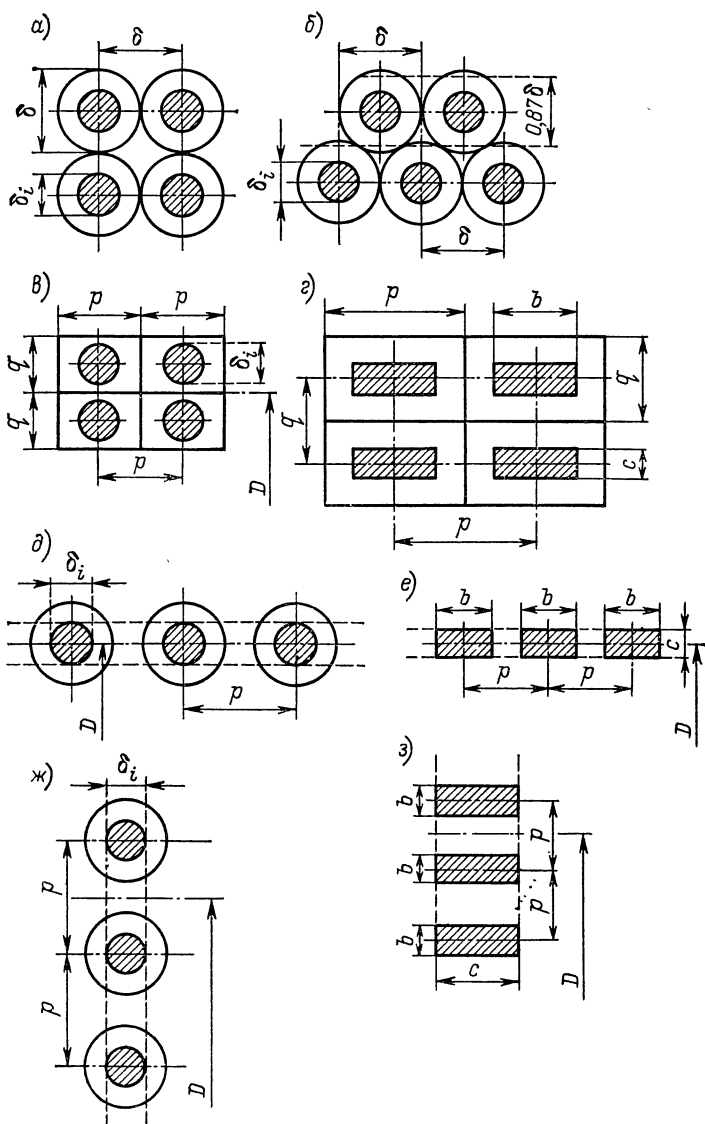


Рис. 6-11

5) Однослойная (в радиальном направлении) катушка из провода кругового сечения (рис. 6-11, *д*).

а) Если при определении расчетной индуктивности радиальный размер  $r$  катушки принят равным диаметру  $\delta_i$  голого провода, то при шаге обмотки, равном  $p$ ,

$$I = \ln \frac{p + \delta_i}{\delta_i} - 0,5569 + \varepsilon(p, \delta_i), \quad (6-37)$$

где  $\varepsilon(p, \delta_i)$  — величина, определяемая по табл. 10-3 при аргументе, равном  $\delta_i/p$ .

б) Если при определении расчетной индуктивности радиальный размер  $r$  катушки принят равным нулю, т. е. катушка рассчитывалась как соленоид, то при шаге обмотки, равном  $p$ ,

$$I = \ln \frac{2p}{\delta_i} - \frac{5}{4} = \ln \frac{p}{\delta_i} - 0,5569. \quad (6-38)$$

Значения величины  $I$  для данного случая даны в табл. 6-9.

6) Однослойная (в радиальном направлении) катушка из провода прямоугольного сечения (рис. 6-11, *е*).

а) Если при определении расчетной индуктивности радиальный размер  $r$  катушки принят равным той стороне  $c$  прямоугольного сечения голого провода, которая перпендикулярна оси катушки, то при шаге обмотки, равном  $p$ ,

$$I = \ln \frac{p + c}{b + c} + \varepsilon(p, c) - \varepsilon(b, c), \quad (6-39)$$

где  $\varepsilon(p, c)$  и  $\varepsilon(b, c)$  — величины, определяемые по табл. 10-3 при аргументе, равном соответственно  $c/p$  (или  $p/c$ ) и  $c/b$  (или  $b/c$ ).

б) Если при определении расчетной индуктивности радиальный размер  $r$  катушки принят равным нулю, т. е. катушка рассчитывалась как соленоид, то при шаге обмотки, равном  $p$ ,

$$I = \ln \frac{p}{b + c} - \varepsilon(b, c), \quad (6-40)$$

где  $\varepsilon(b, c)$  — величина, определяемая по табл. 10-3 при аргументе, равном  $b/c$  (или  $c/b$ ).

7) Однослойная (в аксиальном направлении) катушка из провода кругового сечения (рис. 6-11, *ж*).

а) Если при определении расчетной индуктивности аксиальный размер  $r$  катушки принят равным диаметру  $\delta_i$  голого провода, то при шаге обмотки, равном  $p$ , справедлива формула (6-37).

Таблица 6-9. Значения  $I$  для однослойной катушки из провода кругового сечения (случаи 5б и 7б)

$\delta_i/p$	$I$	$\delta_i/p$	$I$	$\delta_i/p$	$I$	$\delta_i/p$	$I$
1,00	-0,5569	0,75	-0,2691	0,50	+0,1363	0,25	+0,8294
0,99	5468	74	2557	49	1565	24	8702
98	5367	73	2421	48	1771	23	9128
97	5264	72	2283	47	1982	22	0,9573
96	5160	71	2143	46	2197	21	1,0038
0,95	-0,5055	0,70	-0,2001	0,45	+0,2416	0,20	+1,0526
94	4949	69	1857	44	2641	19	1,1039
93	4842	68	1711	43	2871	18	1,1580
92	4734	67	1563	42	3106	17	1,1251
91	4625	66	1413	41	3347	16	1,2757
0,90	-0,4515	0,65	-0,1261	0,40	+0,3594	0,15	+1,3402
89	4403	64	1106	39	3847	14	1,4092
88	4290	63	0949	38	4107	13	1,4833
87	4176	62	0789	37	4374	12	1,5634
86	4060	61	0626	36	4648	11	1,6504
0,85	-0,3943	0,60	-0,0460	0,35	+0,4929	0,10	+1,7457
84	3825	59	-0292	34	5219	09	1,8511
83	3705	58	-0121	33	5518	08	1,9689
82	3584	57	+0053	32	5826	07	2,1024
81	3461	56	+0230	31	6143	06	2,2565
0,80	-0,3337	0,55	+0,0410	0,30	+0,6471	0,05	+2,4389
79	3211	54	0594	29	6810	04	2,6620
78	3084	53	0781	28	7161	03	2,9497
77	2955	52	0971	27	7525	02	3,3551
76	2824	51	1165	26	7902	01	4,0483
0,75	-0,2691	0,50	+0,1363	0,25	+0,8294	0,00	$\infty$

б) Если при определении расчетной индуктивности аксиальный размер  $r$  принят равным нулю, т. е. катушка рассчитывалась как плоская, то при шаге обмотки, равном  $p$ , справедлива формула (6-38).

8) Однослойная (в аксиальном направлении) катушка из провода прямоугольного сечения (рис. 6-11, з).

а) Если при определении расчетной индуктивности аксиальный размер  $a$  катушки принят равным той стороне  $c$  прямоугольного сечения голого провода, которая параллельна оси катушки, то при шаге обмотки, равном  $p$ , справедлива формула (6-39).

б) Если при определении расчетной индуктивности аксиальный размер  $a$  катушки принят равным нулю, т. е. катушка рассчитывалась как плоская, то при шаге обмотки, равном  $p$ , справедлива формула (6-40).

2. Поправка, учитывающая отличие  $z$  а и м н ы х и н д у к т и в н о с т е й действительных витков катушки от

взаимных индуктивностей соответствующих расчетных витков, определяется формулой

$$\Delta_2 L = \mu_0 w \frac{d}{2} J, \quad (6-41)$$

где  $w$  — число витков катушки;  $d$  — ее средний диаметр, а величина  $J$ , зависящая от типа катушки и числа ее витков, определяется в различных случаях так, как указано ниже.

1) Однослойная (в радиальном направлении) катушка из провода кругового сечения (рис. 6-11,  $\delta$ ).

а) Если при определении расчетной индуктивности радиальный размер  $r$  катушки принят равным шагу обмотки  $p$ , т. е. принято, что расчетные витки имеют квадратное сечение, то величина  $J$  может быть найдена по табл. 6-10.

б) Если при определении расчетной индуктивности радиальный размер  $r$  катушки принят равным нулю, т. е. катушка рассчитывалась как соленоид, то величина  $J$  может быть найдена по табл. 6-11.

2) Однослойная (в радиальном направлении) катушка из провода прямоугольного сечения (рис. 6-11,  $e$ ).

а) Если при определении расчетной индуктивности радиальный размер  $r$  катушки принят равным той стороне  $c$  прямоугольного сечения голого провода, которая перпендикулярна оси катушки, то

$$J = 2 \frac{w-1}{w} (f_2 - f_1) - \frac{1}{6} (1 - \beta^2) \left( 0,6449 - \frac{\ln w + 0,577}{w} \right) + \\ + \frac{1}{12} \left[ \gamma^2 (1 - \beta^2) - \frac{2}{5} (1 - \beta^4) \right] \times \\ \times \left( 0,0823 - \frac{0,2021}{w} \right), \quad (6-42)$$

где  $\beta = b/p$ ;  $\gamma = c/p$ ;  $p$  — шаг обмотки;  $f_1$  — значение величины  $f$ , данной в табл. 10-4 и 10-5, для прямоугольников рис. 6-12,  $b$ , а  $f_2$  — то же для прямоугольников рис. 6-12,  $a$ .

б) Если при определении расчетной индуктивности радиальный раз-

Таблица 6-10.  
Значения  $J$  для  
однослойной катушки  
из провода кругового  
сечения (случаи 1а и  
3а)

$w$	$J$
3	0,00905
4	0,01035
10	0,01276
20	0,01357
25	0,0137
30	0,0138

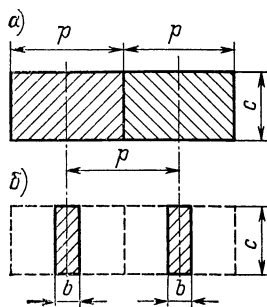


Рис. 6-12

Таблица 6-11. Значения  $J$  для однослойной катушки из провода кругового сечения (случаи 16 и 36)

$w$	$J$	$w$	$J$	$w$	$J$
1	0,0000	31	-0,3087	110	-0,3278
2	-0,1137	32	3095	120	3285
3	1663	33	3102	130	3291
4	1973	34	3109	140	3296
5	-0,2180	35	-0,3115	150	-0,3301
6	2329	36	3121	160	3305
7	2443	37	3127	170	3309
8	2532	38	3132	180	3312
9	2604	39	3137	190	3315
10	-0,2664	40	-0,3142	200	-0,3318
11	2715	41	3147	220	3323
12	2758	42	3152	240	3327
13	2795	43	3156	260	3330
14	2828	44	3160	280	3333
15	-0,2857	45	-0,3164	300	-0,3336
16	2883	46	3168	350	3341
17	2906	47	3172	400	3346
18	2927	48	3175	450	3349
19	2946	49	3179	500	-0,3351
20	-0,2964	50	-0,3182	550	3354
21	2980	55	3197	600	3356
22	2994	60	3210	650	3357
23	3008	65	3221	700	3358
24	3020	70	3230	750	-0,3360
25	-0,3032	75	-0,3238	800	3361
26	3043	80	3246	850	3362
27	3053	85	3253	900	3362
28	3062	90	3259	950	3363
29	3071	95	3264	1 000	-0,3364
30	-0,3079	100	-3269	$\infty$	-0,3379

мер принят равным нулю, т. е. катушка рассчитывалась как соленоид, то

$$J = J_0 - 2 \frac{w-1}{w} f_1 - \frac{1}{6} (\gamma^2 - \beta^2) \left( 0,6449 - \frac{\ln w + 0,577}{w} \right) + \\ + \frac{1}{30} \left( \gamma^4 + \beta^4 - \frac{5}{2} \beta^2 \gamma^2 \right) \left( 0,0823 - \frac{0,2021}{w} \right), \quad (6-43)$$

где  $J_0$  — значение величины  $J$ , взятое из табл. 6-11 при заданном числе  $w$ ;  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $p$  и  $f_1$  — то же, что в формуле (6-42).

3) Однослойная (в аксиальном направлении) катушка из провода кругового сечения (рис. 6-11, ж).

а) Если при определении расчетной индуктивности аксиальный размер  $a$  принят равным шагу обмотки, т. е. принято,

что расчетные витки имеют квадратное сечение, то величина  $J$  может быть найдена по табл. 6-10.

б) Если при определении расчетной индуктивности аксиальный размер  $a$  принят равным нулю, т. е. катушка рассчитывалась как плоская, то величина  $J$  может быть найдена по табл. 6-11.

4) Однослойная (в аксиальном направлении) катушка из провода прямоугольного сечения (рис. 6-11, з).

а) Если при определении расчетной индуктивности аксиальный размер  $a$  катушки принят равным той стороне  $c$  прямоугольного сечения голого провода, которая параллельна оси катушки, то справедлива формула (6-42).

б) Если при определении расчетной индуктивности аксиальный размер  $a$  катушки принят равным нулю, т. е. катушка рассчитывалась как плоская, то справедлива формула (6-43).

5) Катушка квадратного сечения из провода кругового сечения.

Значения  $J$  можно взять из табл. 6-12.

**Пример 6-9.** Катушка примера 6-2 выполнена из провода кругового сечения, диаметр которого  $\delta_i = 1,50$  мм. Витки намотаны в один слой. Определить обе поправки на изоляцию и найти индуктивность катушки с учетом этих поправок.

**Решение.** Так как при определении индуктивности расчетной катушки радиальный ее размер  $r$  был принят равным нулю, т. е. катушка рассчитывалась как соленоид, то для определения величины  $I$  следует применить формулу (6-38) или табл. 6-9. В данном случае шаг обмотки

$$p = a/w = 200/110 \text{ мм и } p/\delta_i = 200/(110 \cdot 1,5) = 1,212.$$

Следовательно,

$$I = \ln 1,212 = 0,5569 = -0,3646;$$

$$\Delta_1 L = -4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 110 \cdot \frac{0,50}{2} \cdot 0,3646 = -1,260 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

Величину  $J$  определяем по табл. 6-11. При  $w = 110$  имеем  $J = -0,3278$  и

$$\Delta_2 L = -4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 110 \cdot \frac{0,50}{2} \cdot 0,3278 = -1,113 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

Таким образом, общая поправка  $\Delta L = -2,393 \cdot 10^{-5}$  Гн и индуктивность катушки с поправкой на изоляцию

$$L = (7,045 - 0,024) \cdot 10^{-3} = 7,021 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

В данном примере поправка на изоляцию составляет около 0,34 %.

**Пример 6-10.** Катушка примера 6-5 выполнена из провода кругового сечения, диаметр которого  $\delta_i = 0,8$  мм. Витки намотаны в 12 слоев по

Таблица 6-12.  
Значения  $J$  для  
катушки квадратного  
сечения из провода  
кругового сечения

$w$	$J$
4	0,01691
16	0,01515
100	0,01713
400	0,01764
$\infty$	0,01806

12 витков в каждом. Определить обе поправки на изоляцию и найти индуктивность катушки с учетом этих поправок.

**Решение.** Для определения величины  $I$  применяем формулу (6-35), полагая в ней  $p = q = 12/12 = 1$  мм и  $\delta_i = 0,8$  мм.

По табл. 10-3 при аргументе, равном  $1/1 = 1$ , находим  $\varepsilon(1,1) = 0,0018$ . Таким образом,

$$I = \ln \frac{2}{0,8} - 0,5569 + 0,0018 = 0,3612;$$

$$\Delta_1 L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 144 \frac{0,06}{2} \cdot 0,3612 = 9,807 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Величину  $J$  определяем по табл. 6-12. При  $\omega = 144$  эта таблица дает  $J = 0,0172$  и  $\Delta_2 L = 4,67 \cdot 10^{-8}$  Гн.

Суммарная поправка  $\Delta L = (9,807 + 0,46 I) \cdot 10^{-7} = 1,0214 \cdot 10^{-6}$  Гн.

Индуктивность катушки с поправкой на изоляцию

$$L = (1,428 + 0,001) \cdot 10^{-3} = 1,429 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Поправка на изоляцию в данном случае составляет только 0,07 %.

**Пример 6-11.** Однослойная катушка имеет  $\omega = 10$  витков и выполнена из провода прямоугольного сечения, намотанного в виде спирали с шагом  $p = 1$  см. Размер сечения провода в радиальном направлении  $c = 1$  см, в аксиальном направлении  $b = 0,1$  см. Средний диаметр катушки  $d = 30$  см. Определить индуктивность катушки.

**Решение.**

1. При определении расчетной индуктивности катушки ее радиальный размер  $r$  принимаем равным нулю, т. е. рассчитываем катушку как соленоид.

Расчетный соленоид имеет длину  $a = \omega p = 10$  см. Его индуктивность определяем по формуле (6-1). Значение коэффициента  $\Phi$  находим по табл. 6-1. При  $\alpha = a/d = 1/3$  имеем  $\Phi = 12,71$ , и, следовательно,

$$L = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 12,71 \cdot 0,30 \cdot 100 = 3,813 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

Для учета изоляции определяем величины  $I$  и  $J$ . Величину  $I$  находим по формуле (6-40), причем значение  $\varepsilon(b, c)$  определяем по табл. 10-3:

$$\varepsilon(b, c) = \varepsilon(1, 10) = 0,0021; \quad I = \ln \frac{10}{11} - 0,0021 = -0,0974.$$

Величину  $J$  находим по формуле (6-43). По табл. 6-11 при  $\omega = 10$  находим  $J_0 = -0,2664$ . По табл. 10-5 для прямоугольников рис. 6-12, б ( $b/c = 0,1$  и  $c/p = 1$ ) находим  $f_1 = 0,0702$ . Следовательно,

$$J = -0,2664 - 2 \frac{9}{10} \cdot 0,0702 - \frac{1}{6} \cdot 0,99 \left( 0,6449 - \frac{\ln 10 + 0,577}{10} \right) + \\ + \frac{0,975}{30} (0,0823 - 0,0202) = -0,2664 - 0,1264 - 0,0588 + 0,0020 = -0,4496.$$

Складывая  $I$  и  $J$ , получаем  $I + J = -0,5470$ . Поправка

$$\Delta L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 0,15 (-0,5470) = -1,03 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

Индуктивность с поправкой на изоляцию

$$L + \Delta L = (38,13 - 1,03) \cdot 10^{-6} = 3,710 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

2. При определении расчетной индуктивности катушки принимаем ее радиальный размер  $r$  равным стороне  $c$ . Для расчета применяем формулу (6-18). Табл. 6-2 при  $\alpha = a/d = 1/3$  дает  $K_a = 0,4292$ , а табл. 6-5 при  $r/d = 1/30$  и  $r/a = 0,1$  дает  $k = 0,0206$ , так что  $K_a - k = 0,4086$ . Следовательно,

$$L = \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot \frac{0,30}{1/3} \cdot 0,4086 = 3,629 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

Для внесения поправки на изоляцию находим  $I$  и  $J$ . При определении  $I$  по формуле (6-39) величины  $\varepsilon(p, c)$  и  $\varepsilon(b, c)$  берем из табл. 10-3:

$$\varepsilon(b, c) = \varepsilon(1, 10) = 0,00210; \quad \varepsilon(p, c) = \varepsilon(10, 10) = 0,00177.$$

Таким образом,  $I = \ln 20/11 + 0,00177 - 0,00210 = 0,5975$ . Значения функций  $f_1$  и  $f_2$ , входящих в формулу (6-42), находим по табл. 10-5. Для прямоугольников рис. 6-12, а ( $c/p = 1$ ;  $p/c = 1$ ) имеем  $f_2 = 0,0065$ . Для прямоугольников рис. 6-12, б ( $c/p = 1$ ;  $b/c = 0,1$ ) имеем  $f_1 = 0,0702$ . Так как в данном случае  $\beta = 0,1/1 = 0,1$  и  $\gamma = 1/1 = 1$ , то, подставляя найденные значения в формулу (6-42), получаем

$$\begin{aligned} J &= 2 \cdot \frac{9}{10} (0,0065 - 0,0702) - \frac{1}{6} (1 - 0,01) (0,6449 - 0,2879) + \\ &+ \frac{1}{12} \left[ (1 - 0,01) - \frac{2}{5} \cdot 0,9999 \right] \left( 0,0823 - \frac{0,2021}{10} \right) = \\ &= -0,11466 - 0,05890 + 0,00306 = -0,1705. \end{aligned}$$

Таким образом, общая поправка на изоляцию

$$\Delta L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 0,15 (0,5975 - 0,1705) = 0,805 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

Индуктивность с поправкой на изоляцию

$$L + \Delta L = (36,29 + 0,805) \cdot 10^{-6} = 3,7095 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

Индуктивности катушки, вычисленные различными методами, после внесения поправок на изоляцию получились одинаковыми. Величина поправки составила около 2,7 % в первом случае и около 2,2 % во втором случае.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

# ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ КОАКСИАЛЬНЫХ КРУГОВЫХ КАТУШЕК

## 7-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В настоящей главе даны формулы, таблицы и кривые для расчета взаимных индуктивностей коаксиальных круговых катушек, т. е. катушек, обмотка которых занимает объем, имеющий форму тела вращения. Как и при расчете



собственных индуктивностей, наибольшее значение имеют катушки прямоугольного сечения\*, которым и уделено основное внимание, причем через  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d$  по-прежнему обозначены внешний, внутренний и средний диаметры одной из катушек (рис. 6-1), через  $a$  — ее длина, через  $r = (d_1 - d_2)/2$  — радиальный размер поперечного сечения обмотки (ее толщина), а через  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D$ ,  $A$  и  $R = (D_1 - D_2)/2$  — соответствующие величины для другой катушки. В зависимости от соотношения между размерами катушек применяется терминология, указанная в § 6-1.

2. Формулы, таблицы и кривые настоящей главы дают значения так называемых *расчетных взаимных индуктивностей* (§ 1-14), т. е. индуктивностей, вычисленных в предположении, что витки катушек представляют собой коаксиальные круговые контуры, имеют бесконечно тонкую изоляцию и плотно заполняют все пространство, занятое обмотками. Предполагается, кроме того, что витки катушек уложены равномерно как по длине, так и в радиальном направлении.

Отличие действительной взаимной индуктивности от расчетной в подавляющем большинстве случаев настолько мало, что в технических расчетах им всегда пренебрегают. В случае необходимости его можно было бы учесть, исходя из принципов, изложенных в § 1-14.

При определении взаимной индуктивности средний диаметр каждой катушки берется равным среднему диаметру действительной катушки; аксиальный размер  $a$  и радиальный размер  $r$  поперечного сечения принимаются равными шагу обмотки, умноженному на число слоев обмотки в данном направлении (например, для катушки, сечение которой изображено на рис. 6-11,  $a = 2p$ ,  $r = 2q$ ). Для катушки, имеющей в каком-либо направлении только один слой, ее размер ( $r$  или  $a$ ) в этом направлении чаще всего принимают равным нулю, т. е. рассматривают катушку как соленоид или как плоскую катушку, существенно упрощая этим весь расчет. Можно несколько уточнить расчет, приняв этот размер равным диаметру голого провода, если провод круглый, или соответствующей толщине провода, если он прямоугольного сечения. Однако получаемое таким путем уточнение весьма мало, усложняет расчет и потому обычно себя не оправдывает.

---

\* Здесь и далее в этой главе поперечным сечением катушки называется сечение, перпендикулярное направлению тока в витках катушки.

3. Все формулы, таблицы и кривые настоящей главы получены в предположении, что ток распределен по сечениям катушек равномерно. Неравномерность распределения тока, вызванная поверхностным эффектом, влияет на взаимную индуктивность катушек весьма мало и в расчетах не учитывается.

4. При одинаковом распределении тока по сечению расчетные взаимные индуктивности катушек, имеющих  $\omega$  и  $W$  витков, отличаются от взаимных индуктивностей соответствующих массивных колец только множителем  $\omega W$  (§ 1-14). Поэтому приведенные в этой главе формулы, таблицы и кривые могут быть использованы и для определения взаимных индуктивностей массивных колец при низкой частоте.

5. При расчете взаимных индуктивностей коаксиальных катушек в некоторых случаях оказывается полезным так называемый *принцип взаимной замены длин*, непосредственно вытекающий из теоремы о четырех прямоугольниках (§ 1-10). Этот принцип заключается в том, что взаимная индуктивность двух катушек не изменится, если, сохранив неизменными диаметры катушек и положение их центров, поменять местами их длины. Иными словами, при одном и том же расстоянии между центрами катушка с размерами  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $a$  и катушка с размерами  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $A$  имеют такую же взаимную индуктивность, как катушки с размерами  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $A$  и  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $a$ .

6. При пользовании формулами и методами настоящей главы следует обратить внимание на то, что во многих случаях искомая индуктивность выражается в виде разности близких величин. В подобных случаях надо иметь в виду, что степень точности результата значительно ниже той степени точности, с которой вычисляются отдельные члены, входящие в формулу.

## 7-2. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СОЛЕНОИДОВ ОДИНАКОВОЙ ДЛИНЫ

1. **Расчет по таблицам.** Взаимная индуктивность концентрических соленоидов одинаковой длины может быть найдена по формуле

$$M = \frac{\pi}{4} \mu_0 \omega W \left( \frac{d}{a} \right)^2 (l_1 F_1 - l_2 F_2), \quad (7-1)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков соленоидов;  $l_1 = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + 4a^2}$ ;  $l_2 = D/2$ ;  $D$  и  $d < D$  — диаметры соленоидов;  $a$  — их длина (рис. 7-1);  $F_1$  — значение функции  $F$ , данной в табл. 7-1

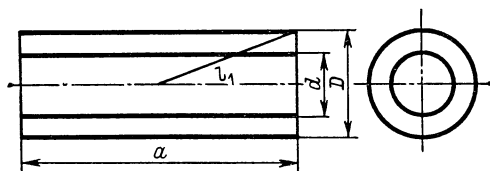


Рис. 7-1

и 7-2, при  $\delta = d/D$  и  $\lambda^2 = \lambda_1^2 = \left(\frac{D}{2l_1}\right)^2$ ;  $F_2$  — то же при  $\lambda^2 = \lambda_2^2 = \left(\frac{D}{2l_2}\right)^2 = 1$ .

2. Аналитический расчет. В тех случаях, когда необходимо иметь общее аналитическое выражение взаимной индуктивности концентрических соленоидов одинаковой длины, а также для проверки значений, полученных по формуле (7-1), можно пользоваться формулой

$$M = \mu_0 \frac{wW}{a^2} \Phi, \quad (7-2)$$

где  $\Phi$  — величина, определяемая, как указано ниже.

1) При  $a/d < 0,7$  и  $D/d \leq 1,7$  —  $a/d$ , т. е. для относительно коротких соленоидов с близкими радиусами, можно пользоваться формулой

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{4} (Dd)^{3/2} \left[ k_1 \eta^2 \ln \frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta^2} + \left( k_2 \xi^2 + \frac{k_3}{8} \xi^4 - \frac{k_4}{64} \xi^6 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{1024} \xi^8 \right) \ln \frac{16}{\xi^2 + \eta^2} - 4k_5 \xi \eta \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta} - k_6 \xi^2 + \frac{k_7}{16} \xi^4 + \right. \\ \left. + \frac{k_8}{48} \xi^6 - \frac{109}{12288} \xi^8 + \dots \right], \end{aligned} \quad (7-3)$$

где

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{Dd}}; \quad \eta = \frac{D-d}{2\sqrt{Dd}}; \quad (7-4)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 1 + \frac{3}{8} \eta^2 - \frac{5}{64} \eta^4 + \frac{35}{1024} \eta^6; & k_5 &= 1 + \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{8} \eta^4 + \frac{1}{16} \eta^6; \\ k_2 &= 1 + \frac{3}{4} \eta^2 - \frac{15}{64} \eta^4 + \frac{35}{256} \eta^6; & k_6 &= 1 - \frac{9}{8} \eta^2 - \frac{1}{16} \eta^4 + \frac{325}{3072} \eta^6; \\ k_3 &= 1 - \frac{5}{8} \eta^2 + \frac{35}{64} \eta^4; & k_7 &= 1 + \frac{3}{2} \eta^2 - \frac{695}{384} \eta^4; \\ k_4 &= 1 - \frac{7}{4} \eta^2; & k_8 &= 1 - \frac{149}{64} \eta^2. \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

2) При всех других соотношениях между размерами можно применять формулу

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{\pi}{8} d^2 D \left( q_1 + \frac{\delta^2}{8} q_3 + \frac{\delta^4}{64} q_5 + \frac{5}{1024} \delta^6 q_7 + \right. \\ \left. + \frac{35}{16384} \delta^8 q_9 + \frac{147}{131072} \delta^{10} q_{11} \dots \right), \end{aligned} \quad (7-6)$$

Таблица 7-1. Значения  $F$  в формуле (7-1) для концентрических соленоидов

$\delta$	$\lambda^2=1,00$	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	$\lambda^2=0,50$	$\delta$
1,00	0,84833	0,87727	0,89552	0,91020	0,92264	0,93345	0,94298	0,95144	0,95900	0,96576	0,97180	1,00
0,95	86783	88982	90561	91859	92971	93944	94805	95573	96261	96877	97428	0,95
90	88418	90175	91531	92666	93655	94524	95298	95990	96612	97169	97668	90
85	89870	91296	92456	93444	94314	95085	95774	96393	96951	97452	97901	85
0,80	0,91176	0,92344	0,93329	0,94185	0,94944	0,95622	0,96231	0,96781	0,97276	0,97723	0,98124	0,80
0,75	0,92356	0,93318	0,94150	0,94885	0,95542	0,96132	0,96668	0,97151	0,97588	0,97983	0,98338	0,75
70	93426	94217	94917	95543	96107	96618	97082	97503	97884	98230	98541	70
65	94394	95045	95629	96157	96637	97074	97472	97835	98164	98464	98732	65
60	95270	95803	96286	96727	97130	97499	97837	98146	98427	98683	98913	60
0,55	0,96060	0,96492	0,96888	0,97252	0,97586	0,97894	0,98176	0,98435	0,98672	0,98887	0,99082	0,55
0,50	0,96769	0,97115	0,97434	0,97730	0,98003	0,98256	0,98488	0,98702	0,98897	0,99076	0,99237	0,50
45	97400	97673	97927	98163	98382	98584	98772	98945	99103	99248	99379	45
40	97958	98169	98366	98550	98721	98880	99028	99164	99289	99404	99508	40
35	98444	98603	98751	98890	99020	99142	99254	99358	99454	99542	99622	35
0,30	0,98862	0,98976	0,99084	0,99186	0,99280	0,99369	0,99451	0,99527	0,99598	0,99662	0,99721	0,30
0,25	0,99212	0,99291	0,99365	0,99435	0,99500	0,99561	0,99618	0,99671	0,99720	0,99765	0,99806	0,25
20	99498	99547	99594	99636	99680	99719	99755	99789	99821	99849	99879	20
15	99718	99746	99772	99797	99820	99842	99862	99881	99899	99915	99930	15
10	99875	99887	99899	99910	99920	99930	99939	99947	99955	99962	99969	10
0,05	0,99969	0,99972	0,99975	0,99977	0,99980	0,99982	0,99985	0,99987	0,99989	0,99991	0,99992	0,05
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

$\delta$	$\lambda^2 = 0,50$	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	$\lambda^2 = 0$	$\delta$
1,00	0,97180	0,97718	0,98194	0,98612	0,98974	0,99282	0,99535	0,99735	0,99880	0,99969	1	1,00
0,95	97428	97919	98354	98736	99066	99346	99577	99759	99891	99972	1	0,95
90	97668	98114	98509	98855	99155	99409	99618	99783	99902	99975	1	90
85	97901	98302	98658	98970	99240	99469	99657	99805	99912	99978	1	85
0,80	0,98124	0,98483	0,98801	0,99080	0,99322	0,99526	0,99695	0,99827	0,99922	0,99980	1	0,80
0,75	0,98338	0,98656	0,98938	0,99185	0,99399	0,99581	0,99730	0,99847	0,99931	0,99983	1	0,75
70	98541	98820	99068	99285	99473	99633	99764	99866	99940	99985	1	70
65	98732	98975	99190	99380	99543	99682	99795	99884	99948	99987	1	65
60	98913	99121	99306	99467	99608	99727	99825	99901	99956	99989	1	60
0,55	0,99082	0,99257	0,99413	0,99550	0,99669	0,99770	0,99852	0,99916	0,99963	0,99990	1	0,55
0,50	0,99237	0,99383	0,99512	0,99626	0,99725	0,99809	0,99877	0,99931	0,99969	0,99992	1	0,50
45	99379	99498	99603	99696	99776	99844	99900	99944	99975	99994	1	45
40	99508	99601	99685	99759	99823	99877	99921	99955	99980	99995	1	40
35	99622	99694	99758	99815	99864	99905	99939	99966	99985	99996	1	35
0,30	0,99721	0,99774	0,99822	0,99864	0,99900	0,99930	0,99955	0,99975	0,99989	0,99997	1	0,30
0,25	0,99806	0,99843	0,99876	0,99905	0,99930	0,99952	0,99969	0,99982	0,99992	0,99998	1	0,25
20	99875	99899	99920	99939	99955	99969	99980	99989	99995	99999	1	20
15	99930	99943	99955	99966	99975	99982	99989	99994	99997	0,99999	1	15
10	99969	99975	99980	99985	99989	99992	99995	99997	0,99999	1,00000	1	10
0,05	0,99992	0,99994	0,99995	0,99996	0,99997	0,99998	0,99999	0,99999	1,00000	1,00000	1	0,05
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Таблица 7-2. Значения  $F$  в формуле (7-1) для концентрических соленоидов при  $\delta$  и  $\lambda^2$ , близких к единице

$\delta$	$\lambda^2 = 1,00$	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	$\delta$
1,00	0,84883	0,85698	0,86298	0,86820	0,87292	0,87727	1,00
0,99	85294	86035	86606	87107	87562	87982	0,99
98	85686	86366	86910	87391	87829	88236	98
97	86063	86693	87210	87672	88094	88487	97
96	86428	87014	87506	87949	88356	88736	96
0,95	0,86783	0,87329	0,87798	0,88223	0,88615	0,88982	0,95
94	87127	87639	88086	88494	88872	89226	94
93	87462	87944	88370	88761	89125	89468	93
92	87788	88242	88649	89024	89375	89706	92
91	88107	88536	88924	89285	89622	89942	91
0,90	0,88418	0,88824	0,89195	0,89541	0,89866	0,90175	0,90

$\delta$	$\lambda^2 = 0,95$	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	$\delta$
1,00	0,87727	0,88133	0,88515	0,88877	0,89222	0,89552	1,00
0,99	87982	88376	88747	89100	89436	89757	0,99
98	88236	88617	88978	89320	89647	89960	98
97	89487	88857	89207	89539	89858	90162	97
96	88736	89094	89433	89757	90066	90362	96
0,95	0,88982	0,89329	0,89658	0,89972	0,90273	0,90561	0,95
94	89226	89562	89881	90186	90478	90759	94
93	89468	89792	90102	90397	90681	90954	93
92	89706	90020	90320	90607	90883	91148	92
91	89942	90246	90536	90815	91082	91340	91
0,90	0,90175	0,90469	0,90750	0,91020	0,91280	0,91531	0,90

где

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= -1 + 1/\gamma; \\ q_3 &= 1 - \gamma^3; \\ q_5 &= 1 + 4\gamma^5 - 5\gamma^7; \\ q_7 &= 1 - 8\gamma^7 + 28\gamma^9 - 21\gamma^{11}; \\ q_9 &= 1 + \frac{1}{5} (64\gamma^9 - 432\gamma^{11} + 792\gamma^{13} - 429\gamma^{15}); \\ q_{11} &= 1 - \frac{1}{7} (128\gamma^{11} - 1408\gamma^{13} + 4576\gamma^{15} - 5720\gamma^{17} + 2431\gamma^{19}), \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

причем

$$\delta = d/D; \quad \gamma = D/\sqrt{D^2 + 4a^2}. \quad (7-8)$$

Следует иметь в виду, что применение формул (7-3) и (7-6) возможно и вне границ, указанных выше для каждой из них.

Существует обширная область значений  $a/d$  и  $D/d$ , в которой обе формулы приблизительно одинаково удобны для расчета.

Применение каждой из этих формул допустимо во всех случаях, когда содержащиеся в них ряды сходятся достаточно быстро.

**Пример 7-1.** Концентрические соленоиды с диаметрами  $D = 10$  см и  $d = 9,8$  см и одинаковой длиной  $a = 1$  см имеют  $W = 25$  витков и  $w = 20$  витков. Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.**

1. Применяем формулу (7-1). В данном случае

$$l_1 = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 4} = \sqrt{26} = 5,099 \text{ см}; \quad l_2 = 5 \text{ см};$$

$$\lambda_1^2 = 0,96154; \quad \lambda_2^2 = 1.$$

Из табл. 7-2 находим

$$F_1 = 0,87764; \quad F_2 = 0,85686.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 20 \cdot (9,8)^2 (5,0990 \cdot 0,87764 - 5 \cdot 0,85686) \cdot 10^{-2} = \\ &= \pi^2 \cdot 500 \cdot 96,04 \cdot 10^{-9} (4,4751 - 4,2843) = \\ &= \pi^2 \cdot 500 \cdot 96,04 \cdot 10^{-9} \cdot 0,1908 = 9,043 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}. \end{aligned}$$

2. Применяем формулы (7-2) и (7-3). В данном случае

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sqrt{98}} = 0,1010; \quad \eta = \frac{1}{10\sqrt{98}} = 0,01010; \quad k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 1; \\ \xi^2 &= 0,01020; \quad \eta^2 = 1,02 \cdot 10^{-4}; \quad k_4 = 0,9998, \quad k_7 = 1,0002; \\ \xi^4 &= 1,040 \cdot 10^{-4}; \quad \eta^4 = 1,04 \cdot 10^{-8}; \quad \frac{1}{4} (Dd)^{3/2} = 2,623 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3; \end{aligned}$$

$$\ln \frac{\xi^2 + \eta^2}{\eta^2} = 4,615; \quad \ln \frac{16}{\xi^2 + \eta^2} = 7,348; \quad \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta} = 1,471.$$

Подставив найденные значения в формулу (7-3), получим

$$\begin{aligned} \Phi &= 2,623 \cdot 10^{-4} [1,020 \cdot 10^{-4} \cdot 4,615 + 0,01021 \cdot 7,348 - 0,004080 \cdot 1,471 - \\ &- 0,01020] = 2,623 \cdot 10^{-4} [4,707 \cdot 10^{-4} + 7,502 \cdot 10^{-2} - 6,002 \cdot 10^{-3} - \\ &- 1,020 \cdot 10^{-2}] = 2,623 \cdot 10^{-4} \cdot 5,930 \cdot 10^{-2} = 1,439 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{20 \cdot 25}{10^{-4}} \cdot 1,439 \cdot 10^{-5} = 9,043 \cdot 10^{-5} \text{ Гн},$$

что совпадает с ранее найденным результатом.

**Пример 7-2.** Концентрические соленоиды одинаковой длины  $a = 15$  см имеют диаметры  $D = 10$  см и  $d = 5$  см и числа витков  $W = 200$  и  $w = 50$ . Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.**

1. Применяем формулу (7-1). В данном случае  $\delta = 0,5$ ,  $l_1 = 0,1581$  м,  $l_2 = 0,05$  м,  $\lambda_1^2 = 0,1$ ,  $\lambda_2^2 = 1$ .

По табл. 7-1 находим  $F_1 = 0,9997$  и  $F_2 = 0,9677$ .

Следовательно,

$$l_1 F_1 = 0,1581; \quad l_2 F_2 = 0,04839; \quad l_1 F_1 - l_2 F_2 = 0,1097;$$

$$M = \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 50 (5/15)^2 \cdot 0,1097 = 1,203 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

2. Применяем формулы (7-2) и (7-6). В данном случае  $\delta = 0,5$ ;

$$\gamma = 10/\sqrt{1000} = 0,3162; \quad 1/\gamma = 3,162; \quad \gamma^3 = 0,03162;$$

$$\gamma^5 = 3,162 \cdot 10^{-3}; \quad \gamma^7 = 3,162 \cdot 10^{-4}; \quad \delta^2 = 0,25; \quad \delta^4 = 0,0625;$$

$$q_1 = 2,162; \quad q_3 = 0,9684; \quad q_5 = 1,011.$$

Подставляя найденные значения величин в формулу (7-6), получаем

$$\Phi = \frac{\pi}{8} \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1 (2,162 + 0,030 + 0,001) = 2,154 \cdot 10^{-4};$$

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 50}{(0,15)^2} \cdot 2,154 \cdot 10^{-4} = 1,203 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Оба результата совпадают.

### 7-3. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СОЛЕНОИДОВ НЕОДИНАКОВОЙ ДЛИНЫ

1. Длина  $a$  внутреннего соленоида меньше длины  $A$  внешнего (рис. 7-2, а). В этом случае

$$M = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{d^2}{Aa} wW (l_1 F_1 - l_2 F_2), \quad (7-9)$$

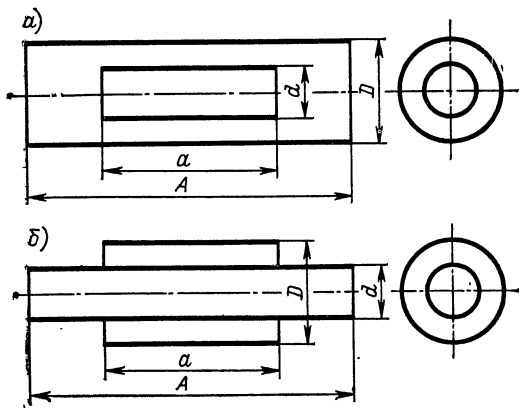


Рис. 7-2



где  $w$  и  $W$  — числа витков соленоидов;  $d$  и  $D$  — их диаметры;

$$l_1 = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + (A + a)^2}; \quad l_2 = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + (A - a)^2}; \quad (7-10)$$

$F_1$  — значение функции  $F$ , данной в табл. 7-1 и 7-2, при  $\delta = d/D$  и  $\lambda^2 = \lambda_1^2 = \left(\frac{D}{2l_1}\right)^2$ ;  $F_2$  — то же при  $\lambda^2 = \lambda_2^2 = \left(\frac{D}{2l_2}\right)^2$ .

В тех случаях, когда необходимо иметь общее аналитическое выражение взаимной индуктивности концентрических соленоидов, а также для проверки значений, полученных по формуле (7-9), можно пользоваться формулой

$$M = \mu_0 \frac{wW}{aA} (\Phi_1 - \Phi_2), \quad (7-11)$$

где  $\Phi_1$  — значение величины  $\Phi$ , входящей в формулу (7-2), вычисленное для двух концентрических соленоидов с диаметрами  $D$  и  $d$  и длиной, равной  $(A + a)/2$ ;  $\Phi_2$  — то же для соленоидов с длиной, равной  $(A - a)/2$ .

Для вычисления  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в зависимости от соотношения между размерами соленоидов следует пользоваться формулой (7-3) или (7-6).

В том частном случае, когда длина внутреннего соленоида значительно меньше длины внешнего соленоида, взаимную индуктивность соленоидов можно определить непосредственно по формуле

$$M = \frac{\pi}{8} \mu_0 wW \frac{d^2}{B} \left[ 1 - \frac{1}{8} \frac{D^2 b^2}{B^4} (\xi_2 + \xi_4 \eta_2 \beta^2 + \xi_6 \eta_4 \beta^4 + \xi_8 \eta_6 \beta^6 + \dots) \right], \quad (7-12)$$

где

$$\beta = b/B; \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + a^2}; \quad B = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + A^2}, \quad (7-13)$$

а  $\xi$  и  $\eta$  с различными индексами получаются из функций  $\varphi(\gamma)$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(\gamma) &= 1 - \frac{7}{4} \gamma^2; \\ \varphi_4(\gamma) &= 1 - \frac{9}{2} \gamma^2 + \frac{33}{8} \gamma^4; \\ \varphi_6(\gamma) &= 1 - \frac{33}{4} \gamma^2 + \frac{143}{8} \gamma^4 - \frac{715}{64} \gamma^6; \\ \varphi_8(\gamma) &= 1 - 13\gamma^2 + \frac{195}{4} \gamma^4 - \frac{1105}{16} \gamma^6 + \frac{4199}{128} \gamma^8 \end{aligned} \right\} \quad (7-14)$$

путем подстановки вместо  $\gamma$  соответственно  $d/(2b)$  или  $D/(2B)$  [например,  $\xi_2 = 1 - \frac{7}{4} \left(\frac{d}{2b}\right)^2$ ;  $\eta_4 = 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{D}{2B}\right)^2 + \frac{33}{8} \left(\frac{D}{2B}\right)^4$  и т. д.].

Для облегчения расчетов значения функций  $\varphi_2(\gamma)$ ,  $\varphi_4(\gamma)$ ,  $\varphi_6(\gamma)$  и  $\varphi_8(\gamma)$  даны в табл. 7-3.

Формула (7-12) неудобна, если диаметры  $D$  и  $d$  близки друг к другу и много больше длин  $A$  и  $a$ . В этом случае лучше применять формулу (7-11), используя для определения  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  формулу (7-3).

Таблица 7-3. Значения  $\Phi(\gamma)$ 

$\gamma^2$	$\Phi_2(\gamma)$	$\Phi_4(\gamma)$	$\Phi_6(\gamma)$	$\Phi_8(\gamma)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
01	0,9825	0,9554	0,9193	0,8748
02	9650	9116	8421	7589
03	9475	8687	7683	6520
0,04	0,9300	0,8266	0,6979	0,5536
0,05	0,9125	0,7853	0,6308	0,4634
06	8950	7448	5669	3810
07	8775	7052	5063	3060
08	8600	6664	4487	2380
0,09	8425	0,6284	0,3941	0,1767
0,10	0,8250	0,5912	0,3426	0,1217
11	8075	5549	2939	0728
12	7900	5194	2481	+0,0295
13	7725	4847	2050	-0,0085
0,14	0,7550	0,4508	0,1647	-0,0414
0,15	0,7375	0,4178	0,1270	-0,0696
16	7200	3856	0918	0934
17	7025	3542	0592	1130
18	6850	3236	0290	1288
0,19	0,6675	0,2939	+0,0012	-0,1411
0,20	0,6500	0,2650	-0,0244	-0,1500
21	6325	2369	0477	1559
22	6150	2096	0688	1590
23	5975	1832	0878	1596
0,24	0,5800	0,1576	-0,1048	-0,1579
0,25	0,5625	0,1328	-0,1199	-0,1541
26	5450	1088	1330	1484
27	5275	0857	1443	1412
28	5100	0634	1538	1324
0,29	0,4925	0,0419	-0,1617	-0,1225
0,30	0,4750	0,0212	-0,1679	-0,1115
31	4575	+0,0014	1725	0996
32	4400	-0,0176	1757	0871
33	4225	0358	1774	0740
0,34	0,4050	-0,0532	-0,1778	-0,0606
0,35	0,3875	-0,0697	-0,1768	-0,0469
36	3700	0854	1746	0332
37	3525	1003	1713	0195
38	3350	1144	1669	-0,0061
39	3175	1276	1614	+0,0071
0,40	0,3000	-0,1400	-0,1550	0,0198

$\gamma^2$	$\Phi_2 (\gamma)$	$\Phi_4 (\gamma)$	$\Phi_6 (\gamma)$	$\Phi_8 (\gamma)$
0,40	0,3000	-0,1400	-0,1550	0,0198
41	2825	1516	1477	0320
42	2650	1624	1396	0436
43	2475	1723	1307	0544
0,44	0,2300	-0,1814	-0,1211	0,0645
0,45	0,2125	-0,1897	-0,1108	0,0738
46	1950	1972	1001	0820
47	1775	2038	0888	0894
48	1600	2096	0771	0956
0,49	0,1425	-0,2146	-0,0651	0,1009
0,50	0,1250	-0,2188	-0,0527	0,1050
51	1075	2221	0402	1080
52	0900	2246	0274	1098
53	0725	2263	0146	1105
0,54	0,0550	-0,2271	-0,0018	0,1100
0,55	0,0375	-0,2272	+0,0110	0,1084
56	0200	2264	0236	1057
57	+0,0025	2248	0361	1018
58	-0,0150	2224	0484	0969
0,59	-0,0325	-0,2191	0,0603	0,0909
0,60	-0,0500	-0,2150	0,0719	0,0840
61	0675	2101	0830	0761
62	0850	2044	0936	0673
63	1025	1978	1036	0577
0,64	-0,1200	-0,1904	0,1130	0,0474
0,65	-0,1375	-0,1822	0,1216	0,0364
66	1550	1732	1295	0249
67	1725	1633	1365	0129
68	1900	1526	1426	+0,0006
0,69	-0,2075	-0,1411	0,1477	-0,0119
0,70	-0,2250	-0,1288	0,1518	-0,0245
71	2425	1156	1548	0371
72	2600	1016	1565	0496
73	2775	0868	1570	0617
0,74	-0,2950	-0,0712	0,1562	-0,0733
0,75	-0,3125	-0,0547	0,1540	-0,0843
76	3300	0374	1504	0944
77	3475	0193	1452	1036
78	3650	-0,0004	1385	1116
79	-0,3825	+0,0194	0,1301	0,1182
0,80	-0,4000	0,0400	0,1200	-0,1232

$\gamma^2$	$\varphi_2 (\gamma)$	$\varphi_4 (\gamma)$	$\varphi_6 (\gamma)$	$\varphi_8 (\gamma)$
0,80	-0,4000	0,0400	0,1200	-0,1232
81	4175	0614	1081	1264
82	4350	0836	0943	1276
83	4525	1067	0787	1266
0,84	-0,4700	0,1306	0,0610	0,1231
0,85	-0,4875	0,1553	0,0413	-0,1169
86	5050	1808	+0,0195	1077
87	5225	2072	-0,0046	0953
88	5400	2344	0309	0794
89	5575	2624	0595	0597
0,90	-0,5750	0,2912	-0,0905	-0,0359
91	5925	3209	1240	-0,0078
92	6100	3514	1600	+0,0249
93	6275	3827	1985	0626
94	-0,6450	0,4148	-0,2398	0,1055
0,95	-0,6625	0,4478	-0,2838	0,1540
96	6800	4816	3305	2085
97	6975	5162	3801	2691
98	7150	5516	4327	3364
0,99	7325	5879	4882	4106
1,00	-0,7500	0,6250	-0,5469	0,4922

2. Длина  $a$  внешнего соленоида меньше длины  $A$  внутреннего (рис. 7-2, б). На основании принципа взаимной замены длин (§ 7-1) можно утверждать, что взаимная индуктивность соленоидов рис. 7-2, б равна взаимной индуктивности соленоидов рис. 7-2, а. Следовательно, в этом случае можно пользоваться формулами (7-9), (7-11) и (7-12) предыдущего пункта, но при этом следует помнить, что теперь через  $A$  обозначена длина внутреннего соленоида, а через  $a$  — длина внешнего соленоида.

**Пример 7-3.** Соленоид длиной  $A = 50$  см и диаметром  $d = 6$  см и соленоид длиной  $a = 4$  см и диаметром  $D = 8$  см коаксиальны и имеют общий центр (рис. 7-2, б). Числа витков соленоидов равны соответственно  $w = 500$  и  $W = 200$ . Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.**

1. Применяем формулу (7-9). В данном случае  $\delta = 0,75$ ;  $l_1^2 = 0,745$  см<sup>2</sup>;  $l_2^2 = 545$  см<sup>2</sup>;

$$\lambda_1^2 = 16/745 = 0,02148; \quad \lambda_2^2 = 16/545 = 0,02936.$$

По табл. 7-1 находим  $F_1 = 0,99997$  и  $F_2 = 0,99994$ .

Следовательно,

$$l_1 F_1 = 27,294; \quad l_2 F_2 = 23,344; \quad l_1 F_1 - l_2 F_2 = 3,950;$$

$$M = \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{36}{50 \cdot 4} \cdot 500 \cdot 200 \cdot 3,950 = 7,017 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

2. Так как в данном случае длина одного соленоида во много раз меньше длины другого, то можно применить формулу (7-12). В соответствии с принципом взаимной замены длин определяем величины  $b$  и  $B$  по формулам (7-13):

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 16} = \sqrt{13} \text{ см;}$$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + A} = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 2500} = \sqrt{641} \text{ см.}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{8} \frac{D^2 b^2}{B^4} = 2,53 \cdot 10^{-4}; \quad \beta^2 = \frac{b^2}{B^2} = \frac{13}{641} = 0,02028.$$

По табл. 7-3 при  $\gamma^2 = d^2/(4b^2) = 36/52 = 0,6923$  находим  $\xi_2 = -0,2115$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi}{8} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 200 \frac{36}{\sqrt{641}} \cdot 10^{-2} (1 + 2,53 \cdot 0,2115 \cdot 10^{-4}) = \\ &= \frac{\pi^2 \cdot 18}{\sqrt{641}} \cdot 10^{-4} \cdot 1,0001 = 7,020 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.} \end{aligned}$$

В данном случае выражение, стоящее в квадратных скобках, отличается от единицы только на 0,0001. Поэтому его можно было бы принять равным единице и вовсе не вычислять  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$  и  $\xi_2$ .

#### 7.4. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДОВ ОДИНАКОВОГО ДИАМЕТРА

Определение взаимной индуктивности двух коаксиальных соленоидов, имеющих одинаковый диаметр  $d$  (рис. 7-3, а), может быть сведено к определению собственных индуктивностей четырех соленоидов того же диаметра.

Если соленоиды 1 и 3 имеют одинаковое число витков на единицу длины, т. е. если  $w/a = W/A$ , где  $w$  и  $W$  — числа витков соленоидов, а  $a$  и  $A$  — их длины, то взаимная индуктивность соленоидов

$$\begin{aligned} M_{13} &= \frac{1}{2} (L_{123} + L_2 - \\ &- L_{12} - L_{23}), \quad (7-15) \end{aligned}$$

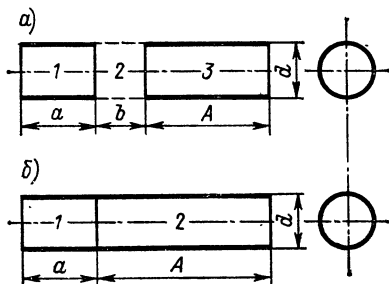


Рис. 7-3

где  $L_3$  — собственная индуктивность фиктивного соленоида длиной  $b$ , имеющего тот же диаметр и то же число витков на единицу длины, что и данные соленоиды;  $L_{123}$ ,  $L_{12}$  и  $L_{23}$  — собственные индуктивности соленоидов, составленных соответственно из соленоидов 1, 2 и 3; 1 и 2; 2 и 3.

Величины  $L_{123}$ ,  $L_2$ ,  $L_{12}$  и  $L_{23}$  могут быть определены так, как указано в § 6-2.

Если отношения  $w/a$  и  $W/A$  не равны друг другу, то сначала определяют взаимную индуктивность, приняв их равными единице, а затем полученный результат умножают на  $wW/(aA)$ .

Пользуясь для определения собственных индуктивностей формулой (6-2), можно вместо (7-15) написать

$$M_{13} = \frac{\pi}{8} \mu_0 w W \frac{d^2}{aA} [(a + b + A) K_{a123} + bK_{a2} - (a + b) K_{a12} - (b + A) K_{a23}], \quad (7-16)$$

где  $K_{a123}$ ,  $K_{a2}$ ,  $K_{a12}$ ,  $K_{a23}$  — значения коэффициента  $K_a$ , данного в табл. 6-2, при длине, равной соответственно  $a + b + A$ ,  $b$ ,  $a + b$ ,  $b + A$ .

Формулы (7-15) и (7-16) справедливы и в том частном случае, когда соленоиды примыкают друг к другу (рис. 7-3, б). В этом случае они приобретают более простой вид:

$$M_{12} = \frac{1}{2} (L_{12} - L_1 - L_2); \quad (7-17)$$

$$M_{12} = \frac{\pi}{8} \mu_0 w W \frac{d^2}{aA} [(a + A) K_{a12} - aK_{a1} - AK_{a2}], \quad (7-18)$$

причем обозначения аналогичны обозначениям в формуле (7-16).

Для проверки расчетов, выполненных указанным способом, можно применить общую формулу (7-19) следующего параграфа, взяв значения  $F$  из табл. 7-4.

**Пример 7-4.** Два одинаковых коаксиальных соленоида диаметром  $d = 10$  см и длиной  $a = 1$  см расположены так, что расстояние между их центрами равно  $x = 2$  см. Каждый из соленоидов имеет  $w = 10$  витков. Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.**

1. Применяем формулу (7-16), полагая в ней  $K_{a12} = K_{a23}$ .

Для катушки 2 имеем  $a_2 = 1$  см,  $a_2/d = 0,1$  и из табл. 6-2 находим  $K_{a2} = 0,0203324$ . Аналогично для катушки 12 находим  $a_{12} = 2$  см,  $a_{12}/d = 0,2$ ,  $K_{a12} = 0,319825$ ; для катушки 123 находим  $a_{123} = 3$  см,  $a_{123}/d =$

**Таблица 7-4. Значения  $F$  в формуле (7-19) для коаксиальных соленоидов одинакового диаметра**

$\lambda^2$	$F$	$\lambda^2$	$F$	$\lambda^2$	$F$	$\lambda^2$	$F$
0,00	1,000000	0,25	0,992815	0,50	0,971802	0,75	0,933448
01	0,999987	26	992244	51	970649	76	931397
02	999950	27	991650	52	969469	77	929294
03	999889	28	991035	53	968262	78	927135
0,04	0,999804	0,29	0,990399	0,54	0,967027	0,79	0,924918
0,05	0,999695	0,30	0,989742	0,55	0,965763	0,80	0,922639
06	999562	31	989062	56	964471	81	920297
07	999407	32	988360	57	963149	82	917886
08	999228	33	987637	58	961798	83	915403
0,09	0,999026	0,34	0,986891	0,59	0,960416	0,84	0,912843
0,10	0,998802	0,35	0,986123	0,60	0,959002	0,85	0,910202
11	998556	36	985332	61	957558	86	907472
12	998287	37	984520	62	956080	87	904648
13	997996	38	983684	63	954570	88	901721
0,14	0,997684	0,39	0,982826	0,64	0,953024	0,89	0,898683
0,15	0,997349	0,40	0,981944	0,65	0,951443	0,90	0,895522
16	996992	41	981039	66	949826	91	892225
17	996614	42	980110	67	948172	92	888774
18	996214	43	979158	68	946480	93	885151
0,19	0,995793	0,44	0,978182	0,69	0,944748	0,94	0,881327
0,20	0,995351	0,45	0,977181	0,70	0,942975	0,95	0,877266
21	994886	46	976156	71	941161	96	872917
22	994401	47	975106	72	939302	97	868201
23	993894	48	974031	73	937398	98	862983
24	993366	49	972930	74	935448	0,99	856980
0,25	0,992815	0,50	0,971802	0,75	0,933448	1,00	0,848826

$= 0,3$ ,  $K_{a123} = 0,405269$ . Подставляя найденные значения в формулу (7-16), получаем

$$M_{13} = \frac{\pi}{8} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \frac{100}{1 \cdot 1} (1,215807 + 0,203324 - 1,279300) \cdot 10^{-2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 0,139831 = 6,9003 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

2. Применяем общую формулу (7-19). В данном случае

$$x_1 = 3 \text{ см}; \quad x_2 = x_3 = 2 \text{ см}; \quad x_4 = 1 \text{ см};$$

$$l_1^2 = 34 \text{ см}^2; \quad l_2^2 = l_3^2 = 29 \text{ см}^2; \quad l_4^2 = 26 \text{ см}^2;$$

$$\lambda_1^2 = 0,73529; \quad \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 0,86207; \quad \lambda_4^2 = 0,96154.$$

По табл. 7-4 находим

$$F_1 = 0,93637; \quad F_2 = F_3 = 0,90690; \quad F_4 = 0,87222;$$

$$l_1 F_1 = 5,45994; \quad l_2 F_2 = l_3 F_3 = 4,88378; \quad l_4 F_4 = 4,44746.$$

Подставляя эти значения в формулу (7-19), имеем

$$M = \frac{\pi}{8} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \frac{100}{1 \cdot 1} (9,90740 - 9,76757) \cdot 10^{-2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 0,13983 = 6,9003 \cdot 10^{-6} \text{ Гн},$$

что совпадает с предыдущим результатом. Следует заметить, что в обоих случаях формулы содержат разности близких величин.

## 7-5. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОАКСИАЛЬНЫХ СОЛЕНОИДОВ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

**1. Расчет по таблицам.** Взаимная индуктивность коаксиальных соленоидов в общем случае может быть найдена по формуле

$$M = \frac{\pi}{8} \mu_0 w W \frac{d^2}{aA} (l_1 F_1 - l_2 F_2 - l_3 F_3 + l_4 F_4), \quad (7-19)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(D/2)^2 + x_1^2}; & l_2 &= \sqrt{(D/2)^2 + x_2^2}; \\ l_3 &= \sqrt{(D/2)^2 + x_3^2}; & l_4 &= \sqrt{(D/2)^2 + x_4^2}; \end{aligned} \right\} \quad (7-20)$$

где  $D$  и  $d$  — диаметры соленоидов;  $A$  и  $a$  — их длины;

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + \frac{A+a}{2}; & x_2 &= x - \frac{A-a}{2}; \\ x_3 &= x + \frac{A-a}{2}; & x_4 &= x - \frac{A+a}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (7-21)$$

$x$  — расстояние между центрами соленоидов (рис. 7-4);  $F_1, F_2, F_3, F_4$  — значения функции  $F$ , данной в табл. 7-1

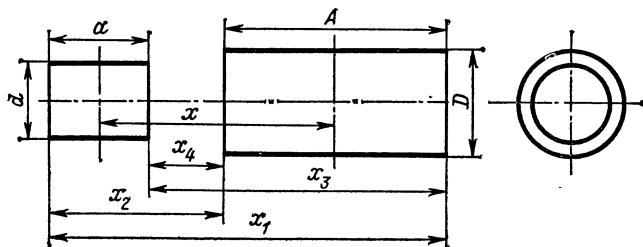


Рис. 7-4



и 7-2, при  $\delta = d/D$  и отношении  $\lambda = D/(2l)$ , равно соответственно

$$\lambda_1 = D/(2l_1); \lambda_2 = D/(2l_2); \lambda_3 = D/(2l_3); \lambda_4 = D/(2l_4).$$

Для частного случая, когда соленоиды имеют одинаковый диаметр ( $\delta = 1$ ), значения  $F$  лучше брать не из табл. 7-1, а из табл. 7-4.

Формула (7-19) становится неудобной для соленоидов, удаленных друг от друга на расстояние, значительное по сравнению с их размерами, так как в этом случае в скобках содержится разность близких величин и точность результата много ниже точности, с которой вычисляются отдельные члены. Указанной трудности можно избежать, представив формулу (7-19) в виде

$$M = \frac{\pi}{8} \mu_0 \omega W \frac{d^2}{aA} [(l_1 + l_4) - (l_2 + l_3) - (l_1 \gamma_1 + l_4 \gamma_4) + (l_2 \gamma_2 + l_3 \gamma_3)], \quad (7-22)$$

где  $\gamma_1 = 1 - F_1$ ;  $\gamma_2 = 1 - F_2$ ;  $\gamma_3 = 1 - F_3$ ;  $\gamma_4 = 1 - F_4$ .

В последней формуле величины, стоящие в первых двух круглых скобках, могут быть вычислены с любой степенью точности, так что погрешность формулы определяется лишь неточностью в определении величин, стоящих в третьей и четвертой скобках, сумма которых значительно меньше суммы первых двух.

**2. Аналитический расчет.** В тех случаях, когда необходимо иметь общее аналитическое выражение взаимной индуктивности коаксиальных соленоидов, а также для проверки значений, полученных по формуле (7-19), можно пользоваться формулой

$$M = \frac{\pi}{8} \mu_0 \omega W \frac{d^2}{A} \frac{q_2}{l_2} \left[ 1 - \frac{1}{8} \frac{D^2}{l_2^2} \beta_2^2 (\xi_2 + \xi_4 \eta_2^2 \beta_2^2 + \xi_6 \eta_4^2 \beta_2^4 + \dots) \right] - \\ - \frac{\pi}{8} \mu_0 \omega W \frac{d^2}{A} \frac{q_1}{l_1} \left[ 1 - \frac{1}{8} \frac{D^2}{l_1^2} \beta_1^2 (\xi_2 + \xi_4 \eta_2^2 \beta_1^2 + \xi_6 \eta_4^2 \beta_1^4 + \dots) \right], \quad (7-23)$$

где

$$q_1 = x - \frac{A}{2}; \quad l_1 = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + q_1^2}; \quad \beta_1 = \frac{b}{l_1};$$

$$q_2 = x + \frac{A}{2}; \quad l_2 = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + q_2^2}; \quad \beta_2 = \frac{b}{l_2}; \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + a^2};$$

$x$  — расстояние между центрами соленоидов;  $\xi$ ,  $\eta'$  и  $\eta''$  — величины, получаемые из функций  $\Phi(\gamma)$ , данных в § 7-3, путем подстановки вместо  $\gamma$  соответственно  $d/(2b)$ ,  $D/(2l_1)$  и  $D/(2l_2)$ .

Значения  $\xi$ ,  $\eta'$  и  $\eta''$  можно взять из табл. 7-3.

При  $x = 0$ , т. е. для концентрических соленоидов, формула (7-23) переходит в формулу (7-12).

Для соленоидов с малым коэффициентом связи, т. е. при  $x$ , значительно превышающем размеры соленоидов, формула (7-23) содержит разности близких величин и для расчета неудобна. В этом случае можно пользоваться формулой

$$M = \frac{\pi}{32} \mu_0 w W \frac{D^2 d^2}{q_1^2 q_2^2} x \left[ 1 + 2 \left( \xi_2 - \frac{3}{4} \Delta^2 \right) (1 + \alpha^2) \theta^2 + \right. \\ \left. + 3 \left( \xi_4 - \frac{5}{2} \xi_2 \Delta^2 + \frac{5}{8} \Delta^4 \right) \left( 1 + \frac{10}{3} \alpha^2 + \alpha^4 \right) \theta^4 + \right. \\ \left. + 4 \left( \xi_6 - \frac{21}{4} \xi_4 \Delta^2 + \frac{35}{8} \xi_2 \Delta^4 - \frac{35}{64} \Delta^6 \right) (1 + 7\alpha^2 + 7\alpha^4 + \alpha^6) \theta^6 \right], \quad (7-24)$$

где

$$\Delta = D/(2b); \quad a = A/(2x); \quad \theta = bx/(q_1 q_2), \quad (7-25)$$

а прочие обозначения те же, что и в формуле (7-23). Сходимость формулы (7-24) тем лучше, чем меньше величина  $\theta$ , т. е. чем больше расстояние  $x$  по сравнению с размерами соленоидов.

**Пример 7-5.** Соленоид диаметром  $D = 50$  см и длиной  $A = 16$  см и соленоид диаметром  $d = 40$  см и длиной  $a = 10$  см имеют общую ось, и их центры расположены на расстоянии  $x = 10$  см друг от друга. Числа витков соленоидов равны соответственно  $W = 100$  и  $w = 320$ . Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.**

1. Применяем формулу (7-19). В данном случае

$$x_1 = 23 \text{ см}; \quad x_2 = 7 \text{ см}; \quad x_3 = 13 \text{ см}; \quad x_4 = -3 \text{ см}; \\ l_1^2 = 1154 \text{ см}^2; \quad l_2^2 = 674 \text{ см}^2; \quad l_3^2 = 794 \text{ см}^2; \quad l_4^2 = 634 \text{ см}^2; \\ \lambda_1^2 = 0,54159; \quad \lambda_2^2 = 0,92730; \quad \lambda_3^2 = 0,78715; \quad \lambda_4^2 = 0,98580.$$

По табл. 7-1 находим

$$F_1 = 0,97794; \quad F_2 = 0,928135; \quad F_3 = 0,95126; \quad F_4 = 0,91489; \\ l_1 F_1 = 32,221; \quad l_2 F_2 = 24,096; \quad l_3 F_3 = 26,805; \quad l_4 F_4 = 23,036.$$

Подставляя найденные значения в формулу (7-19), получаем

$$M = \frac{\pi}{8} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 320 \frac{1600}{16 \cdot 10} (56,257 - 50,901) \cdot 10^{-2} = 8,458 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

2. Применяем формулу (7-23). В данном случае  $b = 0,2062$  м;

$$q_1 = 0,0200 \text{ м}; \quad l_1 = 0,2508 \text{ м}; \quad \beta_1 = 0,8222; \\ q_2 = 0,1800 \text{ м}; \quad l_2 = 0,3081 \text{ м}; \quad \beta_2 = 0,6693; \\ \beta_1^2 = 0,6760; \quad \beta_2^2 = 0,4480; \quad \beta_1^3 = 0,4570; \quad \beta_2^4 = 0,2007; \\ l_1^2 = 0,0629 \text{ м}^2; \quad l_2^2 = 0,0949 \text{ м}^2; \\ d/(2b) = 0,9701; \quad d/(2l_1) = 0,9968; \quad d/(2l_2) = 0,8114; \\ \left( \frac{d}{2b} \right)^2 = 0,9411; \quad \left( \frac{d}{2l_1} \right)^2 = 0,9936; \quad \left( \frac{d}{2l_2} \right)^2 = 0,6584.$$

По табл. 7-3 находим

$$\xi_2 = -0,6470; \quad \xi_4 = 0,4184; \quad \xi_6 = -0,2450;$$

$$\eta_2' = -0,7388; \quad \eta_2'' = -0,1522; \quad \eta_4' = 0,6013; \quad \eta_4'' = -0,1746.$$

Подставляя найденные значения в формулу (7-23), имеем

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi}{8} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 320 \frac{0,16}{0,16} \frac{0,1800}{0,3081} \left[ 1 - \frac{1}{8} \frac{0,25}{0,0949} \cdot 0,4480 \times \right. \\ &\times (-0,6470 - 0,0285 + 0,0086) \left. \right] - \frac{\pi}{8} 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 320 \frac{0,16}{0,16} \times \\ &\times \frac{0,0200}{0,2508} \left[ 1 - \frac{1}{8} \frac{0,25}{0,0629} \cdot 0,6760 (-0,6470 - 0,2090 - 0,0673) \right] = \\ &= (1,0130 - 0,1650) \cdot 10^{-2} = 0,8480 \cdot 10^{-2} = 8,480 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.} \end{aligned}$$

Как видно из приведенных расчетов, ряды, входящие в формулу (7-23), в данном случае сходятся медленно. При этих условиях расчет по формуле (7-23), как менее точный и более громоздкий, чем расчет по формуле (7-19), следует признать нецелесообразным.

**Пример 7-6.** Соленоид диаметром  $D = 6$  см и длиной  $A = 6$  см и коаксиальный с ним соленоид диаметром  $d = 4$  см и длиной  $a = 10$  см расположены так, что расстояние между их центрами равно  $x = 18$  см. Числа витков соленоидов равны соответственно  $W = 100$  и  $w = 60$ . Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.**

1. Так как расстояние между центрами соленоидов превышает их длины и, следовательно, коэффициент связи соленоидов мал, то для определения взаимной индуктивности пользуемся формулой (7-22). В данном случае

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,26 \text{ м}; & x_2 &= 0,16 \text{ м}; & x_3 &= 0,20 \text{ м}; & x_4 &= 0,10 \text{ м}; \\ l_1^2 &= 0,0685 \text{ м}^2; & l_2^2 &= 0,0265 \text{ м}^2; & l_3^2 &= 0,0409 \text{ м}^2; & l_4^2 &= 0,0109 \text{ м}^2; \\ l_1 &= 0,261725 \text{ м}; & l_2 &= 0,162788 \text{ м}; & l_3 &= 0,202237 \text{ м}; & l_4 &= 0,104403 \text{ м}; \\ \lambda_1^2 &= 0,01314; & \lambda_2^2 &= 0,03396; & \lambda_3^2 &= 0,02201; & \lambda_4^2 &= 0,08259. \end{aligned}$$

По табл. 7-1 при  $\delta = 0,6667$  находим

$$\gamma_1 = 1 - F_1 = 3,6 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_2 = 1 - F_2 = 8,3 \cdot 10^{-5};$$

$$\gamma_3 = 1 - F_3 = 6,0 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_4 = 1 - F_4 = 4,04 \cdot 10^{-4};$$

Таким образом,

$$l_1 + l_4 = 0,366128 \quad l_1 \gamma_1 = 0,95 \cdot 10^{-5} \quad l_2 \gamma_2 = 1,35 \cdot 10^{-5}$$

$$\begin{array}{ccc} l_2 + l_3 = 0,365025 & l_4 \gamma_4 = 4,20 \cdot 10^{-5} & l_3 \gamma_3 = 1,21 \cdot 10^{-5} \\ \hline 0,001103 & 5,15 \cdot 10^{-5} & 2,56 \cdot 10^{-5} \end{array}$$

$$0,001103 - 0,000052 + 0,000026 = 0,001077;$$

$$M = \frac{\pi}{8} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 60 \frac{16}{6 \cdot 10} \cdot 1,077 \cdot 10^{-3} = 8,504 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

2. Для определения взаимной индуктивности рассматриваемых соленоидов можно применить и формулу (7-24). В данном случае

$$q_1 = 0,15 \text{ м}; \quad q_2 = 0,21 \text{ м}; \quad b^2 = 29 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad \Delta^2 = 9/29;$$

$$\alpha = 1/6; \quad \theta^2 = 0,09469.$$

При  $\left(\frac{d}{2b}\right)^2 = \frac{4}{29} = 0,1379$  по табл. 7-3 находим

$$\xi_2 = 0,75862; \quad \xi_4 = 0,4578; \quad \xi_6 = 0,1728.$$

Подставляя найденные значения в формулу (7-24), имеем

$$M = \frac{\pi}{32} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 60 \frac{36 \cdot 16}{225 \cdot 441} \cdot 0,18 (1 + 0,10236 - 0,00208 - 0,00110) =$$

$$= 8,5017 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

## 7-6. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДА И КРУГОВОГО КОНТУРА

Из принципа взаимной замены длин (§ 7-1) следует, что взаимная индуктивность соленоида и витка для обоих случаев, представленных на рис. 7-5, а, б, одинакова. Поэтому приводимые ниже формулы в равной мере относятся к обоим этим случаям, причем через  $D$  всюду обозначен б о л ь ш и й из двух диаметров.

1. Соленоид и контур, лежащий в торцевой плоскости соленоида ( $x = 0$ ). Взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{4} \mu_0 W d \delta \beta F, \quad (7\ 26)$$

где  $W$  — число витков соленоида;

$$\delta = \frac{d}{D} < 1; \quad \beta^2 = \frac{D^2}{D^2 + 4A^2}; \quad (7-27)$$

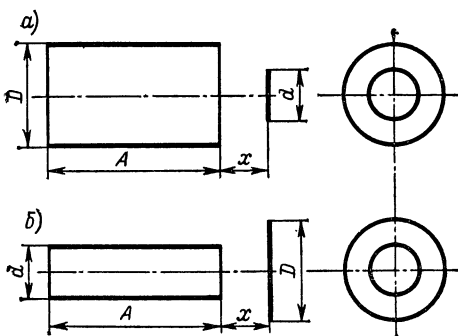


Рис. 7-5

$A$  — длина соленоида;  $F$  — величина, значения которой даны в табл. 7-5 в зависимости от параметров  $\delta$  и  $\beta^2$ .

Интерполирование по табл. 7-5 неточно в области, где  $\delta$  и  $\beta$  близки к единице. В этом случае вместо формулы (7-26) удобнее пользоваться формулой

$$M = \frac{\mu_0}{4} W \sqrt{Dd} k \left( \ln \frac{16}{\xi^2 + \gamma^2} - 2 \frac{\gamma}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\gamma} - 2 \right), \quad (7-28)$$

где

$$\gamma^2 = \frac{(1 - \delta)^2}{4\delta}; \quad \xi^2 = \frac{1 - \beta^2}{4\delta\beta^2}, \quad (7-29)$$

а  $k$  — коэффициент, значения которого даны в табл. 7-6 в зависимости от  $\gamma^2$  и  $\xi^2$ .

Для аналитического расчета взаимной индуктивности короткого соленоида и кругового контура можно применять формулу

$$\begin{aligned} M = \frac{\mu_0}{4} W \sqrt{Dd} \left\{ \left[ 1 + \frac{3}{4} \gamma^2 - \frac{15}{64} \gamma^4 + \frac{35}{256} \gamma^6 + \frac{\alpha^2}{4} \left( 1 - \frac{5}{8} \gamma^2 + \frac{35}{64} \gamma^4 \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{3}{64} \alpha^4 \left( 1 - \frac{7}{4} \gamma^2 \right) + \frac{5}{256} \alpha^6 \dots \right] \ln \frac{16}{\gamma^2 + \alpha^2} - \\ \left. - 2 \frac{\gamma}{\alpha} \left( 1 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^4}{8} + \frac{\gamma^6}{16} \right) \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\gamma} + \right. \\ \left. + \left( -2 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{15}{64} \gamma^4 - \frac{151}{768} \gamma^6 \right) + \alpha^2 \left( \frac{\gamma^2}{4} - \frac{209}{768} \gamma^4 \right) + \right. \\ \left. + \alpha^4 \left( \frac{5}{64} - \frac{43}{256} \gamma^2 \right) - \frac{31}{768} \alpha^6 \dots \right\}, \quad (7-30) \end{aligned}$$

где  $\alpha = A/\sqrt{Dd}$ , а  $\gamma$  — то же, что и в предыдущей формуле.

Для длинного соленоида удобна формула

$$\begin{aligned} M = \frac{\pi}{4} \mu_0 W d \beta \delta \left[ 1 + \frac{3}{8} \beta^4 \delta^2 - \frac{5}{16} \beta^6 \delta^4 + \frac{35}{64} \beta^8 \delta^4 \left( 1 + \frac{\delta^2}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{315}{256} \beta^{10} \delta^6 \left( 1 + \frac{\delta^2}{5} \right) + \frac{231}{1024} \beta^{12} \delta^6 (5 + 9\delta^2 + \delta^4) \dots \right], \quad (7-31) \end{aligned}$$

где по-прежнему

$$\delta = \frac{d}{D} \quad \text{и} \quad \beta^2 = \frac{D^2}{D^2 + 4A^2}. \quad (7-32)$$

**2. Соленоид и контур, расположенный на расстоянии  $x$  от ближайшей к нему торцевой плоскости соленоида (рис. 7-5).** Взаимная индуктивность

$$M = M_{x+A} - M_x, \quad (7-33)$$

где  $M_{x+A}$  — взаимная индуктивность соленоида длиной  $x + A$  и контура, лежащего в его торцевой плоскости;  $M_x$  — то же для соленоида длиной  $x$ , причем предполагается, что оба соленоида имеют такое же число витков на единицу длины, как и данный соленоид длиной  $A$ .

Таблица 7-5. Значения  $F$  в формуле (7-26) для солониды и кругового контура

$\beta^2$	$\delta = 0$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	$\delta = 0,50$	$\beta^2$
0,00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,00
0,05	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0001	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	0,05
10	1	1,0000	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0003	1,0004	1,0006	1,0008	1,0009	10
15	1	1,0000	1,0001	1,0002	1,0004	1,0006	1,0008	1,0010	1,0013	1,0016	1,0020	15
0,20	1	1,0000	1,0002	1,0004	1,0006	1,0010	1,0014	1,0018	1,0024	1,0030	1,0036	0,20
0,25	1	1,0001	1,0003	1,0005	1,0009	1,0014	1,0021	1,0029	1,0038	1,0046	1,0057	0,25
30	1	1,0001	1,0004	1,0007	1,0013	1,0021	1,0030	1,0041	1,0053	1,0067	1,0082	30
35	1	1,0001	1,0005	1,0010	1,0018	1,0028	1,0041	1,0056	1,0072	1,0091	1,0111	35
40	1	1,0002	1,0006	1,0014	1,0024	1,0037	1,0054	1,0072	1,0094	1,0119	1,0146	40
0,45	1	1,0002	1,0008	1,0017	1,0030	1,0047	1,0068	1,0092	1,0120	1,0152	1,0186	0,45
0,50	1	1,0002	1,0010	1,0021	1,0037	1,0058	1,0084	1,0114	1,0148	1,0188	1,0231	0,50
55	1	1,0003	1,0012	1,0026	1,0045	1,0071	1,0102	1,0138	1,0180	1,0228	1,0282	55
60	1	1,0003	1,0014	1,0031	1,0054	1,0084	1,0122	1,0166	1,0216	1,0274	1,0338	60
65	1	1,0004	1,0016	1,0036	1,0064	1,0100	1,0144	1,0196	1,0256	1,0325	1,0402	65
0,70	1	1,0004	1,0018	1,0042	1,0074	1,0116	1,0167	1,0228	1,0300	1,0382	1,0473	0,70
0,75	1	1,0005	1,0021	1,0048	1,0085	1,0133	1,0193	1,0264	1,0348	1,0444	1,0552	0,75
80	1	1,0006	1,0024	1,0054	1,0097	1,0152	1,0221	1,0303	1,0400	1,0512	1,0640	80
85	1	1,0006	1,0027	1,0061	1,0110	1,0173	1,0251	1,0345	1,0458	1,0588	1,0739	85
90	1	1,0007	1,0030	1,0069	1,0124	1,0195	1,0284	1,0392	1,0522	1,0673	1,0850	90
0,95	1	1,0008	1,0034	1,0077	1,0139	1,0218	1,0320	1,0442	1,0592	1,0768	1,0976	0,95
1,00	1	1,0009	1,0038	1,0086	1,0154	1,0244	1,0358	1,0498	1,0668	1,0873	1,1117	1,00

Продолжение табл. 7-5

$\beta^2$	$\delta = 0,50$	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	$\delta = 1,00$	$\beta^2$
0,00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,00
0,05	1,0002	1,0002	1,0003	1,0004	1,0005	1,0005	1,0006	1,0007	1,0008	1,0008	1,0009	0,05
10	1,0009	1,0011	1,0013	1,0016	1,0018	1,0020	1,0023	1,0026	1,0029	1,0032	1,0035	10
15	1,0020	1,0024	1,0029	1,0034	1,0040	1,0046	1,0051	1,0057	1,0063	1,0070	1,0077	15
0,20	1,0036	1,0044	1,0052	1,0061	1,0070	1,0080	1,0090	1,0101	1,0112	1,0123	1,0135	0,20
0,25	1,0057	1,0068	1,0081	1,0094	1,0108	1,0124	1,0140	1,0156	1,0172	1,0190	1,0208	0,25
30	1,0082	1,0098	1,0116	1,0136	1,0156	1,0178	1,0200	1,0224	1,0248	1,0273	1,0299	30
35	1,0111	1,0134	1,0158	1,0185	1,0213	1,0242	1,0272	1,0304	1,0337	1,0372	1,0406	35
40	1,0146	1,0176	1,0208	1,0242	1,0279	1,0317	1,0358	1,0400	1,0443	1,0488	1,0534	40
0,45	1,0186	1,0224	1,0264	1,0308	1,0355	1,0404	1,0456	1,0510	1,0566	1,0623	1,0683	0,45
0,50	1,0231	1,0278	1,0330	1,0384	1,0444	1,0506	1,0571	1,0640	1,0710	1,0784	1,0858	0,50
55	1,0282	1,0340	1,0404	1,0471	1,0544	1,0622	1,0704	1,0790	1,0878	1,0970	1,1064	55
60	1,0338	1,0410	1,0487	1,0570	1,0660	1,0756	1,0857	1,0964	1,1076	1,1189	1,1305	60
65	1,0402	1,0488	1,0582	1,0683	1,0792	1,0910	1,1036	1,1168	1,1304	1,1446	1,1593	65
0,70	1,0473	1,0575	1,0688	1,0812	1,0945	1,1089	1,1242	1,1405	1,1576	1,1754	1,1941	0,70
0,75	1,0552	1,0674	1,0810	1,0960	1,1124	1,1301	1,1491	1,1693	1,1908	1,2134	1,2372	0,75
80	1,0640	1,0785	1,0947	1,1126	1,1324	1,1545	1,1786	1,2044	1,2320	1,2612	1,2922	80
85	1,0739	1,0911	1,1106	1,1324	1,1568	1,1843	1,2150	1,2490	1,2864	—	—	85
90	1,0850	1,1054	1,1289	1,1558	1,1866	1,2220	1,2623	1,3080	1,3589	1,4150	1,4763	90
0,95	1,0976	1,1216	1,1502	1,1842	1,2245	—	—	—	—	—	—	0,95
1,00	1,1117	1,1403	1,1752	1,2157	1,2733	1,3630	1,4978	—	1,7430	—	$\infty$	1,00

**Таблица 7-6. Значения  $k$  в формуле (7-28) для соленоида и кругового контура**

$\gamma^2$	$\xi^2 = 0$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	$\xi^2 = 0,06$
0,000	1,0000	1,0036	1,0071	1,0110	1,0149	1,0190	1,0232
005	1,0070	1,0116	1,0165	1,0213	1,0263	1,0314	1,0365
010	1,0148	1,0204	1,0261	1,0318	1,0375	1,0433	1,0492
015	1,0237	1,0299	1,0362	1,0424	1,0487	1,0551	1,0616
020	1,0334	1,0400	1,0468	1,0535	1,0604	1,0672	1,0742
025	1,0438	1,0508	1,0580	1,0653	1,0726	1,0800	1,0875
030	1,0548	1,0625	1,0702	1,0780	1,0858	1,0938	1,1018
035	1,0666	1,0748	1,0830	1,0913	1,0996	1,1081	1,1168
0,040	1,0791	1,0878	1,0965	1,1055	1,1142	1,1232	1,1324

$\gamma^2$	$\xi^2=0,06$	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	$\xi^2 = 0,12$
0,000	1,0232	1,0274	1,0318	1,0362	1,0408	1,0454	1,0500
005	1,0365	1,0420	1,0471	1,0525	1,0580	1,0636	1,0693
010	1,0492	1,0552	1,0613	1,0674	1,0737	1,0800	1,0866
015	1,0616	1,0682	1,0749	1,0817	1,0886	1,0955	1,1026
020	1,0742	1,0813	1,0886	1,0958	1,1033	1,1108	1,1185
025	1,0875	1,0951	1,1028	1,1107	1,1186	1,1268	1,1349
030	1,1018	1,1100	1,1184	1,1268	1,1354	1,1440	1,1529
035	1,1168	1,1255	1,1344	1,1434	1,1529	1,1619	1,1714
0,040	1,1324	1,1418	1,1512	1,1608	1,1706	1,1806	1,1908

Взаимные индуктивности  $M_{x+A}$  и  $M_x$  могут быть определены так, как указано в предыдущем пункте.

Все формулы настоящего параграфа могут быть использованы и в том случае, когда вместо контура имеется катушка относительно небольшого поперечного сечения. При этом приведенные выше выражения необходимо дополнительно умножить на число витков этой катушки.

**Пример 7-7.** Соленоид диаметром  $D = 10$  см и длиной  $A = 15$  см имеет  $W = 100$  витков. В торцевой плоскости соленоида лежит круговая катушка весьма малого поперечного сечения, имеющая диаметр  $d = 5$  см и  $w = 25$  витков. Центр катушки лежит на оси соленоида. Определить взаимную индуктивность катушки и соленоида.

**Решение.**

1. Применяем формулу (7-26). В данном случае  $\delta = 0,5$  и  $\beta^2 = 0,1$ ;  $\beta = 0,3162$ .

По табл. 7-5 находим  $F = 1,001$ , и, следовательно,

$$M = \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 25 \cdot 0,05 \cdot 0,3162 \cdot 0,5 \cdot 1,001 = 1,953 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$



2. Применяем формулу (7-31). В данном случае

$$\beta^2 = 0,1; \quad \beta^4 = 1 \cdot 10^{-2}; \quad \delta^2 = 0,25; \quad \frac{3}{8} \beta^4 \delta^2 = 0,09375 \cdot 10^{-2} \approx 0,001;$$

$$M = \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 25 \cdot 0,05 \cdot 0,3162 \cdot 0,5 (1,000 + 0,001) = 1,953 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Оба результата совпадают.

## 7-7. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ОДИНАКОВЫХ ПЛОСКИХ КАТУШЕК

Взаимная индуктивность одинаковых плоских катушек

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 d \Phi, \quad (7-34)$$

где  $\omega$  — число витков каждой из катушек;  $d$  — ее средний диаметр (рис. 7-6);  $\Phi$  — величина, значения которой могут быть определены из рис. 7-7 по заданным значениям

$$\rho = r/d \text{ и } \xi = x/d, \quad (7-35)$$

причем  $r$  — толщина катушек;  $x$  — расстояние между ними.

При  $\rho \leq 1/2$  и  $\xi \leq 1/3$  более точные значения  $\Phi$  можно найти по формуле

$$\begin{aligned} \Phi = \pi \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{\rho^2}{24} - \frac{15}{64} \xi^4 + \frac{7}{64} \xi^2 \rho^2 + \frac{11}{2880} \rho^4 \dots \right) \ln \frac{16}{\xi^2 + \rho^2} + \right. \\ \left. + \left( 1 + \frac{5}{8} \xi^2 - \frac{161}{576} \xi^4 + \frac{5}{8} \xi^2 \rho^2 \dots \right) \frac{\xi^2}{\rho^2} \ln \frac{\xi^2 + \rho^2}{\xi^2} - \right. \\ \left. - 4 \left( 1 + \frac{2}{3} \xi^2 - \frac{2}{5} \xi^2 - \frac{2}{6} \xi^2 \rho^2 \dots \right) \frac{\xi}{\rho} \operatorname{arctg} \frac{\rho}{\xi} - 1 + \frac{37}{24} \xi^2 + \right. \\ \left. + \frac{43}{144} \rho^2 - \frac{301}{360} \xi^4 - \frac{\xi^2 \rho^2}{720} + \frac{\rho^4}{75} + \dots \right]. \quad (7-36) \end{aligned}$$

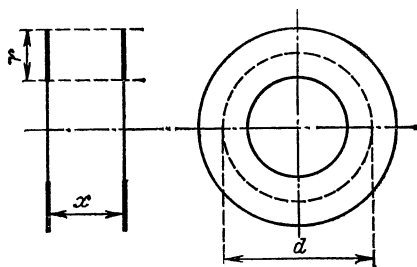


Рис. 7-6

Формулы настоящего параграфа применимы не только к плоским катушкам, т. е. катушкам, аксиальный размер которых  $a$  равен нулю, но и к весьма коротким катушкам, для которых отношение  $a/d$  много меньше единицы.

**Пример 7-8.** Две одинаковые плоские катушки со средним диаметром  $d = 60$  см и

толщиной обмотки  $r = 20$  см имеют по  $\omega = 150$  витков. Катушки коаксиальны и расположены на расстоянии  $x = 15$  см друг от друга. Определить их взаимную индуктивность.

Р е ш е н и е.

1. Применяем формулу (7-34), определяя  $\Phi$  по кривым рис. 7-7. В данном случае  $\rho = 0,3333$ ;  $\xi = 0,25$ ;  $\Phi = 5,0$ . Следовательно,

$$M = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 2,25 \cdot 10^4 \cdot 0,6 \cdot 5,0 = 6,75 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

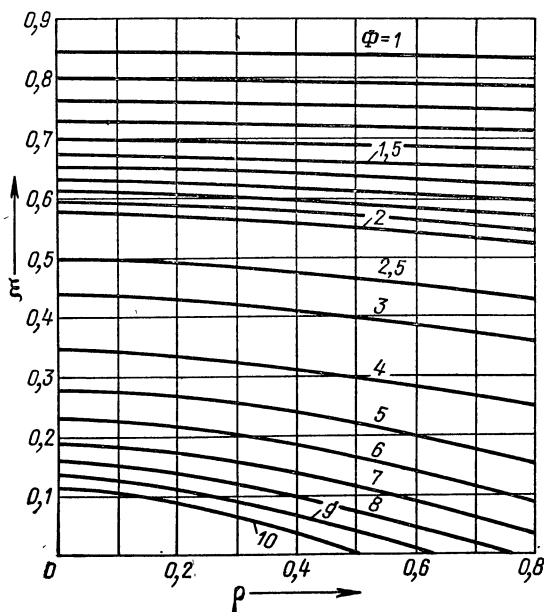


Рис. 7-7

2. Более точное значение  $\Phi$  находим по формуле (7-36):

$$\rho^2 = 0,1111; \quad \xi^2 = 6,25 \cdot 10^{-2}; \quad \ln \frac{16}{\xi^2 + \rho^2} = 4,524; \quad \frac{\rho}{\xi} = 1,333;$$

$$\rho^4 = 0,01235; \quad \xi^4 = 3,906 \cdot 10^{-3}; \quad \ln \frac{\xi^2 + \rho^2}{\xi^2} = 1,021; \quad \operatorname{arctg} \frac{\rho}{\xi} = 0,9276.$$

Подставляя найденные значения в формулу (7-36), получаем

$$\begin{aligned} \Phi = \pi \left[ (1 + 0,047 + 0,001 - 0,001 + 0,001) \cdot 4,524 + \right. \\ \left. + (1 + 0,039) \cdot \frac{0,0625}{0,1111} \cdot 1,021 - 4(1 + 0,042 - 0,002) \times \right. \\ \left. \times \frac{0,25}{0,3333} \cdot 0,9276 - (1 - 0,096 - 0,033 + 0,003) \right] = \end{aligned}$$

$$= \pi (4,740 + 0,597 - 2,894 - 0,874) = \pi \cdot 1,569 = 4,930.$$

Таким образом,

$$M = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 2,25 \cdot 10^4 \cdot 0,6 \cdot 4,930 = 6,656 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Как видно из приведенного расчета, кривые рис. 7-7 дают удовлетворительную для инженерной практики степень точности.

## 7-8. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДА И КОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ С НИМ КАТУШКИ

Взаимная индуктивность соленоида и концентрической с ним катушки

$$M = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{\omega W}{r A a} \left[ \frac{4}{3} (R_1^3 - R_2^3) (b_1 - b_2) + \frac{D^2}{40} (R_1^5 - R_2^5) Q_3 - \right. \\ \left. - \frac{D^2}{112} (R_1^7 - R_2^7) \left( Q_5 - \frac{5D^2}{16} Q_7 \right) + \right. \\ \left. + \frac{5D^2}{1152} (R_1^9 - R_2^9) \left( Q_7 - \frac{7}{8} D^2 Q_9 + \frac{21}{128} D^4 Q_{11} \right) + \dots \right], \quad (7-37)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков катушки и соленоида;  $a$  и  $A$  — их длины;  $D > 2R_1$  — диаметр соленоида;  $R_1$  и  $R_2$  — внешний и внутренний радиусы катушки;  $r = R_1 - R_2$  — радиальная толщина катушки;

$$Q_k = \frac{1}{b_2^k} - \frac{1}{b_1^k} = \frac{b_1^k - b_2^k}{(b_1 b_2)^k}; \quad (7-38)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + (A + a)^2}; \quad b_2 = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + (A - a)^2}. \quad (7-39)$$

В тех случаях, когда  $R_1$  близко к  $R_2$  или  $b_1$  близко к  $b_2$ , целесообразно вынести за скобки разность  $(R_1 - R_2)$  или соответственно  $(b_1 - b_2)$ , пользуясь тождеством

$$x^k - y^k = (x - y) (x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1}). \quad (7-40)$$

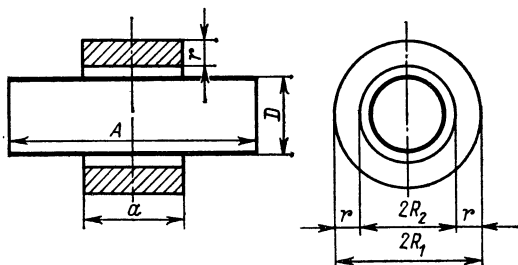


Рис. 7-8

Взаимную индуктивность соленоида и катушки можно определить также приближенно, взяв полусумму взаимных индуктивностей данного соленоида и двух соленоидов длиной  $a$  с диаметрами  $2R_1$  и  $2R_2$ . Такой способ расчета возможен как при  $D > 2R_1$ , так и при  $D < 2R_2$  (рис. 7-8).

## 7-9. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШЕК КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

Катушка квадратного сечения при заданной длине провода и заданном его сечении обладает наибольшей индук-

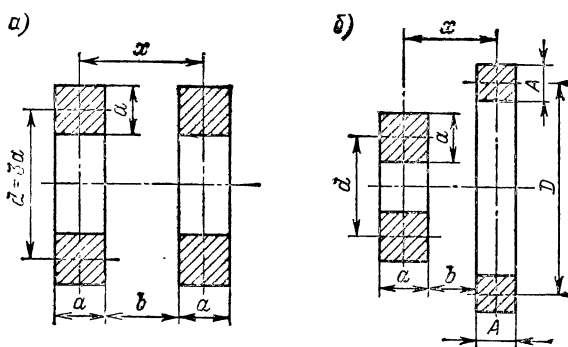


Рис. 7-9

тивностью  $L$ , если отношение среднего диаметра к длине катушки равно трем (точнее, 2,97). Взаимную индуктивность двух таких катушек одного диаметра (рис. 7-9, а) можно найти по формуле

$$M = kL = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 8,497 \omega^2 k d, \quad (7-41)$$

где  $k$  — коэффициент связи катушек;  $L$  — индуктивность одной из них;  $\omega$  — число ее витков;  $d = 3a$  — средний диаметр катушек. Значения коэффициента связи  $k$  даны в табл. 7-7 в зависимости от значений отношения  $b/a = 3b/d$  или обратного отношения  $a/b = d/(3b)$ .

Для катушек, удаленных на значительное расстояние ( $b > 2a$ ), интерполирование по табл. 7-7 неточно. В этом случае для определения взаимной индуктивности можно применить метод эквивалентных круговых контуров (§ 7-12). Заменяя каждую из катушек эквивалентным круговым контуром, имеющим диаметр

$$d_e = d \left( 1 + \frac{a^2}{6d^2} \right) = d \left( 1 + \frac{1}{54} \right) = 1,01852d, \quad (7-42)$$

Таблица 7-7. Значения коэффициента связи квадратных катушек

$b/a$	$k$	$b/a$	$k$	$a/b$	$k$	$a/b$	$k$
0,0	0,5036	0,5	0,3032	1,0	0,19263	0,5	0,08807
0,1	4525	0,6	2758	0,9	17525	0,4	06263
0,2	4077	0,7	2514	0,8	15616	0,3	03770
0,3	3685	0,8	2296	0,7	13526	0,2	01630
0,4	3340	0,9	2101	0,6	11249	0,1	00299
0,5	0,3032	1,0	0,1926	0,5	0,08807	0,0	0,00000

определяют взаимную индуктивность  $M_e$  двух таких контуров, расположенных коаксиально на расстоянии  $x = b + a$  друг от друга, после чего искомую взаимную индуктивность  $M$  находят по формуле

$$M = \omega^2 M_e.$$

Для определения  $M_e$  можно использовать любой из способов, указанных в § 5-7.

Метод эквивалентных круговых контуров можно применить и тогда, когда отношение  $d/a$  не равно трем, а также к неодинаковым катушкам квадратного сечения (рис. 7-9, б). В последнем случае диаметры эквивалентных круговых контуров и расстояние между ними должны быть найдены по формулам:

$$d_e = d \left( 1 + \frac{a^2}{6d^2} \right); \quad D_e = D \left( 1 + \frac{A^2}{6D^2} \right); \quad (7-43)$$

$$x = b + (a + A)/2,$$

а взаимная индуктивность этих контуров  $M_e$  — по формулам § 5-8.

Найдя  $M_e$ , определяют  $M = \omega W M_e$ .

**Пример 7-9.** Две одинаковые катушки с числом витков  $\omega = 100$  имеют длину  $a = 2$  см, толщину  $r = a = 2$  см и средний диаметр  $d = 3a = 6$  см. Катушки коаксиальны, расстояние между их центрами  $x = 3,7$  см. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.**

1. Применяем формулу (7-41). В данном случае

$$b = x - a = 1,70 \text{ см и } b/a = 0,85.$$

По табл. 7-7 находим  $k = 0,2196$ . Следовательно,

$$M = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 8,497 \cdot 100^2 \cdot 0,2196 \cdot 0,06 = 1,120 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

2. Для проверки результата используем метод эквивалентных круговых контуров (§ 7-12). Каждую катушку заменяем эквивалентным круговым контуром, диаметр которого равен

$$d_e = d \left( 1 + \frac{a^2}{6d^2} \right) = d \left( 1 + \frac{1}{54} \right) = \frac{55}{54} d = \frac{55}{54} \cdot 0,06 = \\ = 6,111 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Взаимную индуктивность контуров  $M_e$  определяем по формуле (5-16). В данном случае

$$x/d_e = 0,037/0,06111 = 0,6055$$

и по табл. 5-3 находим  $F = 3,675$ . Следовательно,

$$M_e = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \frac{6,111}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 3,675 = 1,123 \cdot 10^{-8} \text{ Гн;}$$

$$M = \omega^2 M_e = 1,123 \cdot 10^{-4} \text{ Гн,}$$

что почти совпадает с ранее найденным результатом.

## 7-10. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ КАТУШЕК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ, ИМЕЮЩИХ ОДИНАКОВУЮ ДЛИНУ

Определение взаимной индуктивности двух концентрических коаксиальных катушек, имеющих прямоугольное сечение и одинаковую длину (рис. 7-10, а), может быть сведено к определению собственных индуктивностей четырех катушек той же длины.

Если витки обеих катушек уложены с одинаковой плотностью, т. е. если  $\omega/r = W/R$ , где  $\omega$  и  $W$  — числа витков катушек;  $r$  и  $R$  — их толщины, то взаимная индуктивность катушек

$$M_{13} = \frac{1}{2} (L_{123} + L_2 - L_{12} - L_{23}), \quad (7-44)$$

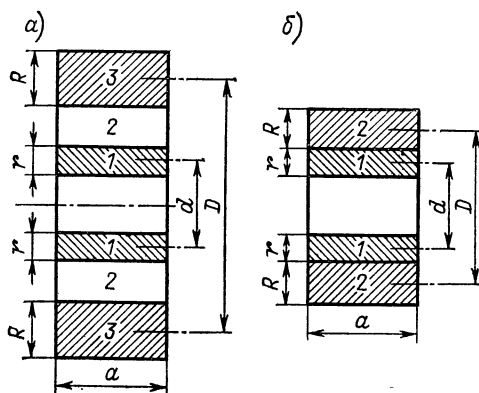


Рис. 7-10

где  $L_2$  — собственная индуктивность фиктивной катушки 2 длиной  $a$  и диаметром  $[D + d - (R - r)]/2$ , имеющей ту же плотность витков, что и данные катушки;  $L_{123}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{23}$  — собственные индуктивности катушек, составленных соответственно из катушек 1, 2 и 3; 1 и 2; 2 и 3.

Величины  $L_{123}$ ,  $L_2$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{23}$  могут быть определены так, как указано в § 6-5 или, для плоских катушек, в § 6-3.

Если отношения  $w/r$  и  $W/R$  не равны друг другу, то сначала определяют взаимную индуктивность ( $M'_{13}$ ), приняв эти отношения равными единице, а затем полученный результат умножают на  $wW/(rR)$ .

Формула (7-44) справедлива и в том частном случае, когда катушки примыкают друг к другу (рис. 7-10, б). В этом случае

$$M_{12} = \frac{1}{2} (L_{12} - L_1 - L_2), \quad (7-45)$$

причем обозначения аналогичны предыдущим.

Указанный метод расчета удобен, когда расстояние между катушками в радиальном направлении одного порядка с толщинами катушек  $r$  и  $R$  или меньше, чем они. Если наоборот, расстояние между катушками значительно больше, чем  $R$  и  $r$ , то формула (7-44) содержит разности близких величин и степень точности, с которой можно определить  $M_{13}$ , значительно ниже той степени точности, с которой определяются отдельные члены в формуле (7-44).

Взаимную индуктивность длинных тонких катушек можно определять по следующей формуле, полученной методом рядов Тейлора (§ 1-11):

$$M = M_0 + \Delta M, \quad (7-46)$$

где  $M_0$  — взаимная индуктивность соответствующих соленоидов, т. е. концентрических соленоидов, имеющих те же числа витков  $w$  и  $W$ , ту же длину  $a$  и те же диаметры  $d$  и  $D$ , что и рассматриваемые катушки, а  $\Delta M$  — поправка, учитывающая изменение взаимной индуктивности, вызванное конечностью толщины катушек.

Величина  $M_0$  может быть найдена так, как указано в § 7-2, а для определения поправки  $\Delta M$  может служить формула

$$\begin{aligned} \Delta M = & \frac{\pi}{48} \mu_0 \frac{wW}{a^2} D d^2 \left[ \frac{r^2}{d^2} \left( 2q_1 + \frac{3}{2} \delta^2 q_3 + \frac{15}{32} \delta^4 q_5 + \right. \right. \\ & + \frac{35}{128} \delta^6 q_7 + \dots \left. \right) + \frac{R^2}{D^2} \left( Q_1 + \frac{\delta^2}{4} Q_3 + \frac{\delta^4}{16} Q_5 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{5}{1024} \delta^6 Q_7 + \dots \right) + \dots \right], \quad (7-47) \end{aligned}$$

где  $\delta = d/D$ ; величины  $q_1, q_2, \dots$  определяются формулами § 7-7, а

$$Q_1 = \gamma - \gamma^3;$$

$$Q_3 = 1 - \gamma^3 + \frac{15}{2} \gamma^5 - \frac{15}{2} \gamma^7;$$

$$Q_5 = 3 + 2\gamma^5 - 40\gamma^7 + \frac{455}{4} \gamma^9 - \frac{315}{4} \gamma^{11};$$

$$Q_7 = 30 - 16\gamma^7 - 616\gamma^9 - 3402\gamma^{11} + 5775\gamma^{13} - 3003\gamma^{15},$$

причем по-прежнему  $\gamma^2 = D^2/(D^2 + 4a^2)$ .

**Пример 7-10.** Две concentрические катушки одинаковой длины  $a = 5$  см имеют средние диаметры, равные соответственно  $D = 20$  см и  $d = 9$  см, причем толщины катушек  $R = 5$  см,  $r = 3$  см. Число витков первой катушки  $W = 30$ , второй  $w = 10$ . Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.** Применяем формулу (7-44). Так как отношения  $w/r$  и  $W/R$  неодинаковы, то сначала определяем  $M'_{13}$ , приняв  $w/r = W/R = 1$ . Тогда формула (6-19) для собственной индуктивности принимает вид

$$L' = \frac{\mu_0}{8\pi} w^2 d \Psi F = \frac{\mu_0}{8\pi} r^2 d \Psi F.$$

По этой формуле находим индуктивность катушки 123. Для нее  $d_{123} = 15,5$  см,  $r_{123} = 9,5$  см,  $a = 5$  см,  $r_{123}/d_{123} = 0,6129$ ,  $a/r_{123} = 0,5263$ . По табл. 6-3 и 6-7 при указанных размерах находим  $\Psi_{123} = 18,39$  и  $F_{123} = 0,7299$ . Следовательно,

$$L'_{123} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8\pi} (0,095)^2 \cdot 0,155 \cdot 18,39 \cdot 0,7299 = 9,385 \cdot 10^{-10}.$$

Аналогично определяем  $L'_2$ ,  $L'_{12}$  и  $L'_{23}$ . Результаты расчета сводим в таблицу:

Катушка	$d$ , см	$r$ , см	$r/d$	$a/r$	$\Psi$	$F$	$L \cdot 10^{10}$
123	15,5	9,5	0,6129	0,5263	18,39	0,7299	9,385
2	13,5	1,5	0,1111	3,333	38,80	0,5398	0,3181
12	18,5	6,5	0,3514	0,7692	24,67	0,7166	6,909
23	10,5	4,5	0,4286	1,111	22,35	0,6121	1,454

Подставив найденные значения  $L'$  в формулу (7-44), получим

$$M'_{13} = \frac{1}{2} (9,385 + 0,3181 - 6,909 - 1,454) \cdot 10^{-10} = 0,670 \cdot 10^{-10}.$$

Умножив  $M'_{13}$  на  $wW/(rR)$ , найдем окончательно

$$\begin{aligned} M_{13} &= \frac{wW}{rR} M'_{13} = \frac{30 \cdot 10}{0,03 \cdot 0,05} \cdot 0,670 \cdot 10^{-10} = \\ &= 2 \cdot 10^5 \cdot 0,670 \cdot 10^{-10} = 1,340 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.} \end{aligned}$$

**Пример 7-11.** Две concentрические катушки одинаковой длины  $a = 200$  см имеют средние диаметры, равные соответственно  $D = 20$  см



и  $d = 10$  см. Толщины катушек одинаковы:  $R = r = 2$  см. Обе катушки имеют по  $\omega = 2000$  витков. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.** Так как длина катушек и их диаметры много больше, чем их толщины, то можно применить формулу (7-46). Взаимную индуктивность  $M_0$  соленоидов определяем по формулам (7-2) и (7-6).

В данном случае  $\delta = 0,5$ ;

$$\gamma = \frac{20}{\sqrt{400 + 160000}} = \frac{1}{\sqrt{401}} = 0,04926; \quad \frac{1}{\gamma} = 20,03;$$

$$\gamma^3 = 1,196 \cdot 10^{-4}; \quad q_1 = 19,03; \quad q_3 = 0,9999; \quad q_5 = 1,000;$$

$$\delta^2 = 0,25; \quad \delta^4 = 6,25 \cdot 10^{-2}; \quad \delta^6 = 1,563 \cdot 10^{-2};$$

$$\Phi = \frac{\pi}{8} (0,10)^2 \cdot 0,2 (19,03 + 0,03) = 1,497 \cdot 10^{-2};$$

$$M_0 = \frac{4\pi}{4} \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 1,497 \cdot 10^{-2} = 1,882 \cdot 10^{-2} \text{ Гн.}$$

Для определения поправки  $\Delta M$  находим коэффициенты  $Q$ :

$$Q_1 = 0,04914; \quad Q_3 = 1,000; \quad Q_5 = 3,000; \quad Q_7 = 30,00.$$

Применяя формулу (7-47), имеем

$$\Delta M = \frac{\pi}{48} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{4 \cdot 10^6}{4} (0,1)^2 \cdot 0,2 \left[ \frac{4}{100} (38,06 + 0,38 + 0,03) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{400} (0,04914 + 0,06250 + 0,01172 + 0,00229) \right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \cdot 10^{-4} (1,539 + 0,001) = 2,533 \cdot 10^{-4} \text{ Гн};$$

$$M = M_0 + \Delta M = (1,882 + 0,025) \cdot 10^{-2} = 1,907 \cdot 10^{-2} \text{ Гн.}$$

Поправка на толщину катушек составляет в данном случае около 1,3 %.

## 7-11. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШЕК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ОДИНАКОВЫМИ ДИАМЕТРАМИ

Определение взаимной индуктивности двух коаксиальных катушек с одинаковыми диаметрами (рис. 7-11, а) может быть сведено к определению собственных индуктивностей четырех катушек.

Если витки катушек уложены с одинаковой плотностью, т. е. если  $\omega/a = W/A$ , где  $\omega$  и  $W$  — числа витков катушек;  $a$  и  $A$  — их длины, то взаимная индуктивность катушек

$$M_{13} = \frac{1}{2} (L_{123} + L_2 - L_{12} - L_{23}), \quad (7-48)$$

где  $L_2$  — индуктивность фиктивной катушки 2 длиной  $b$ , имеющей те же диаметры  $d_1$  и  $d_2$  и ту же плотность витков, что и данные катушки 1 и 3;  $L_{123}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{23}$  — собственные ин-

дуктивности катушек, составленных соответственно из катушек 1, 2 и 3; 1 и 2; 2 и 3.

Величины  $L_{123}$ ,  $L_2$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{23}$  могут быть определены так, как указано в § 6-5.

Если отношения  $w/a$  и  $W/A$  не равны друг другу, то сначала определяют взаимную индуктивность, приняв их равными единице, а затем полученный результат умножают на  $wW/(aA)$ .

Формула (7-48) справедлива и в том частном случае, когда катушки примыкают друг к другу (рис. 7-11, б). В этом случае

$$M_{12} = \frac{1}{2} (L_{12} - L_1 - L_2), \quad (7-49)$$

причем обозначения аналогичны обозначениям в формуле (7-48).

Указанный метод расчета удобен, когда расстояние  $b$  между катушками одного порядка с длинами  $a$  и  $A$  или меньше, чем они.

Если, наоборот, расстояние между катушками значительно больше, чем  $a$  и  $A$ , то формула (7-48) содержит разности близких величин и степень точности, с которой можно определить  $M_{13}$ , значительно ниже той степени точности, с которой определяются отдельные члены формулы (7-48).

В подобных случаях для определения  $M_{13}$  целесообразно применять метод эквивалентных круговых контуров (§ 7-12).

**Пример 7-12.** Две одинаковые катушки со средним диаметром  $d = 20$  см, длиной  $a = 6$  см, толщиной  $r = 5$  см и числом витков  $w = 1000$  расположены коаксиально, причем расстояние между их центрами  $x = 10$  см. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.** Применяем формулу (7-48). Так как катушки одинаковы, то  $L_{23} = L_{12}$  и

$$M_{13} = \frac{1}{2} (L_{123} + L_2 - 2L_{12}).$$

Индуктивности  $L_{123}$ ,  $L_2$  и  $L_{12}$  определяем по формуле (6-18). Для катушки 123 имеем

$$d_{123} = 20 \text{ см}; \quad \rho_{123} = 5/20 = 0,25; \quad a_{123} = 16 \text{ см}; \quad \alpha_{123} = 16/20 = 0,8;$$

$$r_{123} = 5 \text{ см}; \quad \gamma_{123} = 5/16 = 0,3125;$$

$$w_{123} = w \frac{a_{123}}{a} = 1000 \frac{16}{6} = 2667.$$

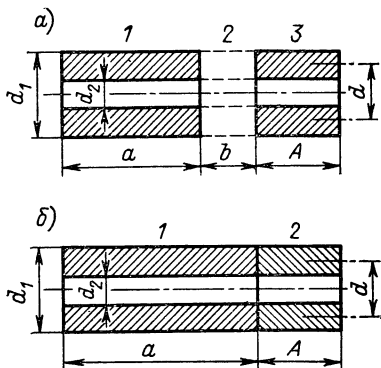


Рис. 7-11

По табл. 6-2 и 6-5 находим

$$K_{a123} = 0,6381; \quad k_{123} = 0,1336; \quad K_{a123} - k_{123} = 0,5045;$$

$$L_{123} = \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} (2667)^2 \cdot \frac{0,2}{0,8} \cdot 0,5045 = 0,9563 \text{ Гн}$$

Аналогичным путем найдем  $L_2 \left( a_2 = 4 \text{ см}, \quad w_2 = 1000 \frac{4}{6} \right)$   
и  $L_{12} \left( a_{12} = 10 \text{ см}, \quad w_{12} = 1000 \frac{10}{6} \right)$ :

$$L_2 = 0,02393 \text{ Гн}; \quad L_{12} = 0,2741 \text{ Гн.}$$

Следовательно,

$$M_{13} = \frac{1}{2} (0,9563 + 0,02393 - 0,5482) = \frac{1}{2} \cdot 0,4320 = 0,2160 \text{ Гн.}$$

## 7-12. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОАКСИАЛЬНЫХ КАТУШЕК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

При расчете взаимных индуктивностей коаксиальных катушек прямоугольного сечения применяются различные методы. Ниже изложены: метод эквивалентных круговых контуров, метод разложения в ряд Тейлора, метод, основанный на теореме о четырех прямоугольниках.

При выборе метода расчета необходимо иметь в виду следующее.

Метод, основанный на теореме о четырех прямоугольниках, может быть успешно применен, когда расстояние между ближайшими поперечными сечениями катушек одного порядка с линейными размерами этих сечений.

Если, наоборот, расстояние между сечениями значительно больше их размеров, то формулы, к которым приводит рассматриваемый метод, содержат разности близких величин, что существенно снижает степень точности расчета.

Напротив, степень точности двух других методов (метода эквивалентных контуров и метода ряда Тейлора) возрастает с увеличением расстояния между катушками, и эти методы особенно удобны именно в случае, когда катушки удалены на значительное расстояние.

По времени, затрачиваемому на расчет, наилучшим является метод эквивалентных контуров, за ним идет метод ряда Тейлора; расчеты по методу, основанному на теореме о четырех прямоугольниках, как правило, требуют наибольшего времени.

Таким образом, за исключением случаев, когда катушки расположены весьма близко друг к другу, наиболее целесообразным является применение метода эквивалентных контуров. Метод, основанный на теореме о четырех прямо-

угольниках, следует, как правило, применять лишь в случае, когда катушки расположены весьма близко друг к другу. Метод ряда Тейлора обычно несколько точнее метода эквивалентных контуров и может служить для контроля правильности расчетов, выполненных по этому методу.

**1. Метод эквивалентных круговых контуров.** Сущность метода заключается в том, что для расчета взаимной индуктивности каждая катушка заменяется двумя «эквивалентными круговыми контурами», диаметр и положение которых определяют так, чтобы при соответствующей магнитодвижущей силе, т. е. при соответствующем токе и числе витков, эти контуры создавали приблизительно такое же магнитное поле, как и катушка. Если отметить контуры, эквивалентные одной из катушек, цифрами 1 и 2, а контуры, эквивалентные другой, — цифрами 3 и 4, то искомая взаимная индуктивность катушек определится по формуле

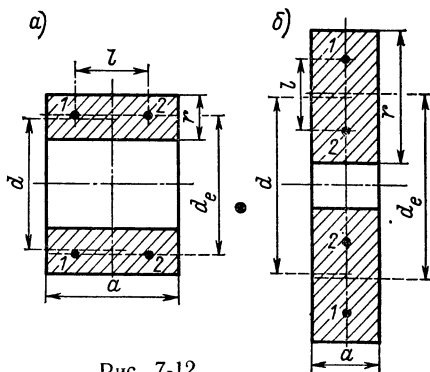


Рис. 7-12

$$M = \frac{wW}{4} (M_{13} + M_{14} + M_{23} + M_{24}), \quad (7-50)$$

где  $M_{13}$  — взаимная индуктивность круговых контуров (нитей) 1 и 3;  $M_{14}$  — то же для контуров 1 и 4 и т. д.

Эквивалентные контуры должны быть коаксиальны с рассматриваемыми катушками, причем, если аксиальный размер  $a$  (длина) какой-нибудь катушки больше ее радиального размера  $r$  (толщины), то соответствующие ей контуры должны иметь диаметр

$$d_e = d \left( 1 + \frac{r^2}{6a^2} \right) \quad (7-51)$$

и должны быть расположены симметрично относительно катушки на расстоянии

$$l = \sqrt{(a^2 - r^2)/3} \quad (7-52)$$

друг от друга (рис. 7-12, а). Если, наоборот,  $a < r$ , то контуры должны быть расположены в плоскости симметрии катушки (рис. 7-12, б) на расстоянии

$$l = \sqrt{(r^2 - a^2)/3} \quad (7-53)$$

друг от друга, а диаметры контуров должны быть равны  $d_e + l$  и  $d_e - l$ , где

$$d_e = d \left( 1 + \frac{a^2}{6d^2} \right). \quad (7-54)$$

Для катушек квадратного сечения  $r = a$ ,  $l = 0$ , и оба эквивалентных контура сливаются в один с диаметром, определяемым по любой из формул (7-51) или (7-54). В этом случае  $M_{13} = M_{23}$  и  $M_{14} = M_{24}$ .

Входящие в формулу (7-50) взаимные индуктивности  $M_{13}$ ,  $M_{14}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{24}$  эквивалентных круговых контуров могут быть определены, как указано в § 5-7 и 5-8.

**2. Метод ряда Тейлора.** Сущность метода ряда Тейлора в общем виде изложена в § 1-11.

Используя этот метод, можно показать, что взаимная индуктивность двух катушек прямоугольного сечения выражается через взаимные индуктивности 10 коаксиальных круговых контуров, помеченных на рис. 7-13 цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и буквами P и Q, а именно

$$M = \frac{wW}{6} (M_{Q1} + M_{Q2} + M_{Q3} + M_{Q4} + M_{P5} + M_{P6} + M_{P7} + M_{P8} - 2M_{PQ}), \quad (7-55)$$

где  $M_{Q1}$ ,  $M_{Q2}$ , ... — взаимные индуктивности контуров Q и 1, Q и 2 и т. д.

В частности, для двух одинаковых катушек

$$M = \frac{w^2}{3} (M_{Q1} + M_{Q2} + M_{Q3} + M_{Q4} - M_{PQ}). \quad (7-56)$$

Взаимные индуктивности  $M_{Q1}$ ,  $M_{Q2}$ , ... могут быть определены так, как указано в § 5-8 или, для одинаковых контуров, в § 5-7.

**3. Метод, основанный на теореме о четырех прямоугольниках.** Этот метод в общем виде изложен в § 1-10, где также показана возможность его применения к расчету взаимных индуктивностей коаксиальных колец и катушек прямоугольного сечения.

Имея чертеж с изображением прямоугольных поперечных сечений рассматриваемых катушек, продолжают стороны

прямоугольников до их взаимного пересечения, в результате чего по каждую сторону от общей оси катушек в общем случае получают девять прямоугольников, которые нумеруют так, как это сделано в § 1-10 (рис. 1-28—1-30).

Если обе рассматриваемые катушки имеют одинаковую плотность витков, т. е. если  $w/s = W/S$ , где  $w$  и  $W$  — числа витков, а  $s$  и  $S$  — площади поперечных сечений катушек, то взаимная индуктивность катушек, сечениями которых являются прямоугольники  $k$  и  $i$ , может быть определена непосредственно по формулам (1-50)—(1-58), причем в этих формулах под  $F(k \times i)$  следует понимать искомую взаимную индуктивность, а под  $F(k)$  — собственную индуктивность катушки, сечением которой является прямоугольник  $k$ . При этом подразумевается, что все катушки имеют такую же плотность витков, как и данные.

Если плотности витков  $w/s$  и  $W/S$  неодинаковы, то сначала производят расчет, приняв их равными единице, после чего полученный результат умножают на  $wW/(Ss)$ .

Собственные индуктивности катушек прямоугольного сечения могут быть найдены так, как указано в § 6-5.

Метод остается справедливым и в том случае, когда аксиальные или радиальные размеры поперечного сечения катушек обращаются в нуль. В подобных случаях для определения собственных индуктивностей можно пользоваться формулами § 6-2 и 6-3.

**Пример 7-13.** Катушка прямоугольного поперечного сечения со средним диаметром  $D = 25$  см, длиной  $A = 5$  см и толщиной  $R = 5$  см имеет  $W = 500$  витков. Другая катушка прямоугольного сечения имеет средний диаметр  $d = 14$  см, длину  $a = 5$  см и толщину  $r = 6$  см; число ее витков  $w = 300$ . Обе катушки имеют общую ось и расположены так, что расстояние между их центрами  $x = 10$  см. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.**

1. Применяем метод эквивалентных круговых контуров. Так как у первой катушки размеры  $A$  и  $R$  одинаковы, то заменяем ее одним эквивалентным контуром  $1$  с диаметром

$$D_1 = D \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{A^2}{D^2} \right) = 25 \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{25}{625} \right) = 25 \cdot 1,007 = 25,18 \text{ см.}$$

Вторую катушку заменяем двумя эквивалентными контурами 2 и 3, лежащими в плоскости ее симметрии. Средний диаметр  $d_e$  этих контуров и расстояние между ними согласно формулам (7-54) и (7-53) равны соответственно

$$d_e = d \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{a^2}{d^2} \right) = 14 \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{15}{196} \right) = 14,29 \text{ см;}$$

$$l = \sqrt{(r^2 - a^2)/3} = 1,915 \text{ см.}$$

Диаметры контуров 2 и 3

$$d_2 = 14,29 + 1,92 = 16,21 \text{ см}; \quad d_3 = 14,29 - 1,92 = 12,37 \text{ см}.$$

Расстояние между контуром 1 и контурами 2 и 3 равно  $x = 10$  см.

Взаимные индуктивности этих контуров находим по формуле (5-20) и табл. 5.5 при  $m^2$ , равном соответственно

$$m_{12}^2 = \frac{20,12 + 100}{428,5 + 100} = 0,2272; \quad m_{13}^2 = \frac{41,02 + 100}{352,7 + 100} = 0,3115.$$

Этим значениям  $m^2$  по табл. 5-5 отвечают значения  $F_{12} = 4,379$  и  $F_{13} = 3,076$ . Таким образом,

$$M_{12} = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \sqrt{8,105 \cdot 12,59} \cdot 10^{-2} \cdot 4,379 = 4,423 \cdot 10^{-8} \text{ Гн};$$

$$M_{13} = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \sqrt{6,185 \cdot 12,59} \cdot 10^{-2} \cdot 3,076 = 2,714 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \omega W \left( \frac{M_{12} + M_{13}}{2} \right) = 5,354 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

2. Применяем метод ряда Тейлора. В данном случае  $M_{Q2} = M_{P8}$  и  $M_{Q4} = M_{P6}$ . Поэтому формула (7-55) принимает вид

$$M = \frac{W\omega}{6} (M_{Q1} + 2M_{Q2} + M_{Q3} + 2M_{Q4} + M_{P5} + M_{P7} - 2M_{PQ}).$$

(7-57)

Отдельные взаимные индуктивности, входящие в эту формулу, вычисляем по формуле (5-20) и табл. 5-5, определяя  $m^2$  по формуле (5-21). Результаты вычислений сводим в табличку:

Контур	Радиусы, см	Расстояние, см	$m^2$	$F$	$M \cdot 10^8, \text{ Гн}$
$Q$ и $1$	7 и 10	10	0,2802	3,497	2,926
$Q$ и $2$	7 и 12,5	7,5	0,1982	4,983	4,661
$Q$ и $3$	7 и 15	10	0,2808	3,488	3,575
$Q$ и $4$	7 и 12,5	12,5	0,3477	2,657	2,485
$P$ и $5$	12,5 и 4	10	0,4628	1,661	1,174
$P$ и $7$	12,5 и 10	10	0,1753	5,545	1,199
$P$ и $Q$	12,5 и 7	10	0,2713	3,630	3,396

Подставляя найденные значения в формулу (7-57), получаем

$$M = \frac{500 \cdot 300}{6} \cdot 21,37 \cdot 10^{-8} = 5,342 \cdot 10^{-3} \text{ Гн},$$

что отличается от результата, найденного предыдущим способом, на 0,23 %.

Если рассчитать взаимную индуктивность катушек по средним виткам, то найдем

$$M = \omega W M_{PQ} = 500 \cdot 300 \cdot 3,396 \cdot 10^{-8} = 5,094 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Это значение отличается от истинного почти на 5 %.

### 7-13. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШЕК СЛОЖНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Если поперечное сечение катушки ограничено ломаной линией со взаимно перпендикулярными сторонами (см., например, рис. 7-14), то ее всегда можно представить как совокупность нескольких катушек, сечениями которых являются прямоугольники (1, 2, 3 и 4 на рис. 7-14). Поэтому взаимную индуктивность двух коаксиальных катушек сложного поперечного сечения можно найти по формуле

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{i=n+1}^{n+m} M_{ki}, \quad (7-58)$$

где  $n$  — число «простых» катушек, на которые разбита первая из рассматриваемых катушек;  $m$  — то же для другой катушки;  $M_{ki}$  — взаимная индуктивность  $k$ -й и  $i$ -й катушек. Например, для рис. 7-14

$$M = M_{13} + M_{14} + M_{23} + M_{24}.$$

Взаимные индуктивности  $M_{ki}$  могут быть определены так, как указано в предыдущих параграфах данной главы.

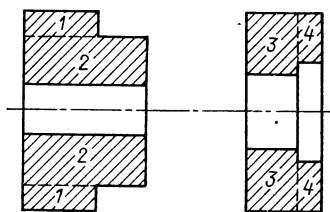


Рис. 7-14

### 7-14. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШЕК СЛОЖНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

1. Если линейные размеры поперечного сечения катушек малы по сравнению с их диаметрами, то взаимную индуктивность катушек в первом приближении можно определить по формуле

$$M = \omega W M_0, \quad (7-59)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков катушек;  $M_0$  — взаимная индуктивность двух круговых контуров, диаметры которых равны средним диаметрам катушек и кратчайшее расстояние между которыми равно среднему геометрическому расстоянию площадей поперечных сечений катушек друг от друга. Для определения  $M_0$  можно пользоваться формулами, таблицами и кривыми, данными в § 5-7 и 5-8.

2. Если линейные размеры поперечного сечения катушек соизмеримы с их диаметрами, то взаимную индуктивность можно определить следующим путем.



Каждую катушку подразделяют на несколько частей (катушек), имеющих одинаковые числа витков и относительно небольшие поперечные сечения, после чего искомая взаимная индуктивность может быть найдена по формуле

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{i=n+1}^{n+m} M_{ki}, \quad (7-60)$$

где  $n$  — число частей (катушек), на которые подразделена одна из рассматриваемых катушек;  $m$  — то же для другой катушки;  $M_{ki}$  — взаимная индуктивность  $k$ -й и  $i$ -й катушек. Каждая из величин  $M_{ki}$  в первом приближении может быть определена из выражения:

$$M_{ki} = \frac{wW}{nm} M'_{ki}, \quad (7-61)$$

где  $w$  и  $W$  — общие числа витков основных катушек;  $M'_{ki}$  — взаимная индуктивность центральных витков  $k$ -й и  $i$ -й катушек, определяемая по формулам, таблицам и кривым § 5-7 и 5-8 (в частности, для расчетов подобного рода удобно пользоваться кривыми рис. 5-10, для чего необходимо начертить поперечный разрез катушек на кальке в масштабе рис. 5-10). Точность (но вместе с ней и время) расчета возрастает с увеличением числа частей, на которые подразделены катушки. Наиболее точным расчет будет при  $n = w$  и  $m = W$ , т. е. тогда, когда каждая часть состоит из одного витка.

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ КРУГОВЫХ КАТУШЕК С НЕСОВПАДАЮЩИМИ ОСЯМИ

#### 8-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В настоящей главе даны формулы и таблицы для расчета взаимных индуктивностей катушек с параллельными и пересекающимися осями. Рассматриваются только круговые катушки, т. е. катушки, обмотка которых занимает объем, имеющий форму тела вращения. Основные формулы главы относятся к катушкам прямоугольного поперечного сечения\*,

---

\* Здесь и далее в этой главе поперечным сечением катушки называется сечение, перпендикулярное направлению тока в витках катушки.

имеющим наибольшее практическое значение. При этом для катушек с пересекающимися осями конечные формулы даны только для случаев, когда один из размеров поперечного сечения каждой обмотки равен нулю; для катушек, у которых оба размера поперечного сечения отличны от нуля, указаны методы расчета, позволяющие определить взаимную индуктивность при заданных размерах и взаимном расположении катушек.

2. Замечания, сделанные в § 7-1 применительно к коаксиальным катушкам, остаются справедливыми и по отношению к катушкам с параллельными и пересекающимися осями. Все эти замечания следует иметь в виду при пользовании формулами, таблицами и методами, данными в настоящей главе.

3. В тех случаях, когда формулы, данные в настоящей главе, по каким-либо причинам неприменимы или неудобны, для определения взаимной индуктивности катушек прямоугольного сечения можно использовать метод эквивалентных контуров или метод ряда Тейлора (§ 7-12), применяя для нахождения взаимной индуктивности отдельных круговых контуров соответствующие формулы, таблицы и кривые главы пятой.

## 8-2. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

1. Одинаковые соленоиды, расположенные согласно рис. 8-1. Взаимная индуктивность соленоидов

$$M = \frac{\pi}{16} \mu_0 \frac{d^2}{a^2} \omega^2 \xi \left[ \frac{b}{y} - 1 + \frac{\xi^2}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{2\eta^3} \right) - \right. \\ \left. - \frac{5}{8} \xi^4 \left( 1 - 5\eta^2 + \frac{35}{8} \eta^4 - \frac{3}{8} \frac{1}{\eta^5} \right) + \right. \\ \left. + \frac{35}{32} \xi^6 \left( 1 - \frac{21}{2} \eta^2 + \frac{189}{8} \eta^4 - \frac{231}{16} \eta^6 + \frac{5}{16\eta^7} \right) + \dots \right], \quad (8-1)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида;  $d$  — диаметр соленоида;  $a$  — его длина;  $y$  — расстояние между осями соленоидов;

$$b = \sqrt{y^2 + a^2}; \quad \xi = d/(2b); \quad \eta = y/b.$$

2. Одинаковые соленоиды в общем случае и неодинаковые соленоиды (рис. 8-2). Взаимная индуктивность соленоидов

$$M = \frac{\pi}{64} \mu_0 \omega W \frac{D^2 d^2}{Aa} \left( \frac{X_1}{b_1} - \frac{X_2}{b_2} - \frac{X_3}{b_3} + \frac{X_4}{b_4} \right), \quad (8-2)$$

где  $w$  и  $W$  — числа соленоидов;  $D$  и  $d$  — их диаметры;  $A$  и  $a$  — длины соленоидов;

$$X_k = \left[ 1 - \frac{1}{4} K_1 \xi_k^2 P_2(\gamma_k) + \frac{1}{8} K_2 \xi_k^4 P_4(\gamma_k) - \frac{5}{64} K_3 \xi_k^6 P_6(\gamma_k) + \frac{7}{128} K_4 \xi_k^8 P_8(\gamma_k) - \dots \right]; \quad (8-3)$$

$$\xi_k = D/(2b_k); \quad \gamma_k = c_k/b_k;$$

$$b_k = \sqrt{y^2 + c_k^2};$$

$$c_1 = x - \frac{1}{2}(A + a); \quad c_3 = x + \frac{1}{2}(A - a);$$

$$c_2 = x - \frac{1}{2}(A - a); \quad c_4 = x + \frac{1}{2}(A + a);$$

$y$  — расстояние между осями соленоидов;  $x$  — аксиальное смещение их центров;  $P_2(\gamma_k)$ ,  $P_4(\gamma_k)$ , ... — полиномы Лежандра, значения которых могут быть найдены по формулам и таблицам, приведенным в приложениях 1 и 5; коэффициенты  $K_1$ ,  $K_2$ , ... определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= 1 + \delta^2; \\ K_2 &= 1 + 3\delta^2 + \delta^4; \\ K_3 &= 1 + 6\delta^2 + 6\delta^4 + \delta^6; \\ &\dots \dots \dots \\ K_n &= F(-n-1, -n, 2, \delta^2), \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

где  $\delta = d/D$ ;  $F$  — гипергеометрическая функция (см. приложение 1).

Величины  $c_k$  могут быть и отрицательными, однако знак  $c_k$  не имеет значения, так как полиномы Лежандра четного

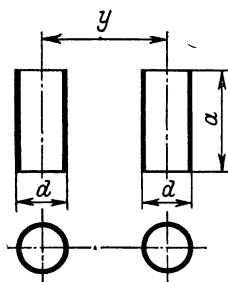


Рис. 8-1

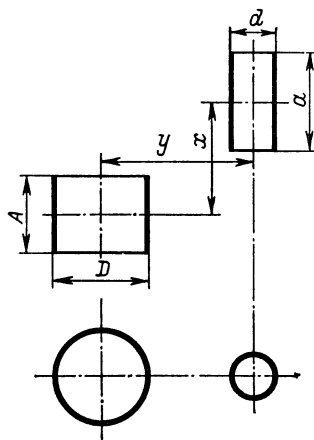


Рис. 8-2

порядка являются четными функциями своих аргументов:  
 $P_{2n}(\gamma) = P_{2n}(-\gamma)$ .

Для сходимости рядов (8-3) необходимо, чтобы все расстояния  $b_k$  были больше, чем  $(D + d)/2$ , причем каждый ряд сходится тем быстрее, чем меньше соответствующее отношение  $\xi_k$ .

В частном случае, когда основания (торцы) соленоидов лежат в одной плоскости, в формуле (8-2) следует положить

$$x = (a - A)/2; \quad c_1 = -A; \quad c_2 = a - A; \\ c_3 = 0; \quad c_4 = a.$$

Формула (8-2) дает ответ в виде разности нескольких величин. Если соленоиды удалены друг от друга на расстояние, значительное по сравнению с их размерами, отдельные члены этой формулы близки друг к другу и весь расчет необходимо выполнять с большой степенью точности. Хотя в подобных случаях сходимость рядов повышается, формула все же остается неудобной для расчета.

Для определения взаимной индуктивности двух одинаковых соленоидов, удаленных на значительное расстояние, можно пользоваться следующей формулой, лишенной отмеченного недостатка:

$$M = \frac{\pi}{32} \mu_0 \frac{\omega^2}{a^2} \frac{d^4}{b} \beta^2 \{ P_2(\gamma) + \beta^2 P_4(\gamma) + \beta^4 P_6(\gamma) + \dots - \\ - \frac{\alpha^2}{2} [6P_4(\gamma) + 15\beta^2 P_6(\gamma) + 28\beta^4 P_8(\gamma) + \dots] + \\ + \frac{25}{8} \alpha^4 [3P_6(\gamma) + 14\beta^2 P_8(\gamma) + \dots] - \\ - \frac{245}{8} \alpha^6 [P_8(\gamma) + \dots] + \dots \}, \quad (8-5)$$

где  $b = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние между центрами соленоидов;  $\alpha = d/(2b)$ ;  $\beta = a/b$ ;  $\gamma = x/b$ .

**Пример 8-1.** Два одинаковых соленоида диаметром  $d = 15$  см и длиной  $a = 15$  см расположены так, как показано на рис. 8-1. Расстояние между осями соленоидов равно  $y = 20$  см. Каждый соленоид имеет  $\omega = 100$  витков. Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.** Для определения взаимной индуктивности применяем формулу (8-1). В данном случае

$$b = \sqrt{0,2^2 + 0,15^2} = 0,25 \text{ м}; \quad \xi = 0,15/0,5 = 0,3; \\ \eta = 0,2/0,25 = 0,8; \quad 1/\eta = 1/0,8 = 1,25; \\ \xi^2 = 9 \cdot 10^{-2}; \quad \eta^2 = 0,64; \quad \eta^5 = 0,3277; \\ \xi^4 = 8,1 \cdot 10^{-3}; \quad \eta^3 = 0,512; \quad \eta^6 = 0,2621;$$

$$\begin{aligned}
\xi^6 &= 7,29 \cdot 10^{-4}; & \eta^4 &= 0,4096; & \eta^7 &= 0,2097; \\
\frac{3}{2} \eta^2 &= 0,96; & \frac{1}{2\eta^3} &= 0,9766; \\
1 - \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{2\eta^3} &= 1,0166; & \frac{\xi^2}{2} &= 4,5 \cdot 10^{-2}; \\
1,0166 \cdot 4,5 \cdot 10^{-2} &= 4,575 \cdot 10^{-2}; \\
5\eta^2 &= 3,2; & \frac{35}{8} \eta^4 &= 1,792; & \frac{3}{8\eta^5} &= 1,114; \\
1 - 5\eta^2 + \frac{35}{8} \eta^4 - \frac{3}{8\eta^5} &= -1,522; & \frac{5}{8} \xi^4 &= 5,063 \cdot 10^{-3}; \\
-1,522 \cdot 5,063 \cdot 10^{-3} &= -7,707 \cdot 10^{-3}; \\
\frac{21}{2} \eta^2 &= 6,72; & \frac{189}{8} \eta^4 &= 9,677; & \frac{231}{16} \eta^6 &= 3,785; \\
\frac{5}{16\eta^7} &= 1,490; \\
1 - \frac{21}{2} \eta^2 + \frac{189}{8} \eta^4 - \frac{231}{16} \eta^6 + \frac{5}{16\eta^7} &= 1,662; \\
\frac{35}{32} \xi^6 &= 7,974 \cdot 10^{-4}; \\
1,662 \cdot 7,974 \cdot 10^{-4} &= 1,325 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Искомая взаимная индуктивность

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\pi}{16} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2 \frac{(0,15)^3}{(0,15)^2} (1,25 - 1 + 0,0458 + 0,0077 + \\
&+ 0,0013) = 3,387 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}
\end{aligned}$$

**Пример 8-2.** Соленоид диаметром  $D = 10$  см и длиной  $A = 6$  см и соленоид диаметром  $d = 10$  см и длиной  $a = 4$  см расположены так, что их оси параллельны, причем расстояние между осями равно  $y = 15$  см, а центры соленоидов смещены параллельно осям на расстояние  $x = 3$  см. Первый соленоид имеет  $W = 50$  витков, второй —  $w = 100$  витков. Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.** Для определения взаимной индуктивности применяем формулу (8-2). В данном случае

$$\begin{aligned}
c_1 &= -0,02 \text{ м}; & c_2 &= 0,02 \text{ м}; & c_3 &= 0,04 \text{ м}; & c_4 &= 0,08 \text{ м}; \\
b_1 &= b_2 \sqrt{0,15^2 + 0,02^2} = 0,1513 \text{ м}; & b_3 &= 0,1552 \text{ м}; & b_4 &= 0,1700 \text{ м}; \\
\gamma_1 &= -\gamma_2; & \gamma_3 &= 0,2577; & \gamma_4 &= 0,4706; \\
\xi_1 &= \xi_2; & \xi_3 &= 0,3221; & \xi_4 &= 0,2941; \\
\delta &= 1; & K_1 &= 2, & K_2 &= 5; & K_3 &= 14; & K_4 &= 42.
\end{aligned}$$

Так как в рассматриваемом примере  $\gamma_1 = -\gamma_2$ , то

$$P_2(\gamma_1) = P_2(\gamma_2); \quad P_4(\gamma_1) = P_4(\gamma_2) \text{ и т. д.}$$

Кроме того,  $b_1 = b_2$ ;  $\xi_1 = \xi_2$  и, следовательно,

$$X_1 = X_2; \quad X_1/b_1 - X_2/b_2 = 0.$$

Таким образом, необходимо найти только два последних члена в формуле (8-2). Имеем

$$\xi_3^2 = 1,037 \cdot 10^{-1}; \quad \xi_4^2 = 8,650 \cdot 10^{-2}; \quad \xi_5^4 = 1,075 \cdot 10^{-2};$$

$$\xi_4^4 = 7,481 \cdot 10^{-3}; \quad \xi_5^6 = 1,115 \cdot 10^{-3}; \quad \xi_4^8 = 6,397 \cdot 10^{-4};$$

$$\xi_3^8 = 1,156 \cdot 10^{-4}; \quad \xi_4^8 = 5,595 \cdot 10^{-5}.$$

По таблице приложения 5

$$P_2(\gamma_3) = -0,4003; \quad P_2(\gamma_4) = -0,1678; \quad P_4(\gamma_3) = 0,1452;$$

$$P_4(\gamma_4) = -0,2409; \quad P_6(\gamma_3) = 0,0397; \quad P_6(\gamma_4) = 0,3320;$$

$$P_8(\gamma_3) = -0,1670; \quad P_8(\gamma_4) = 0,1529;$$

$$\frac{1}{4} K_1 \xi_3^2 P_2(\gamma_3) = -2,075 \cdot 10^{-2}; \quad \frac{1}{4} K_1 \xi_4^2 P_2(\gamma_4) = -7,257 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{1}{8} K_2 \xi_3^4 P_4(\gamma_3) = 9,756 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{1}{8} K_2 \xi_4^4 P_4(\gamma_4) = -1,126 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{5}{64} K_3 \xi_3^6 P_6(\gamma_3) = 4,840 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{5}{64} K_3 \xi_4^6 P_6(\gamma_4) = 2,323 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{7}{128} K_4 \xi_3^8 P_8(\gamma_3) = -4,433 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{7}{128} K_4 \xi_4^8 P_8(\gamma_4) = 1,965 \cdot 10^{-5};$$

$$X_3 = 1 + 0,0208 + 0,0010 = 1,0218;$$

$$X_4 = 1 - 0,0073 - 0,0011 - 0,0002 = 1,0060;$$

$$X_3/b_3 = 6,584; \quad X_4/b_4 = 5,917.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = -\frac{\pi}{64} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 100 \frac{0,1^2 \cdot 0,1^2}{0,06 \cdot 0,04} (6,584 - 5,917) = -8,57 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

**Пример 8-3.** Два одинаковых соленоида диаметром  $d = 5$  см и длиной  $a = 3$  см расположены так, что их оси параллельны, причем расстояние между осями равно  $y = 15$  см, а центры соленоидов смещены параллельно осям на расстояние  $x = 20$  см. Каждый из соленоидов имеет  $w = 100$  витков. Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.** Для определения взаимной индуктивности применяем формулу (8-5). В данном случае

$$b = \sqrt{0,15^2 + 0,20^2} = 0,25 \text{ м};$$

$$\alpha = 0,05/0,5 = 0,1; \quad \beta = 0,03/0,25 = 0,12; \quad \gamma = 0,2/0,25 = 0,8;$$

$$\alpha^2 = 10^{-2}; \quad \beta^2 = 1,44 \cdot 10^{-2};$$

$$\alpha^4 = 10^{-4}; \quad \beta^4 = 2,074 \cdot 10^{-4}; \quad d^4 = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

По таблице приложения 5

$$P_2(\gamma) = 0,4600; \quad P_4(\gamma) = -0,2330; \quad P_6(\gamma) = -0,3918;$$

$$P_2(\gamma) + \beta^2 P_4(\gamma) + \beta^4 P_6(\gamma) = 0,4562;$$

$$6P_4(\gamma) + 15\beta^2 P_6(\gamma) = -1,483; \quad 3P_6(\gamma) = -1,175.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{32} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10^4}{9 \cdot 10^{-4}} \frac{6,25 \cdot 10^{-6}}{0,25} \cdot 1,44 \cdot 10^{-2} \times \\ \times \left( 0,4562 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 1,483 - \frac{25}{8} \cdot 10^{-4} \cdot 1,175 + \dots \right) = \\ = \frac{\pi^2}{2,9} \cdot 6,25 \cdot 1,44 \cdot 10^{-7} (0,4562 + 0,0074 - 0,0004) = 2,287 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

### 8-3. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДА И КРУГОВОГО КОНТУРА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

Взаимная индуктивность соленоида и кругового контура с параллельными осями

$$M = \frac{\pi}{64} \mu_0 W \frac{d^2 D^2}{A} \left( \frac{V_2}{b_2^2} - \frac{V_1}{b_1^2} \right), \quad (8-6)$$

где

$$V_1 = \gamma_1 \left[ 1 - \frac{3}{4} K_1 \xi_1^2 \frac{P_3(\gamma_1)}{\gamma_1} + \frac{5}{8} K_2 \xi_1^4 \frac{P_5(\gamma_1)}{\gamma_1} - \right. \\ \left. - \frac{35}{64} K_3 \xi_1^6 \frac{P_7(\gamma_1)}{\gamma_1} + \dots \right], \quad (8-7)$$

а  $V_2$  — то же с заменой  $\gamma_1$  на  $\gamma_2$  и  $\xi_1$  на  $\xi_2$ , причем  $W$  — число витков соленоида;  $D$  и  $A$  — его диаметр и длина;  $d$  — диаметр контура (рис. 8-3);

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{c_1}{b_1}; & c_1 &= x + \frac{A}{2}; & b_1 &= \sqrt{y^2 + c_1^2}; & \xi_1 &= \frac{D}{2b_1}; \\ \gamma_2 &= \frac{c_2}{b_2}; & c_2 &= x - \frac{A}{2}; & b_2 &= \sqrt{y^2 + c_2^2}; & \xi_2 &= \frac{D}{2b_2}; \end{aligned} \right\} \quad (8-8)$$

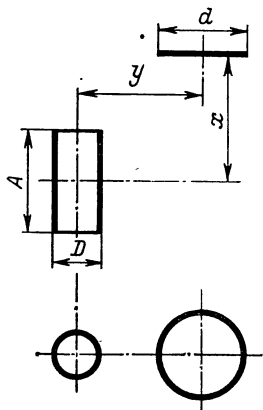


Рис. 8-3

$y$  — расстояние между осями соленоида и витка;  $x$  — аксиальное смещение их центров;  $P_3(\gamma)$ ,  $P_5(\gamma)$  ... — полиномы Лежандра;  $K_1$ ,  $K_2$ , ... — коэффициенты, вычисляемые по формулам:

$$K_1 = 1 + \delta^2;$$

$$K_2 = 1 + 3\delta^2 + \delta^4;$$

$$K_3 = 1 + 6\delta^2 + 6\delta^4 + \delta^6;$$

$$K_4 = 1 + 10\delta^2 + 20\delta^4 + 10\delta^6 + \delta^8,$$

в которых через  $\delta$  обозначено отношение  $d/D$ .

Общий член ряда в выражении для  $V_1$  имеет вид

$$(-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdot \dots (2n+2)} K_n \xi_1^{2n} \frac{P_{2n+1}(\gamma_1)}{\gamma_1}, \quad (8-9)$$

где  $K_n = F(-n-1, -n, 2, \delta^2)$  — гипергеометрическая функция (см. приложение 1). Значения полиномов Лежандра могут быть найдены по формулам и таблицам, приведенным в приложениях 1 и 5.

Формула (8-6) справедлива как в случае, когда диаметр соленоида больше диаметра контура, так и при обратном соотношении. В обоих случаях под  $D$  следует понимать больший из двух диаметров, под  $d$  — меньший, так что всегда  $\delta = d/D \leq 1$ .

Формула (8-6) применима и в том случае, если контур заменен катушкой с  $\omega$  витками, имеющей средний диаметр  $d$  и ничтожно малое поперечное сечение. В этом случае для получения взаимной индуктивности соленоида и катушки правую часть формулы (8-6) следует умножить на  $\omega$ .

**Пример 8-4.** Соленоид диаметром  $D = 10$  см и длиной  $A = 20$  см имеет  $W = 100$  витков и расположен так, что его ось параллельна оси кругового контура диаметром  $d = 10$  см. Оси соленоида и контура находятся на расстоянии  $y = 30$  см, их центры смещены в осевом направлении на расстояние  $x = 30$  см. Определить взаимную индуктивность соленоида и контура.

**Решение.** Для определения взаимной индуктивности применяем формулу (8-6). В данном случае

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,4 \text{ м}; & c_2 &= 0,2 \text{ м}; \\ b_1 &= \sqrt{0,09 + 0,16} = 0,5 \text{ м}; & b_2 &= \sqrt{0,09 + 0,04} = 0,3606 \text{ м}; \\ \xi_1 &= 0,1; & \xi_2 &= 0,1387; \\ \gamma_1 &= 0,8; & \gamma_2 &= 0,5546; \\ \delta &= 1; & K_1 &= 2; & K_2 &= 5; \end{aligned}$$

$$\frac{P_3(\gamma_1)}{\gamma_1} = 0,1; \quad \frac{3}{4} K_1 \xi_1^2 \frac{P_3(\gamma_1)}{\gamma_1} = 1,5 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{P_5(\gamma_1)}{\gamma_1} = -0,4994; \quad \frac{5}{8} K_2 \xi_1^4 \frac{P_5(\gamma_1)}{\gamma_1} = -1,56 \cdot 10^{-4};$$

$$V_1 = 0,8(1 - 0,0015 - 0,0002) - 0,8 \cdot 0,9983 = 0,7987,$$

$$V_1/b_1^2 = 3,235;$$

$$\frac{P_3(\gamma_2)}{\gamma_2^2} = -0,7310; \quad \frac{3}{4} K_1 \xi_2^2 \frac{P_3(\gamma_2)}{\gamma_2} = -2,1 \cdot 10^{-2};$$

$$\frac{P_5(\gamma_2)}{\gamma_2} = -0,0712; \quad \frac{5}{8} K_2 \xi_2^4 \frac{P_5(\gamma_2)}{\gamma_2} = -8 \cdot 10^{-5};$$



$$V_2 = 0,5546 (1 + 0,0211 - 0,0001) = 0,5546 \cdot 1,021 = 0,5663;$$

$$V_2/b_2^2 = 4,356.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi}{64} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \frac{(0,1)^4}{0,2} (4,356 - 3,235) = \\ &= \frac{\pi^2 \cdot 10^{-8}}{32} \cdot 1,121 = 3,457 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.} \end{aligned}$$

#### 8-4. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ПЛОСКИХ КАТУШЕК С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

1. Одинаковые катушки, расположенные в одной плоскости (рис. 8-4). Взаимная индуктивность

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\pi}{8} \mu_0 \omega^2 d \alpha^3 \left[ \left( 1 + \frac{2}{3} \rho^2 + \frac{\rho^4}{9} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{4} \alpha^2 \left( 1 + \frac{7}{3} \rho^2 + \frac{13}{15} \rho^4 + \frac{\rho^6}{15} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{375}{64} \alpha^4 \left( 1 + \frac{68}{15} \rho^2 + \frac{338}{75} \rho^4 + \frac{164}{175} \rho^6 + \frac{113}{2625} \rho^8 \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (8-10)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $d$  — ее средний диаметр;  $\alpha = d/(2y)$ ;  $\rho = r/d$ ;  $r$  — радиальный размер (толщина) обмотки;  $y$  — расстояние между центрами катушек. Ряд (8-10) сходится хорошо лишь при достаточно малых значениях  $\alpha$ , т. е. только для катушек, не слишком близко расположенных друг к другу.

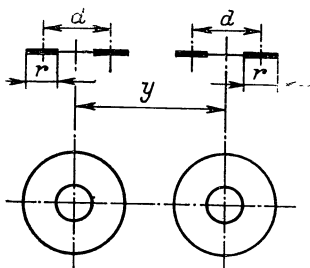


Рис. 8-4

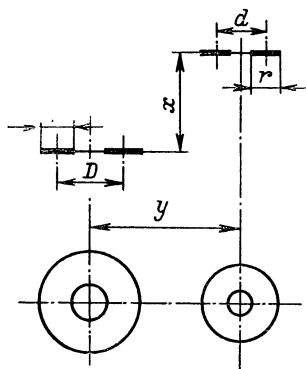


Рис. 8-5

## 2. Неодинаковые катушки (общий случай, рис. 8-5). Взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 w W b \alpha_1^2 \alpha_2^2 \left[ \rho_2' \rho_2'' P_2(\gamma) - \frac{3}{2} \alpha_1^2 (\rho_4' \rho_2'' + \right. \\ \left. + \delta^2 \rho_2' \rho_4'') P_4(\gamma) + \frac{15}{8} \alpha_1^4 (\rho_6' \rho_2'' + 3\delta^2 \rho_4' \rho_6'' + \delta^4 \rho_2' \rho_6'') P_6(\gamma) - \right. \\ \left. - \frac{35}{16} \alpha_1^6 (\rho_8' \rho_2'' + 6\delta^2 \rho_6' \rho_8'' + 6\delta^4 \rho_4' \rho_8'' + \delta^6 \rho_2' \rho_8'') P_8(\gamma) + \dots \right], \quad (8-11)$$

где  $w$  и  $W$  — числа витков катушек;  $b = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $x$  — аксиальное смещение центров катушек;  $y$  — расстояние между их осями;  $\delta = d/D$ ;  $d$  и  $D$  — диаметры катушек;  $\alpha_1 = D/(2b)$ ;  $\alpha_2 = d/(2b)$ ;  $\gamma = x/b$ ;  $P_2(\gamma)$ ,  $P_4(\gamma)$ , ... — полиномы Лежандра;  $\rho_2'$ ,  $\rho_4'$ , ... — функции от  $2\rho' = 2R/D$ ;  $\rho_2''$ ,  $\rho_4''$ , ... — такие же функции от  $2\rho'' = 2r/d$ , где  $R$  и  $r$  — радиальные размеры (толщины) обмоток. Значения функций  $\rho_2'$ ,  $\rho_2''$ ,  $\rho_4'$ ,  $\rho_4''$ , ... можно взять из табл. 8-1 или вычислить по общей формуле

$$\rho_n = 1 + \frac{n(n-1)}{3!} \rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!} \rho^4 + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{(n+1)!} \rho^n. \quad (8-12)$$

Значения полиномов Лежандра можно определить по формулам и таблицам, данным в приложениях 1 и 5.

При выводе формулы (8-11) предполагалось, что  $b > (D + d)/2$ . Ряд (8-11) сходится тем быстрее, чем больше расстояние между катушками по сравнению с их размерами.

Таблица 8-1. Значения функций  $\rho_2$ ,  $\rho_4$ ,  $\rho_6$ ,  $\rho_8$

$(2\rho)^2$	$\rho_2$	$\rho_4$	$\rho_6$	$\rho_8$	$(2\rho)^2$	$\rho_2$	$\rho_4$	$\rho_6$	$\rho_8$
0,0	1,0000	1,000	1,00	1,00	1,0	1,0833	1,512	2,44	4,27
0,1	1,0083	1,050	1,13	1,24	1,1	1,0917	1,565	2,60	4,71
0,2	1,0167	1,100	1,26	1,50	1,2	1,1000	1,618	2,77	5,17
0,3	1,0250	1,151	1,39	1,78	1,3	1,1083	1,671	2,95	5,65
0,4	1,0333	1,202	1,53	2,08	1,4	1,1167	1,724	3,12	6,15
0,5	1,0417	1,253	1,67	2,39	1,5	1,1250	1,778	3,30	6,68
0,6	1,0500	1,304	1,82	2,73	1,6	1,1333	1,832	3,49	7,23
0,7	1,0583	1,356	1,97	3,08	1,7	1,1417	1,886	3,68	7,81
0,8	1,0667	1,408	2,12	3,46	1,8	1,1500	1,940	3,87	8,40
0,9	1,0750	1,460	2,28	3,85	1,9	1,1583	1,995	4,07	9,03
1,0	1,0833	1,512	2,44	4,27	2,0	1,1667	2,050	4,27	9,67

**Пример 8-5.** Две одинаковые плоские катушки со средним диаметром  $d = 15$  см расположены в одной плоскости так, что расстояние между их центрами  $y = 25$  см. Радиальный размер  $r = 7,5$  см, число витков каждой катушки  $w = 30$ . Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.** Для определения взаимной индуктивности применяем формулу (8-10). В данном случае

$$\rho = 7,5/15 = 0,5; \quad \rho^2 = 2,5 \cdot 10^{-1}; \quad \rho^4 = 6,25 \cdot 10^{-2}; \quad \rho^6 = 1,563 \cdot 10^{-2};$$

$$\alpha = 15/50 = 0,3; \quad \alpha^2 = 9 \cdot 10^{-2}; \quad \alpha^3 = 2,7 \cdot 10^{-2}; \quad \alpha^4 = 8,1 \cdot 10^{-3};$$

$$1 + \frac{2}{3} \rho^2 + \frac{\rho^4}{9} = 1,174;$$

$$1 + \frac{7}{3} \rho^2 + \frac{13}{15} \rho^4 + \frac{\rho^6}{15} = 1,638; \quad \frac{9}{4} \alpha^2 \cdot 1,638 = 0,3317;$$

$$1 + \frac{68}{15} \rho^2 + \frac{338}{75} \rho^4 + \frac{164}{175} \rho^6 = 2,430; \quad \frac{375}{64} \alpha^4 \cdot 2,430 = 0,1153;$$

$$1,174 + 0,3317 + 0,1153 = 1,621.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = -\frac{\pi}{8} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^2 \cdot 0,15 \cdot 2,7 \cdot 10^{-2} \cdot 1,621 = -0,2915 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

**Пример 8-6.** Плоская катушка со средним диаметром  $D = 10$  см, радиальным размером  $R = 5$  см и числом витков  $W = 30$  и плоская катушка со средним диаметром  $d = 5$  см, радиальным размером  $r = 2$  см и числом витков  $w = 40$  имеют параллельные оси, находящиеся на расстоянии  $y = 20$  см друг от друга. Центры катушек смещены параллельно осям на расстояние  $x = 15$  см. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.** Для определения взаимной индуктивности катушек применяем формулу (8-11). В данном случае

$$b = \sqrt{0,15^2 + 0,20^2} = 0,25 \text{ м}; \quad \delta = d/D = 0,5; \quad \gamma = 0,15/0,25 = 0,6;$$

$$\alpha_1 = 0,1/0,5 = 0,2; \quad \alpha_2 = 0,05/0,5 = 0,1; \quad \alpha_2^2 = 10^{-2};$$

$$\alpha_1^2 = 4 \cdot 10^{-2}; \quad \alpha_1^4 = 1,6 \cdot 10^{-3}; \quad \alpha_1^6 = 6,4 \cdot 10^{-5};$$

$$\delta^2 = 2,5 \cdot 10^{-1}; \quad \delta^4 = 6,25 \cdot 10^{-2}; \quad \delta^6 = 1,563 \cdot 10^{-2};$$

$$2\rho' = \frac{10}{10} = 1; \quad 2\rho'' = \frac{4}{5} = 0,8; \quad (2\rho')^2 = 1; \quad (2\rho'')^2 = 0,64.$$

По табл. 8-1 находим

$$\rho'_2 = 1,083; \quad \rho'_4 = 1,512; \quad \rho'_6 = 2,44;$$

$$\rho''_2 = 1,050; \quad \rho''_4 = 1,325; \quad \rho''_6 = 1,88.$$

По таблице приложения 5

$$P_2(0,6) = 0,0400; \quad P_4(0,6) = -0,4080;$$

$$P_6(0,6) = 0,1721; \quad P_8(0,6) = 0,2123;$$

$$\rho_2' \rho_2'' P_2(\gamma) = 4,548 \cdot 10^{-2}; \quad -\frac{3}{2} \alpha_1^2 (\rho_4' \rho_2'' + \delta^2 \rho_2' \rho_4'') P_4(\gamma) = 4,742 \cdot 10^{-2};$$

$$\frac{15}{8} \alpha_1^4 (\rho_6' \rho_2'' + 3\delta^2 \rho_4' \rho_4'' + \delta^4 \rho_2' \rho_6'') P_6(\gamma) = 2,164 \cdot 10^{-3};$$

$$-\frac{35}{16} \alpha_1^6 (\rho_8' \rho_2'' + 6\delta^2 \rho_6' \rho_4'' + 6\delta^4 \rho_4' \rho_6'') P_8(\gamma) = -3,032 \cdot 10^{-4};$$

$$0,04548 + 0,04742 + 0,00216 - 0,00030 = 0,09476.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,25 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} \cdot 9,476 \cdot 10^{-2} = 2,244 \cdot 10^{-8} \text{ Гн.}$$

## 8-5. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ОДИНАКОВЫХ КАТУШЕК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

1. Одинаковые катушки, расположенные согласно рис. 8-6. Взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{32} \mu_0 \omega^2 \frac{d^4}{a^2} \left( \frac{Z_1}{b_1} - \frac{Z_2}{b_2} \right), \quad (8-13)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $d$  и  $a$  — соответственно средний диаметр и длина катушки;  $b_1 = \sqrt{a^2 + y^2}$ ;  $b_2 = y$ ;  $y$  — расстояние между осями катушек;

$$\begin{aligned} Z_1 = & \rho_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_1^2 \rho_2 \rho_4 P_2(\gamma_1) + \frac{1}{8} \alpha_1^4 (2\rho_6 \rho_2 + 3\rho_4^2) P_4(\gamma_1) - \\ & - \frac{5}{32} \alpha_1^6 (\rho_8 \rho_2 + 6\rho_6 \rho_4) P_6(\gamma_1) + \\ & + \frac{7}{64} \alpha_1^8 (\rho_{10} \rho_2 + 10\rho_8 \rho_4 + \\ & + 10\rho_6^2) P_8(\gamma_1) + \dots; \end{aligned} \quad (8-14)$$

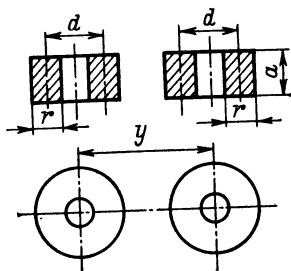


Рис. 8-6

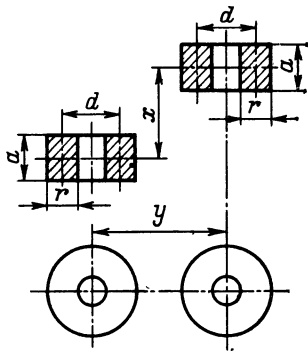


Рис. 8-7

$\alpha_1 = d/(2b_1)$ ;  $\rho_2, \rho_4, \dots$  — величины, значения которых даны в табл. 8-1 в зависимости от значений величины  $(2\rho)^2 = (2r/d)^2$ , где  $r$  — радиальный размер (толщина) обмотки;  $P_2(\gamma_1), P_4(\gamma_1) \dots$  — полиномы Лежандра;  $\gamma_1 = a/b_1$ ;  $Z_2$  — то же, что  $Z_1$ , но с заменой  $\alpha_1$  на  $\alpha_2 = d/(2b_2) = d/(2y)$  и  $\gamma_1$  на  $\gamma_2 = 0$ .

Полиномы Лежандра могут быть найдены по формулам и таблицам, приведенным в приложениях 1 и 5.

Ряд (8-14) сходится тем быстрее, чем более удалены катушки друг от друга, т. е. чем больше  $y$  по сравнению с  $d$ .

**2. Одинаковые катушки в общем случае (рис. 8-7).**  
Взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{64} \mu_0 \omega^2 \frac{d^4}{a^2} \left( \frac{Z_1}{b_1} - \frac{Z_2}{b_2} - \frac{Z_3}{b_3} + \frac{Z_4}{b_4} \right), \quad (8-15)$$

где  $\omega, d$  и  $a$  — то же, что в формуле (8-13), а  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  выражаются общей формулой

$$\begin{aligned} Z_k = & \rho_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_k^2 \rho_2 \rho_4 P_2(\gamma_k) + \frac{1}{8} \alpha_k^4 (2\rho_6 \rho_2 + 3\rho_4^2) P_4(\gamma_k) - \\ & - \frac{5}{32} \alpha_k^6 (\rho_8 \rho_2 + 6\rho_6 \rho_4) P_6(\gamma_k) + \\ & + \frac{7}{64} \alpha_k^8 (\rho_{10} \rho_2 + 10\rho_8 \rho_4 + 10\rho_6^2) P_8(\gamma_k) + \dots, \end{aligned} \quad (8-16)$$

причем

$$\alpha_k = d/(2b_k); \quad \gamma_k = c_k/b_k; \quad b_k = \sqrt{c_k^2 + y^2};$$

$$c_1 = x - a; \quad c_2 = x; \quad c_3 = x; \quad c_4 = x + a,$$

а прочие обозначения те же, что и в формуле (8-14). Формула (8-16) справедлива при условии, что все расстояния  $b_k$  больше, чем  $d$ .

**Пример 8-7.** Две одинаковые катушки с параллельными осями имеют прямоугольное сечение. Средний диаметр катушек  $d = 10$  см, их длина  $a = 20$  см, радиальный размер сечения  $r = 3$  см. Каждая катушка имеет  $\omega = 50$  витков. Катушки расположены так, как показано на рис. 8-6, причем  $y = 15$  см. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.** Применяем формулу (8-13). В данном случае

$$b_1 = 0,25 \text{ м}; \quad \alpha_1 = 0,2000; \quad \gamma_1 = 0,8; \quad 2\rho = 0,6;$$

$$b_2 = 0,15 \text{ м}; \quad \alpha_2 = 0,3333; \quad \gamma_2 = 0; \quad (2\rho)^2 = 0,36;$$

$$\alpha_1^2 = 4 \cdot 10^{-2}; \quad \rho_2 = 1,030; \quad P_2(\gamma_1) = 0,4600;$$

$$\alpha_2^2 = 1,111 \cdot 10^{-1}; \quad \rho_4 = 1,182; \quad P_2(\gamma_2) = -0,5000;$$

$$\alpha_2^4 = 1,235 \cdot 10^{-2}; \quad \rho_6 = 1,474; \quad P_4(\gamma_2) = 0,3750;$$

$$\alpha_2^6 = 1,372 \cdot 10^{-3}; \quad \rho_8 = 1,960; \quad P_6(\gamma_2) = -0,3125;$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \alpha_1^2 \rho_2 \rho_4 P_2(\gamma_1) &= -1,120 \cdot 10^{-2}; & -\frac{1}{2} \alpha_2^2 \rho_2 \rho_4 P_2(\gamma_2) &= \\ &= +3,381 \cdot 10^{-2}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8} \alpha_2^4 (2\rho_6\rho_2 + 3\rho_4^2) P_4 (\gamma_2) = 4,184 \cdot 10^{-3};$$

$$-\frac{5}{32} \alpha_2^6 (\rho_8\rho_2 + 6\rho_6\rho_4) P_4 (\gamma_2) = 8,356 \cdot 10^{-4};$$

$$Z_1 = 1,061 - 0,011 = 1,050; \quad Z_2 = 1,061 + 0,034 + \\ + 0,004 + 0,001 = 1,100;$$

$$Z_1/b_1 = 1,050/0,25 = 4,200; \quad Z_2/b_2 = 1,100/0,15 = 7,383;$$

$$Z_1/b_1 - Z_2/b_2 = -3,133.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{32} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^2 \frac{10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}} (-3,133) = -2,416 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

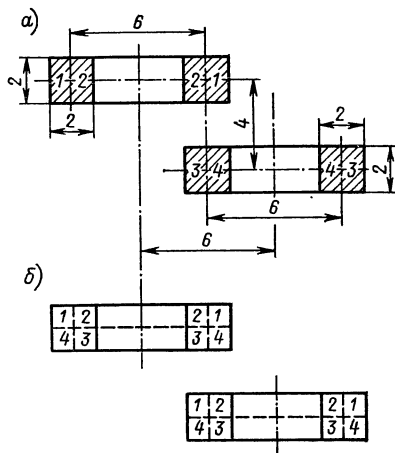
**Пример 8-8.** Две одинаковые катушки квадратного сечения имеют следующие размеры: средний диаметр  $d = 6$  см, длина  $a = 2$  см, радиальная толщина  $r = 2$  см. Оси катушек параллельны и находятся на расстоянии  $y = 6$  см друг от друга; центры катушек смещены в аксиальном направлении на расстояние  $x = 4$  см (рис. 8-8). Каждая катушка имеет  $w = 400$  витков. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.** Формула (8-15) в данном случае не может быть использована, так как коэффициенты, входящие в выражения для  $Z_h$ , не только не убывают, но, наоборот, возрастают при переходе от одного члена к другому. Для улучшения сходимости рядов можно подразделить каждую катушку на две, как показано на рис. 8-8, а. Тогда

$$M = M_{13} + M_{14} + M_{23} + M_{24} = M_{13} + 2M_{23} + M_{24}.$$

Однако сходимость рядов в выражениях для  $Z_h$  и после подразделения катушек остается плохой. Кроме того, каждый из членов вида  $Z_h/b_h$  значительно превосходит результат суммирования этих членов\*, так что весь расчет становится весьма громоздким и неточным. Ввиду изложенного применяем другие способы расчета.

1. В качестве первого приближения принимаем  $M = w^2 M'$ , где  $M'$  — взаимная индуктивность центральных витков катушек. Для определения  $M'$  пользуемся формулой (5-39).



\* Например, при определении  $M_{24}$  получаем

$$Z_1/b_1 = 0,168590;$$

$$Z_2/b_2 = Z_3/b_3 = 0,142129;$$

$$Z_4/b_4 = 0,119369,$$

а алгебраическая сумма этих членов дает 0,003700.

Рис. 8-8

В данном случае

$$\gamma = 2.3/\sqrt{52} = 0,83205; \quad \cos \theta = 4/\sqrt{52} = 0,55470,$$

и из табл. 5-7 находим  $k = 0,2824$ . Величину  $M_0$  определяем по формуле (5-16).

При  $\gamma = 0,83205$  из табл. 5-4 находим  $F = 0,9395$ . Следовательно,

$$M' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{2} Fk = 10^{-7} \cdot 0,03 \cdot 0,9395 \cdot 0,2824 = 0,7959 \cdot 10^{-9} \text{ Гн};$$

$$M = \omega^2 M' = 400^2 \cdot 0,7959 \cdot 10^{-9} = 1,2734 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}.$$

2. Пользуемся методом эквивалентных круговых контуров (§ 7-12). Диаметр эквивалентного кругового контура

$$d_e = 6 \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2}{6} \right)^2 \right] = 6,1111 \text{ см}.$$

Взаимную индуктивность эквивалентных контуров определяем по формуле (5-39). В данном случае

$$\gamma = 6,1111/\sqrt{52} = 0,84747; \quad \cos \theta = 0,5547,$$

и из табл. 5-7 находим  $k = 0,2976$ . Величину  $M_0$  определяем по формуле (5-16). При  $\gamma = 0,84747$  из табл. 5-4 находим  $F = 0,9804$ . Следовательно,

$$M' = 10^{-7} \cdot 0,03055 \cdot 0,9804 \cdot 0,2976 = 8,913 \cdot 10^{-10} \text{ Гн};$$

$$M = 400^2 \cdot 8,913 \cdot 10^{-10} = 1,426 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}.$$

3. Делим каждую из катушек на четыре части, как показано на рис. 8-8, б, и определяем  $M$  по формуле

$$M = \left( \frac{\omega}{4} \right)^2 (2M_{11} + 2M_{22} + 4M_{12} + 2M_{13} + 2M_{24} + \\ + M_{23} + M_{14} + M_{32} + M_{41}),$$

где  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  и т. д. — взаимные индуктивности средних витков соответствующих катушек, определяемые по формуле (5-39) и табл. 5-7, т. е. так же, как величины  $M'$  при двух предыдущих способах расчета.

Произведя расчет, получим

$$M_{11} = 1,9943 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}; \quad M_{22} = 0,2409 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}; \quad M_{12} = 0,7291 \cdot 10^{-9} \text{ Гн};$$

$$M_{13} = 0,8971 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}; \quad M_{24} = 0,2062 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}; \quad M_{23} = -0,1261 \cdot 10^{-9} \text{ Гн};$$

$$M_{14} = 1,5838 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}; \quad M_{32} = 0,3907 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}; \quad M_{41} = 2,0273 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}.$$

Подставляя найденные значения в формулу для  $M$ , имеем

$$M = 100^2 \cdot 13,4691 \cdot 10^{-9} = 1,347 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}.$$

При подразделении катушек на большее число частей можно получить и более точный результат. Так, разделив катушки 1 и 4 на две части каждую и произведя соответствующий расчет, получим  $M = 1,381 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$ .

Очевидно, однако, что при большом числе частей расчет становится весьма громоздким.

## 8-6. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ НЕОДИНАКОВЫХ КАТУШЕК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

Взаимная индуктивность неодинаковых катушек прямоугольного сечения с параллельными осями

$$M = \frac{\pi}{64} \mu_0 w W \frac{D^2 d^2}{Aa} \left( \frac{Z_1}{b_1} - \frac{Z_2}{b_2} - \frac{Z_3}{b_3} + \frac{Z_4}{b_4} \right), \quad (8-17)$$

где  $W$  и  $w$ ,  $D$  и  $d$ ,  $A$  и  $a$  — соответственно числа витков, средние диаметры и длины катушек (рис. 8-9);  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  выражаются общей формулой

$$\begin{aligned} Z_k = & \rho_2'' \rho_2'' - \frac{1}{4} \alpha_k^2 (\rho_4'' \rho_2'' + \delta^2 \rho_2'' \rho_4'') P_2(\gamma_k) + \\ & + \frac{1}{8} \alpha_k^4 (\rho_6'' \rho_2'' + 3\delta^2 \rho_4'' \rho_4'' + \delta^4 \rho_2'' \rho_6'') P_4(\gamma_k) - \\ & - \frac{5}{64} \alpha_k^6 (\rho_8'' \rho_2'' + 6\delta^2 \rho_6'' \rho_4'' + 6\delta^4 \rho_4'' \rho_6'' + \delta^6 \rho_2'' \rho_8'') P_6(\gamma_k) + \\ & + \frac{7}{128} \alpha_k^8 (\rho_{10}'' \rho_2'' + 10\delta^2 \rho_8'' \rho_4'' + 20\delta^4 \rho_6'' \rho_6'' + 10\delta^6 \rho_4'' \rho_8'' + \\ & + \delta^8 \rho_2'' \rho_{10}'') P_8(\gamma_k) + \dots, \end{aligned} \quad (8-18)$$

причем

$$\alpha_k = D/(2b_k); \quad \gamma_k = c_k/b_k; \quad b_k = \sqrt{c_k^2 + y^2}; \quad \delta = d/D;$$

$$c_1 = x - (A + a)/2; \quad c_3 = x + (A - a)/2;$$

$$c_2 = x - (A - a)/2;$$

$$c_4 = x + (A + a)/2;$$

$P_2(\gamma_k)$ ,  $P_4(\gamma_k)$ , ... — полиномы Лежандра;  $\rho_2'', \rho_4'', \dots$  — функции от  $2\rho'' = 2R/D$ ;  $\rho_2'', \rho_4'', \dots$  — такие же функции от  $2\rho'' = 2r/d$ , где  $R$  и  $r$  — радиальные размеры (толщины) обмоток. Значения этих функций можно взять из табл. 8-1 или вычислить по формуле (8-12). Значения полиномов Лежандра можно найти по формулам и таблицам, данным в приложениях 1 и 5.

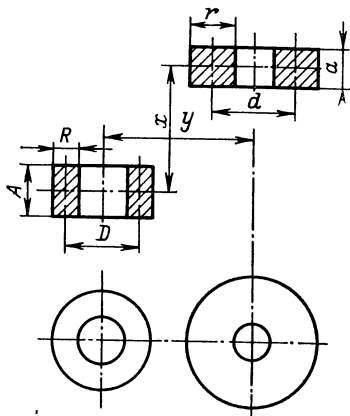


Рис. 8-9



Для того чтобы каждый из рядов (8-18) сходиллся и при этом достаточно быстро, все расстояния  $b_k$  должны быть больше полусуммы  $(D + d)/2$ .

Для определения взаимной индуктивности катушек с параллельными осями можно пользоваться методом эквивалентных круговых контуров или методом ряда Тейлора, изложенными в § 7-12. Отличие от сказанного в § 7-12 заключается лишь в том, что в данном случае для определения взаимной индуктивности круговых контуров следует руководствоваться указаниями § 5-10, а не § 5-8 (пример 8-8). При этом необходимо помнить, что оба метода, как и для коаксиальных катушек, дают результат тем более точный, чем меньше размеры катушек по сравнению с расстоянием между ними.

**Пример 8-9.** Катушка со средним диаметром  $d = 6$  см, толщиной  $r = 1$  см и длиной  $a = 5$  см и катушка со средним диаметром  $D = 10$  см, толщиной  $R = 2$  см и длиной  $A = 10$  см имеют параллельные оси и расположены так, что расстояние между осями  $y = 10$  см, а центры катушек смещены в аксиальном направлении на расстояние  $x = 10,5$  см. Числа витков катушек равны соответственно  $w = 50$  витков,  $W = 150$  витков. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.** Применяем формулу (8-17). В данном случае

$$2\rho' = 0,4; \quad 2\rho'' = 0,3333; \quad (2\rho')^2 = 0,16; \quad (2\rho'')^2 = 0,1111.$$

По табл. 8-1 и формуле (8-12) находим

$$\rho'_1 = 1,0133; \quad \rho'_4 = 1,080; \quad \rho'_6 = 1,21; \quad \rho'_8 = 1,39; \quad \rho'_{10} = 1,67;$$

$$\rho''_2 = 1,0092; \quad \rho''_4 = 1,055; \quad \rho''_6 = 1,14; \quad \rho''_8 = 1,27; \quad \rho''_{10} = 1,45;$$

$$\rho'_2 \rho''_2 = 1,02275;$$

$$c_1 = 3 \text{ см}; \quad c_2 = 8 \text{ см}; \quad c_3 = 13 \text{ см}; \quad c_4 = 18 \text{ см};$$

$$b_1^2 = 109 \text{ см}^2; \quad b_2^2 = 164 \text{ см}^2; \quad b_3^2 = 269 \text{ см}^2; \quad b_4^2 = 424 \text{ см}^2;$$

$$\gamma_1 = 0,28734; \quad \gamma_2 = 0,62470; \quad \gamma_3 = 0,79262; \quad \gamma_4 = 0,87416;$$

$$P_2(\gamma_1) = -0,3761; \quad P_2(\gamma_2) = 0,0854; \quad P_2(\gamma_3) = 0,4424;$$

$$P_2(\gamma_4) = 0,6463;$$

$$P_4(\gamma_1) = 0,0952; \quad P_4(\gamma_2) = -0,4240; \quad P_4(\gamma_3) = -0,2539;$$

$$P_4(\gamma_4) = 0,0646;$$

$$P_6(\gamma_1) = 0,1032; \quad P_6(\gamma_2) = 0,1081; \quad P_6(\gamma_3) = -0,3798;$$

$$P_6(\gamma_4) = -0,3505;$$

$$P_8(\gamma_1) = -0,2207; \quad P_8(\gamma_2) = 0,2661; \quad P_8(\gamma_3) = 0,0195;$$

$$P_8(\gamma_4) = -0,3658.$$

Подставляя найденные значения величин в формулу (8-18), получаем

$$Z_1 = 1,05531; Z_2 = 1,01470; Z_3 = 1,00700; Z_4 = 1,00880;$$

$$\frac{Z_1}{b_1} = 0,101080 \frac{1}{\text{см}}; \quad \frac{Z_2}{b_2} = 0,079235 \frac{1}{\text{см}};$$

$$\frac{Z_3}{b_3} = 0,061398 \frac{1}{\text{см}}; \quad \frac{Z_4}{b_4} = 0,048992 \frac{1}{\text{см}};$$

$$0,101080 - 0,079235 - 0,061398 + 0,048992 = 0,009439 \text{ 1/см.}$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{64} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 150 \frac{10^{-2} \cdot 36 \cdot 10^{-4}}{0,1 \cdot 0,05} \cdot 0,009439 \cdot 10^2 = 3,144 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

Если пренебречь при расчете толщиной катушек, т. е. рассчитать их как соленоиды ( $R = r = 0$ ), то для взаимной индуктивности катушек получим значение  $M' = 2,994 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$

Таким образом, в данном случае пренебрежение толщиной катушек привело бы к погрешности порядка 5 %.

## 8-7. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШЕК С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ ПРИ СЛОЖНОЙ ФОРМЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

1. Если сечения катушек ограничены ломаными линиями со взаимно перпендикулярными сторонами (см., например, рис. 8-10), то каждую катушку можно представить как совокупность нескольких катушек, сечениями которых являются прямоугольники (1, 2, 3 и 4 на рис. 8-10). Поэтому взаимную индуктивность двух катушек сложного прямоугольного сечения можно найти по формуле

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{i=n+1}^{n+m} M_{ki}, \quad (8-19)$$

где  $n$  — число «простых» катушек, на которые разбита первая из рассматриваемых катушек;  $m$  — то же для другой катушки;  $M_{ki}$  — взаимная индуктивность  $k$ -й и  $i$ -й катушек.

Например, для рис. 8-10

$$M = M_{13} + M_{14} + M_{23} + M_{24}. \quad (8-20)$$

Взаимные индуктивности  $M_{ki}$  могут быть определены так, как указано в предыдущих параграфах этой главы.

2. Если сечения катушек имеют более сложную форму, то расчет взаимной индуктивности следует производить, как указано в § 7-14, причем для определения взаимных индуктивностей центральных витков катушек ( $M_0$ ) или их частей

( $M_{ki}$ ) можно пользоваться формулами и таблицами § 5-10 и 5-12.

Этот метод может быть принят также и для катушек прямоугольного сечения, если ряды, вычисляемые по формуле (8-18), сходятся недостаточно быстро или вовсе не сходятся.

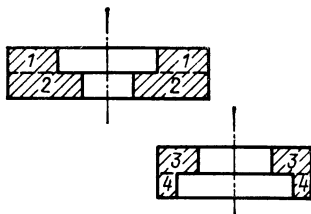


Рис. 8-10

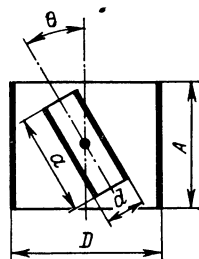


Рис. 8-11

## 8-8. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СОЛЕНОИДОВ

Взаимная индуктивность концентрических соленоидов

$$M = \frac{\pi}{8} \mu_0 \omega W \frac{d^2}{B} \cos \theta \left\{ 1 - \frac{1}{8} \frac{D^2 b^2}{B^4} \left[ \xi_2 \frac{P_3(v)}{v} + \xi_4 \eta_2 \beta^2 \frac{P_5(v)}{v} + \right. \right. \\ \left. \left. + \xi_6 \eta_4 \beta^4 \frac{P_7(v)}{v} + \xi_8 \eta_6 \beta^6 \frac{P_9(v)}{v} + \dots \right] \right\}, \quad (8-21)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков катушек;  $b = 1/2 \sqrt{d^2 + a^2}$ ;  $B = 1/2 \sqrt{D^2 + A^2}$ ;  $\beta = b/B$ ;  $d$  и  $D$  — диаметры соленоидов;  $a$  и  $A$  — их длины;  $\theta$  — угол между осями соленоидов (рис. 8-11);  $P_3(v)$ ,  $P_5(v)$ , ... — полиномы Лежандра от аргумента  $v = \cos \theta$ ;  $\xi$  и  $\eta$  с различными индексами получаются из функций  $\varphi(\gamma)$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(\gamma) &= 1 - \frac{7}{4} \gamma^2; \\ \varphi_4(\gamma) &= 1 - \frac{9}{2} \gamma^2 + \frac{33}{8} \gamma^4; \\ \varphi_6(\gamma) &= 1 - \frac{33}{4} \gamma^2 + \frac{143}{8} \gamma^4 - \frac{715}{64} \gamma^6; \\ \varphi_8(\gamma) &= 1 - 13\gamma^2 + \frac{195}{4} \gamma^4 - \frac{1105}{16} \gamma^6 + \frac{4199}{128} \gamma^8 \end{aligned} \right\} \quad (8-22)$$

путем подстановки вместо  $\gamma$  соответственно  $d/(2b)$  или  $D/(2B)$  [например,  $\xi_2 = 1 - \frac{7}{4} \left(\frac{d}{2b}\right)^2$ ;  $\eta_4 = 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{D}{2B}\right)^2 + \frac{33}{8} \times \left(\frac{D}{2B}\right)^4$  и т. д.].

Значения функций  $\varphi(\gamma)$  можно также взять непосредственно из табл. 7-3. Значения полиномов Лежандра определяются по формулам и таблицам, данным в приложениях 1 и 5.

Ряд (8-21) сходится тем лучше, чем меньше отношения  $\beta = b/B$  и  $D/B$ , т. е. чем больше длина внешнего соленоида и чем меньше длина и диаметр внутреннего соленоида.

На основании принципа взаимной замены длин под величиной  $D$  в формуле (8-21) всегда можно понимать больший из двух диаметров, а под  $d$  — меньший.

**Пример 8-10.** Соленоид диаметром  $D = 12$  см и длиной  $A = 12$  см с числом витков  $W = 120$  и соленоид диаметром  $d = 10$  см и длиной  $a = 4$  см с числом витков  $w = 60$  имеют общий центр. Оси соленоидов составляют угол, косинус которого  $\cos \theta = 0,6$ . Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.** Применяем формулу (8-21). В данном случае

$$b^2 = \frac{1}{4} (100 + 16) = 29 \text{ см}^2; \quad B^2 = \frac{1}{4} (144 + 144) = 72 \text{ см}^2;$$

$$\beta^2 = 29/72 = 0,4031; \quad \gamma_1^2 = 25/29 = 0,8620; \quad \gamma_2^2 = 36/72 = 0,5000.$$

По табл. 7-3 при  $\gamma^2 = \gamma_1^2$  находим

$$\xi_2 = -0,5086; \quad \xi_4 = 0,1862; \quad \xi_6 = 0,0147.$$

По той же таблице при  $\gamma^2 = \gamma_2^2$  имеем

$$\eta_2 = 0,1250; \quad \eta_4 = -0,2188.$$

Из таблицы приложения 5 при  $v = 0,6$  находим

$$P_3(v)/v = -0,600; \quad P_5(v)/v = -0,2543; \quad P_7(v)/v = 0,5377.$$

Выражение в квадратных скобках формулы (8-21) после подстановки найденных значений дает

$$0,3052 - 0,0024 - 0,0003 = 0,3025.$$

Выражение в фигурных скобках

$$\left\{ 1 - \frac{1}{8} \frac{144 \cdot 29}{72 \cdot 72} \cdot 0,3025 \right\} = \{1 - 0,03046\} = 0,9695.$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{\pi}{8} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 120 \frac{100 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{72}} \cdot 0,6 \cdot 0,9695 = 2,436 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

## 8-9. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ПЛОСКИХ КАТУШЕК

Взаимная индуктивность концентрических плоских катушек

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega W \frac{D_1}{(1-\vartheta)(\Delta-\delta)} \left[ \frac{C_3}{3} (\Delta^3 - \delta^3) \ln \frac{1}{\vartheta} + \right. \\ \left. + \frac{C_5}{10} (\Delta^5 - \delta^5) \left( \frac{1}{\vartheta^2} - 1 \right) + \frac{C_7}{28} (\Delta^7 - \delta^7) \left( \frac{1}{\vartheta^4} - 1 \right) + \dots \right], \quad (8-23)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков катушек;  $\vartheta = d_1/D_1$ ;  $\Delta = D_2/D_1$ ;  $\delta = d_2/D_1$ ;  $D_1$  и  $D_2$  — соответственно внешний и внутренний диаметры большей катушки;  $d_1$  и  $d_2$  — внешний и внутренний диаметры меньшей катушки (рис. 8-12); коэффициенты  $C_3, C_5, C_7, \dots$ , зависящие от угла  $\theta$  между осями катушек, даны в зависимости от  $\cos \theta$  в табл. 8-2.

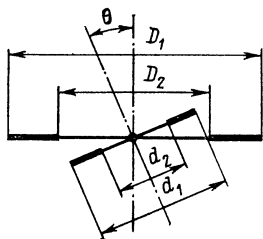


Рис. 8-12

**Пример 8-11.** Две концентрические плоские катушки (рис. 8-12) имеют диаметры, равные соответственно  $D_1 = 20$  см,  $D_2 = 10$  см,  $d_1 = 9$  см,  $d_2 = 5$  см. Первая катушка имеет  $W = 50$  витков, вторая —

$\omega = 10$  витков. Оси катушек составляют угол, косинус которого  $\cos \theta = 0,4$ . Определить взаимную индуктивность катушек.

**Таблица 8-2.** Значения коэффициентов  $C_3, C_5$  и  $C_7$  в формуле (8-23) для концентрических плоских катушек

$\cos \theta$	$C_3$	$C_5$	$C_7$
0,1	0,987	—0,546	0,414
0,2	1,974	—1,036	0,711
0,3	2,961	—1,499	0,799
0,4	3,948	—1,629	0,626
0,5	4,935	—1,619	+0,208
0,6	5,922	—1,332	—0,353
0,7	6,909	—0,712	—0,845
0,8	7,896	+0,269	—0,924
0,9	8,883	+1,745	—0,095
1,0	9,870	+3,701	+2,313

Р е ш е н и е. Применяем формулу (8-23). В данном случае

$$\vartheta = \frac{9}{20} = 0,45; \quad \Delta = \frac{10}{20} = 0,5; \quad \delta = \frac{5}{20} = 0,25; \quad 1 - \vartheta = 0,55;$$

$$\Delta - \delta = 0,25;$$

$$\Delta^3 = 0,125; \quad \delta^2 = 0,01563; \quad \Delta^3 - \delta^3 = 0,1094;$$

$$\Delta^5 = 0,03125; \quad \delta^5 = 0,009766; \quad \Delta^5 - \delta^5 = 0,03027;$$

$$\Delta^7 = 0,007813; \quad \delta^7 = 0,00006104; \quad \Delta^7 - \delta^7 = 0,007752;$$

$$\ln \frac{1}{\vartheta} = 0,7975; \quad \frac{1}{\vartheta^2} - 1 = 3,938; \quad \frac{1}{\vartheta^4} - 1 = 23,39.$$

По табл. 8-2 находим

$$C_3 = 3,948; \quad C_5 = -1,629; \quad C_7 = 0,626.$$

Подставляя найденные величины в формулу (8-23), имеем

$$M = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot 10 \cdot 50 \frac{0,2}{0,55 \cdot 0,25} (11,48 - 1,942 + 0,405) \cdot 10^{-2} = 7,23 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

## 8-10. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ЭКЦЕНТРИЧЕСКИХ СОЛЕНОИДОВ

Предполагается, что центр одного из соленоидов (1) лежит на оси другого соленоида (2) на расстоянии  $x$  от его центра (рис. 8-13). Диаметры соленоидов равны соответственно  $d$  и  $D$ , их длины —  $a$  и  $A$ . Оси соленоидов составляют угол  $\theta$ . Первый соленоид имеет  $w$  витков, второй —  $W$  витков.

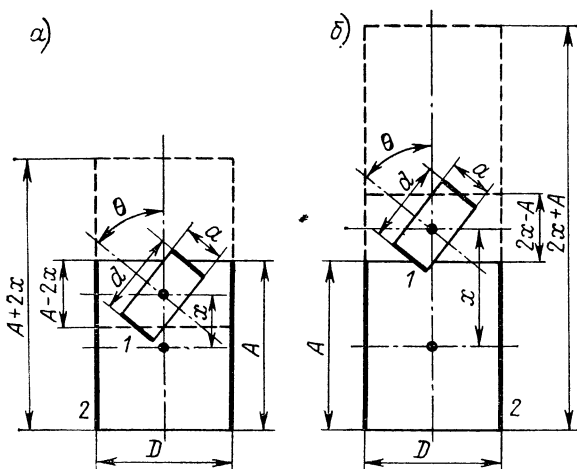


Рис. 8-13

В случае когда центр соленоида 1 лежит внутри соленоида 2 (рис. 8-13, а), взаимную индуктивность соленоидов 1 и 2 можно рассчитать по формуле

$$M = \frac{1}{2} (M_1 + M_2), \quad (8-24)$$

где  $M_1$  — взаимная индуктивность соленоида 1 и концентрического с ним соленоида длиной  $A + 2x$ ;  $M_2$  — взаимная индуктивность соленоида 1 и концентрического с ним соленоида длиной  $A - 2x$ . В обоих случаях предполагается, что второй соленоид имеет тот же диаметр  $D$  и ту же плотность витков  $W/A$ , что и соленоид 2, и что угол между осями соленоидов равен  $\theta$ .

Для определения  $M_1$  и  $M_2$  можно пользоваться формулой (8-21) с соответствующей заменой обозначений:  $A$  на  $A + 2x$  (или на  $A - 2x$ );  $W$  на  $W \frac{A + 2x}{A}$  (или на  $W \frac{A - 2x}{A}$ ) и т. д.

В случае когда центр соленоида 1 лежит вне соленоида 2 (рис. 8-13, б), взаимную индуктивность соленоидов 1 и 2 можно рассчитать по формуле:

$$M = \frac{1}{2} (M_1 - M_2), \quad (8-25)$$

где  $M_1$  — то же, что и в формуле (8-24);  $M_2$  — взаимная индуктивность соленоида 1 и концентрического с ним соленоида длиной  $2x - A$ , имеющего тот же диаметр  $D$  и ту же плотность витков, что и соленоид 2; угол между осями соленоидов, как и в формуле (8-24), предполагается равным  $\theta$ . Для определения  $M_1$  и  $M_2$  можно пользоваться формулой (8-21) с соответствующей заменой обозначений:  $A$  на  $A + 2x$  (или на  $2x - A$ ),  $W$  на  $W \frac{A + 2x}{A}$  (или на  $W \frac{2x - A}{A}$ ) и т. д.

При значительном удалении соленоидов друг от друга для определения  $M$  вместо формулы (8-25) можно применять метод эквивалентных контуров (§ 7-12).

**Пример 8-12.** Соленоид диаметром  $d = 10$  см и длиной  $a = 3$  см расположен внутри соленоида диаметром  $D = 20$  см и длиной  $A = 15$  см, причем центр малого соленоида лежит на оси большого на расстоянии  $x = 2,5$  см от его центра.

Оси соленоидов составляют угол, косинус которого  $\cos \theta = 0,5$ . Первый соленоид имеет  $w = 30$  витков, второй —  $W = 100$  витков. Определить взаимную индуктивность соленоидов.

**Решение.** Так как центр соленоида 1 лежит внутри соленоида 2, то применяем формулу (8-24).

Для определения взаимной индукции  $M_1$  применяем формулу (8-21), заменяя в ней  $A$  на  $A + 2x$  и  $W$  на  $W \frac{A+2x}{A}$ . В данном случае

$$b^2 = \frac{109}{4} \cdot 10^{-4} = 2,725 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; \quad \gamma_1^2 = \left( \frac{d}{2b} \right)^2 = \frac{1}{1,09} = 0,9174;$$

$$B^2 = \frac{1}{4} [D^2 + (A + 2x)^2] = \frac{1}{4} (0,2^2 + 0,2^2) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$\gamma_2^2 = \left( \frac{D}{2b} \right)^2 = 0,5000; \quad \beta_2 = \frac{2,725}{2} \cdot 10^{-1} = 1,363 \cdot 10^{-1}.$$

По табл. 7-3 при  $\gamma^2 = \gamma_1^2$  находим  $\xi_2 = -0,6055$ ;  $\xi_4 = 0,3435$ .

По той же таблице при  $\gamma^2 = \gamma_2^2$  имеем  $\eta = 0,125$ .

При  $v = \cos \theta = 0,5$  по таблице полиномов Лежандра находим

$$P_3(0,5)/0,5 = -0,8750; \quad P_5(0,5)/0,5 = 0,1796.$$

Подставляя найденные значения величин в формулу (8-21), для величины, стоящей в квадратных скобках, имеем

$$0,5298 + 0,0011 = 0,5309.$$

Так как

$$\frac{1}{8} \frac{D^2 b^2}{B^4} = 0,034 \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{8} \mu_0 \omega W \frac{A + 2x}{A} \frac{d^2}{B} \cos \theta = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} \cdot 10^{-5},$$

то

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\pi^2}{2} \sqrt{2} \cdot 10^{-5} \{1 - 0,034 \cdot 0,531\} = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{2} \cdot 10^{-5} \{1 - 0,0181\} = \\ &= 6,853 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.} \end{aligned}$$

Аналогичным путем определяем  $M_2$ , для чего в формуле (8-21) заменяем  $A$  на  $(A - 2x)$  и  $W$  на  $W \frac{A-2x}{A}$ . Величины  $b$ ,  $\gamma_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_4$ ,  $P_3$  и  $P_5$  остаются теми же, что и при определении  $M_1$ . Заново вычисляем следующие величины:

$$B^2 = \frac{1}{4} [D^2 + (A - 2x)^2] = \frac{1}{4} (0,2^2 + 0,1^2) = 0,0125;$$

$$\gamma_2^2 = 0,8; \quad \beta^2 = 0,2180;$$

$$\eta = -0,4; \quad \eta_2 \xi_4 \beta^2 \frac{P_5(0,5)}{0,5} = -0,0054; \quad 0,5298 - 0,0054 = 0,5244;$$

$$\frac{1}{8} \frac{D^2 b^2}{B^4} = 0,0872; \quad \frac{\pi^2}{8} \mu_0 \omega W \frac{A - 2x}{A} \frac{d^2}{B} \cos \theta = \frac{\pi^2}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{\pi^2}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-5} \{1 - 0,0872 \cdot 0,524\} = \frac{\pi^2}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-5} \{1 - 0,0457\} = \\ &= 0,4211 \cdot 100^{-4} \text{ Гн.} \end{aligned}$$

Искомая взаимная индуктивность

$$M = \frac{1}{2} (6,853 + 4,211) \cdot 10^{-5} = 5,532 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$



## 8-11. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДА И КОНЦЕНТРИЧЕСКОГО С НИМ КРУГОВОГО КОНТУРА

Взаимная индуктивность соленоида и концентрического с ним кругового контура

$$M = \frac{\pi}{8} \mu_0 W \frac{d^2}{B} \cos \theta \left\{ 1 + \frac{3}{8} \gamma^2 \beta^2 \left[ \frac{P_3(\nu)}{\nu} - \frac{5}{6} \varphi_2 \beta^2 \frac{P_5(\nu)}{\nu} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{35}{48} \varphi_4 \beta^4 \frac{P_7(\nu)}{\nu} - \frac{21}{32} \varphi_6 \beta^6 \frac{P_9(\nu)}{\nu} + \dots \right] \right\}, \quad (8-26)$$

где  $W$  — число витков соленоида;  $d$  — диаметр контура;  $B = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + A^2}$ ;  $D$  и  $A$  — диаметр и длина соленоида;  $\beta = d/2B$ ;  $\gamma = D/(2B)$ ;  $\nu = \cos \theta$ ;  $\theta$  — угол между осями соленоида и витка (рис. 8-14);  $\varphi_2, \varphi_4, \dots$  — функции от  $\gamma$ , определяемые по формулам (8-22) или по табл. 7-3;  $P_3(\nu), P_5(\nu), \dots$  — полиномы Лежандра, вычисляемые по формулам или таблицам, приведенным в приложениях 1 и 5.

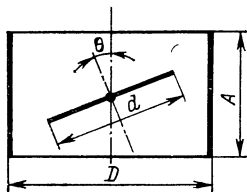


Рис. 8-14

Формула (8-26) применима и в том случае, когда место контура занимает катушка с таким же средним диаметром и с достаточно малым поперечным сечением. В этом случае для получения взаимной индуктивности соленоида и катушки правую часть формулы (8-26) следует умножить на число витков катушки.

## 8-12. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДА И ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО С НИМ КРУГОВОГО КОНТУРА

Предполагается, что центр контура лежит на оси соленоида на расстоянии  $x$  от его центра (рис. 8-15). Соленоид имеет диаметр  $D$ , длину  $A$  и число витков  $W$ . Диаметр контура равен  $d$ . Оси соленоида и контура составляют угол  $\theta$ .

Если центр контура лежит внутри соленоида (рис. 8-15, а), то взаимную индуктивность соленоида и контура можно найти по формуле

$$M = \frac{1}{2} (M_1 + M_2), \quad (8-27)$$

где  $M_1$  — взаимная индуктивность данного контура и концентрического с ним соленоида длиной  $A + 2x$ ;  $M_2$  — то же для соленоида длиной  $A - 2x$ , причем в обоих случаях со-

леноиды должны иметь тот же диаметр  $D$  и ту же плотность витков  $W/A$ , что и данный соленоид, а угол между осями контура и соленоидов должен быть равен заданному углу  $\theta$ .

Если центр контура лежит вне соленоида (рис. 8-15, б), то взаимная индуктивность соленоида и контура может быть найдена по формуле

$$M = \frac{1}{2} (M_1 - M_2), \quad (8-28)$$

где  $M_1$  — то же, что и в формуле (8-27), а  $M_2$  — взаимная индуктивность данного контура и концентрического с ним

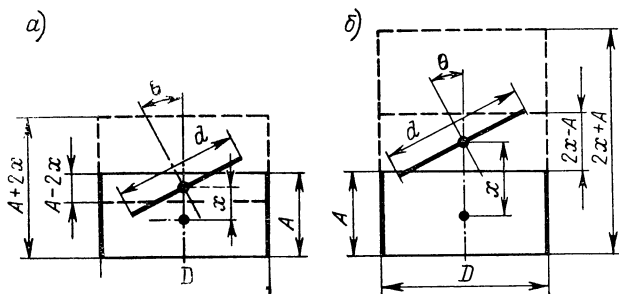


Рис. 8-15

соленоида длиной  $2x - A$ , имеющего тот же диаметр  $D$  и ту же плотность витков  $W/A$ , что и данный соленоид; угол между осями соленоида и контура и в этом случае предполагается равным  $\theta$ .

Для определения  $M_1$  и  $M_2$  в формулах (8-27) и (8-28) можно пользоваться формулой (8-26) с соответствующей заменой обозначений:  $A$  на  $A + 2x$  (или на  $A - 2x$ ),  $W$  на  $W \frac{A + 2x}{A}$  (или на  $\pm W \frac{A - 2x}{A}$ ) и т. д.

В случае когда контур удален от соленоида на значительное расстояние ( $x$  значительно больше, чем  $A$ ), для определения взаимной индуктивности контура и соленоида целесообразно пользоваться методом эквивалентных круговых контуров (§ 7-12), заменяя соленоид двумя круговыми контурами и определяя взаимную индуктивность между ними и основным контуром по формулам и таблицам § 5-11 и 5-12.

Формулы (8-27) и (8-28) применимы и в том случае, когда место контура занимает катушка с таким же средним диаметром  $d$  и с достаточно малым поперечным сечением. В этом

случае для получения взаимной индуктивности соленоида и катушки правую часть формул (8-27) и (8-28) следует умножить на число витков катушки.

### **8-13. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШЕК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ**

Для расчета взаимной индуктивности катушек прямоугольного сечения с пересекающимися осями следует пользоваться методом эквивалентных круговых контуров (§ 7-12), заменяя каждую из катушек двумя эквивалентными контурами так, как указано в § 7-12, и определяя взаимные индуктивности этих контуров по формулам и методам, приведенным в § 5-11 и 5-12.

### **8-14. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КАТУШЕК С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ ПРИ СЛОЖНОЙ ФОРМЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

Расчет взаимной индуктивности катушек с пересекающимися осями при сложной форме поперечного сечения следует производить так, как указано в § 7-14; причем для определения взаимных индуктивностей центральных витков катушек ( $M_0$ ) или их частей ( $M_{ki}$ ) можно пользоваться формулами, таблицами и методами, приведенными в § 5-11 и 5-12.

## **ГЛАВА ДЕВЯТАЯ**

---

## **ИНДУКТИВНОСТИ КАТУШЕК СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ И НАЗНАЧЕНИЯ**

---

### **9-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ**

1. В настоящей главе даны формулы, таблицы и кривые для расчета собственных и взаимных индуктивностей прямоугольных, многоугольных, тороидальных, сферических и сфероидальных катушек. Эти формулы, таблицы и кривые могут быть использованы, в частности, при расчете реакторов, а также радиотехнических катушек и рамок. В § 9-13

указан метод расчета индуктивностей рассеяния трансформаторов.

2. В зависимости от соотношения между размерами катушек применяется терминология, аналогичная данной в § 6-1.

3. Все формулы и таблицы настоящей главы дают значения так называемых расчетных индуктивностей и взаимных индуктивностей (§ 6-1 и 7-1), т. е. индуктивностей, вычисленных в предположении, что витки катушек представляют собой коаксиальные контуры \*, имеют бесконечно тонкую изоляцию и плотно заполняют все пространство, занятое обмотками; кроме того, предполагается, что витки катушек уложены равномерно как по оси катушек, так и в перпендикулярном к ней направлении.

Отличие действительной собственной индуктивности от расчетной обычно невелико и при желании может быть учтено путем прибавления к расчетной индуктивности так называемых поправок на изоляцию (§ 1-14 и 6-9):

$$\Delta_1 L = \frac{\mu_0}{2\pi} \omega l I; \quad \Delta_2 L = \frac{\mu_0}{2\pi} \omega l J, \quad (9-1; 9-2)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $l$  — длина ее среднего витка;  $I$  и  $J$  — величины, определяемые в различных случаях так, как указано в § 6-9.

Отличие действительной взаимной индуктивности от расчетной, как правило, ничтожно и в расчетах не учитывается.

4. При определении расчетной индуктивности средний диаметр каждой катушки (или средний размер ее витка) берется равным среднему диаметру (или среднему размеру витка) действительной катушки; аксиальный размер обмотки ( $a$ ) и ее размер в перпендикулярном к оси направлении ( $r$ ) принимаются равными шагу обмотки, умноженному на число слоев обмотки в данном направлении (например, для катушки, сечение которой изображено на рис. 6-11,  $a = 2p$ ,  $r = 2q$ ).

Если катушка имеет в каком-либо направлении только один слой, ее размер ( $r$  или  $a$ ) в этом направлении обычно принимают равным нулю, т. е. рассчитывают катушку как соленоид или соответственно как плоскую катушку.

---

\* У тороидальных катушек общей осью витков является круговой контур, проходящий через центры витков.

5. Все формулы и таблицы настоящей главы получены в предположении, что ток распределен по сечениям отдельных витков равномерно, и пригодны, следовательно, для определения индуктивностей, строго говоря, лишь при низкой частоте. Неравномерность распределения тока по сечениям витков весьма мало сказывается на взаимной индуктивности катушек и может привести к заметному изменению лишь их собственных индуктивностей. Расчет индуктивностей катушек с учетом поверхностного эффекта представляет собой задачу, еще не получившую удовлетворительного решения.

Для оценки погрешности, вызываемой пренебрежением поверхностным эффектом, следует иметь в виду, что поправка на изменение частоты является величиной того же порядка, что и поправка на изоляцию.

6. При одинаковом распределении тока по сечению расчетные индуктивности катушек отличаются от индуктивностей соответствующих массивных контуров только множителем  $\omega^2$  (§ 1-14). Поэтому приведенные в этой главе формулы и таблицы могут быть использованы и для определения индуктивностей массивных контуров при низкой частоте.

## 9.2. ИНДУКТИВНОСТЬ КВАДРАТНОГО СОЛЕНОИДА

Индуктивность квадратного соленоида

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 c \Phi, \quad (9-3)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида;  $c$  — сторона квадрата, являющегося основанием соленоида (рис. 9-1);  $\Phi$  — величина, значения которой даны в табл. 9-1 в зависимости от отношения  $\gamma = c/a$ , где  $a$  — длина соленоида.

Для более точного определения индуктивности соленоида можно пользоваться формулами:

при  $\gamma = c/a > 1$  (короткий соленоид)

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \gamma + 0,72599 + \frac{1}{3\gamma} - 0,007149 \frac{1}{\gamma^2} - 0,007261 \frac{1}{\gamma^4} + \right. \\ \left. + 0,00345 \frac{1}{\gamma^6} - 0,00624 \frac{1}{\gamma^8} + \dots \right); \quad (9-4)$$

при  $\gamma = c/a < 1$  (длинный соленоид)

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \gamma \left( 1,570796 - 0,75330\gamma + 0,25\gamma^2 - \right. \\ \left. - 0,0417\gamma^4 + 0,0177\gamma^6 - 0,0108\gamma^8 + \right. \\ \left. + 0,0081\gamma^{10} - 0,0071\gamma^{12} + \dots \right). \quad (9-5)$$

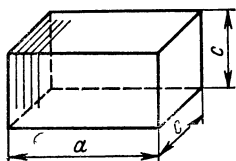


Рис. 9-1

**Таблица 9-1. Значения величины  $\Phi$  в формуле (9-3) для квадратного соленоида**

$\gamma$	$\Phi$	$\gamma$	$\Phi$	$\gamma$	$\Phi$
0,05	0,6137	1,4	10,36	3,8	17,18
0,1	1,199	1,6	11,20	4,0	17,56
0,2	2,291	1,8	11,97	4,5	18,43
0,3	3,288	2,0	12,67	5,0	19,21
0,4	4,200	2,2	13,31	6,0	20,59
0,5	5,037	2,4	13,91	7,0	21,76
0,6	5,808	2,6	14,47	8,0	22,78
0,7	6,522	2,8	14,99	9,0	23,68
0,8	7,184	3,0	15,48	10,0	24,50
0,9	7,800	3,2	15,94	11,0	25,23
1,0	8,378	3,4	16,38	12,0	25,91
1,2	9,428	3,6	16,79	—	—
1,4	10,36	3,8	17,18	—	—

Точное значение индуктивности можно найти по формуле

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \left\{ \ln(\gamma + \alpha) - (1 - \gamma^2) \ln \frac{\gamma + \beta}{\alpha} - \right. \\ \left. - \gamma^2 \left[ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right] + \frac{1}{3\gamma} - \frac{1}{3} (2 - \gamma^2) \frac{\alpha}{\gamma} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (1 - \gamma^2) \frac{\beta}{\gamma} + 2\gamma \operatorname{arctg} \frac{1}{\beta} \right\}, \quad (9-6)$$

где  $\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2}$ ;  $\beta = \sqrt{1 + 2\gamma^2}$ .

Для однослойных катушек и рамок из провода кругового сечения расчеты, выполненные по формулам (9-3)—(9-6), могут быть проверены с помощью формулы

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega c \left[ \ln \frac{c}{r_1} - 0,524 + (\omega - 1) \left( \ln \frac{c}{p} - 0,774 \right) - \omega f_\omega + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2 - 1}{3} \frac{p}{c} - 0,0072\omega (\omega^2 - 1) \frac{p^2}{c^2} \right], \quad (9-7)$$

где  $r_1$  — радиус голого провода;  $p$  — шаг обмотки;  $f_\omega$  — функция от числа витков, данная в табл. 9-2 для  $\omega \leq 40$ .

При  $\omega > 40$  можно определять  $f_\omega$  по формуле

$$f_\omega = \ln(\omega + 2) - 1,5. \quad (9-8)$$

Формула (9-7), полученная методом суммирования (§ 1-14), не требует внесения поправок на изоляцию и дает (в пределах точности расчета) тот же результат, что и предыдущие формулы после внесения поправок на изоляцию (§ 9-1).

**Пример 9-1.** Однослойная рамка имеет  $\omega = 20$  витков и выполнена в виде квадратного соленоида. Сторона квадрата, лежащего в основании

**Таблица 9-2. Значения величины  $f_w$  в формуле (9-7) для квадратного соленоида**

$w$	$f_w$	$w$	$f_w$	$w$	$f_w$
3	0,1540	14	1,2664	25	1,791
4	0,3106	15	1,3271	26	1,827
5	0,4530	16	1,3844	27	1,863
6	0,5806	17	1,4385	28	1,897
7	0,6951	18	1,4900	29	1,930
8	0,7986	19	1,539	30	1,961
9	0,8928	20	1,586	32	2,022
10	0,9792	21	1,630	34	2,080
11	1,0589	22	1,673	36	2,134
12	1,1328	23	1,714	38	2,185
13	1,2018	24	1,753	40	2,234

соленоида, равна  $c = 55$  см, шаг обмотки  $p = 0,5$  см, радиус голого провода  $r_1 = 1,05$  мм. Определить индуктивность рамки.

**Р е ш е н и е.**

1. Применяем формулу (9-3). В данном случае длина соленоида  $a = pw = 10$  см  $= 0,1$  м и  $\gamma = ca = 5,5$ .

По табл. 9-1 находим  $\Phi = 19,90$ . Следовательно,

$$L = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 0,55 \cdot 19,90 = 4,378 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

2. Применяем формулу (9-4). Подставляя в эту формулу  $\gamma = 5,5$ ;  $\ln \gamma = 1,705$ ;  $1/(3\gamma) = 0,061$ , имеем

$$L = \frac{2}{\pi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 0,55 (1,705 + 0,726 + 0,061) = 4,386 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

3. Применяем формулу (9-6). В данном случае

$$\alpha = \sqrt{31,25} = 5,590; \quad \beta = \sqrt{61,5} = 7,842; \quad 1/(3\gamma) = 0,0606;$$

$$\ln(\gamma + \alpha) = 2,406; \quad \ln \frac{\gamma + \beta}{\alpha} = 0,8696; \quad \frac{1}{3} (2 - \gamma^2) \frac{\alpha}{\gamma} = -9,567;$$

$$\gamma^2 \left[ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right] = 30,25 (0,3333 - 0,4713 + 0,8813) = 22,48;$$

$$\frac{1}{3} (1 - \gamma^2) \frac{\beta}{\gamma} = -13,90; \quad \frac{1}{\beta} = 0,1275; \quad 2\gamma \arctg \frac{1}{\beta} = 1,39.$$

Таким образом,

$$L = 1,760 \cdot 10^{-4} (2,41 + 25,44 - 22,48 + 0,06 + 9,57 - 13,90 + 1,39) = 1,760 \cdot 10^{-4} \cdot 2,49 = 4,382 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Следует отметить, что формула (9-6) содержит разность близких величин, вследствие чего, сохраняя при расчетах четвертую цифру, можно в ответе получить неверной уже третью цифру.

Расхождение между результатами расчета по трем разным формулам незначительно. Все три ответа дают значение расчетной индуктивности. Для получения действительной индуктивности рамки вносим поправку на изоляцию:

$$\Delta L = \Delta_1 L + \Delta_2 L = \frac{\mu_0}{\pi} \omega \cdot 2c (I + J).$$

Величину  $I$  определяем по табл. 6-9. При  $\delta/p = 0,42$  имеем  $I = +0,3106$ . По табл. 6-11 при  $\omega = 20$  находим  $J = -0,2964$ . Следовательно,

$$\Delta L = \frac{4\pi}{\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 0,55 (0,3106 - 0,2964) = 1,250 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

В данном случае величины  $I$  и  $J$  имеют разные знаки и очень близки друг к другу, так что суммарная поправка на изоляцию весьма мала. Прибавив  $\Delta L$  к найденным выше значениям  $L$ , получим действительную индуктивность катушки. Например, при расчете по формуле (9-3) действительная индуктивность равна  $L + \Delta L = 4,379 \cdot 10^{-4}$  Гн.

4. Применяем формулу (9-7):

$$\ln \frac{c}{r} = \ln \frac{550}{1,05} = 6,261; \quad \ln \frac{c}{p} = \ln \frac{550}{5} = 4,700;$$

$$(\omega - 1) \left( \ln \frac{c}{p} - 0,774 \right) = 74,59.$$

По табл. 9-2 при  $\omega = 20$  находим  $f_\omega = 1,586$  и  $\omega f_\omega = 32,72$ ;  $\frac{\omega^2 - 1}{3} \frac{p}{c} = 1,209$ ;  $0,0072\omega (\omega^2 - 1) \frac{p^2}{c^2} = 4,65 \cdot 10^{-3}$ .

Искомая индуктивность

$$L = \frac{2}{\pi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 0,55 (6,26 - 0,52 + 74,59 - 31,72 + 1,21) = 4,384 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}.$$

### 9-3. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СОЛЕНОИДА

Индуктивность прямоугольного соленоида

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \omega^2 [c (\varphi_c - \psi_c) + b (\varphi_b - \psi_b)], \quad (9-9)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида;  $c$  и  $b$  — стороны прямоугольника, лежащего в основании соленоида (рис. 9-2). Значения величин  $\varphi_c$  и  $\varphi_b$  находят по кривой рис. 9-3, положив в первом случае  $\gamma = c/a$ , а во втором  $\gamma = b/a$ , где  $a$  — длина соленоида; значения  $\psi_c$  и  $\psi_b$  находят по кривым рис. 9-4, положив в первом случае  $\gamma = c/a$  и  $\delta = b/a$ , а во втором  $\gamma = b/a$  и  $\delta = c/a$ .

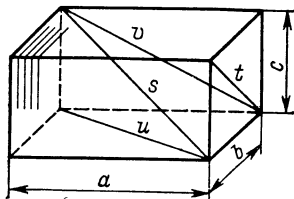


Рис. 9-2



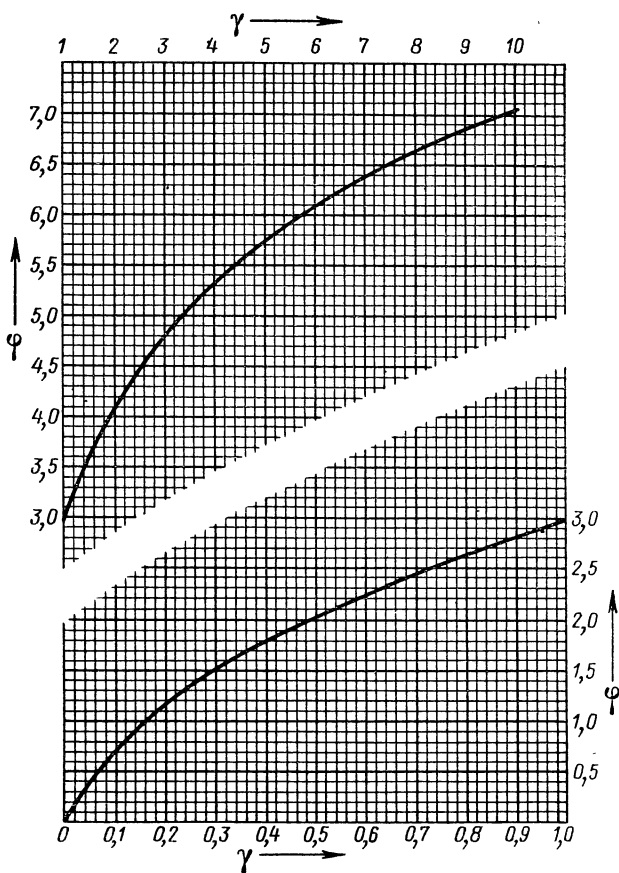


Рис. 9-3

Более точно

$$L = \mu_0 \omega^2 \frac{bc}{a} K, \quad (9-10)$$

где коэффициент  $K$  определяется по следующим формулам, в которых через  $c$  обозначена б о л ь ш а я сторона прямоугольника ( $c > b$ ):

при  $\gamma = c/a > 1$  (короткий соленоид)

$$K = \frac{\beta_1}{\gamma} + \frac{\beta'_1}{\gamma} \ln \gamma + \frac{\beta_2}{\gamma^2} + \frac{\beta_3}{\gamma^3} - \frac{\beta_5}{\gamma^5} + \dots, \quad (9-11)$$

где  $\beta_1, \beta'_1, \beta_2 \dots$  — коэффициенты, значения которых даны в табл. 9-3 в зависимости от отношения  $\xi = b/c$ ;

при  $\gamma = c/a < 1$  (длинный соленоид)

$$K = 1 - \alpha_1 \gamma + \alpha_2 \gamma^2 - \alpha_4 \gamma^4 + \alpha_6 \gamma^6 - \alpha_8 \gamma^8 + \dots, \quad (9-12)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  — коэффициенты, значения которых даны в табл. 9-4 в зависимости от отношения  $\xi = b/c$ .

Ряд (9-11) сходится только при  $1/\gamma < \xi$ , и поэтому за исключением соленоидов, близких к квадратному ( $\xi$  близко к единице), область возможного применения этой формулы узка.

Формула (9-12) дает достаточно высокую степень точности при всех значениях  $\xi$  и  $\gamma$  вплоть до единицы.

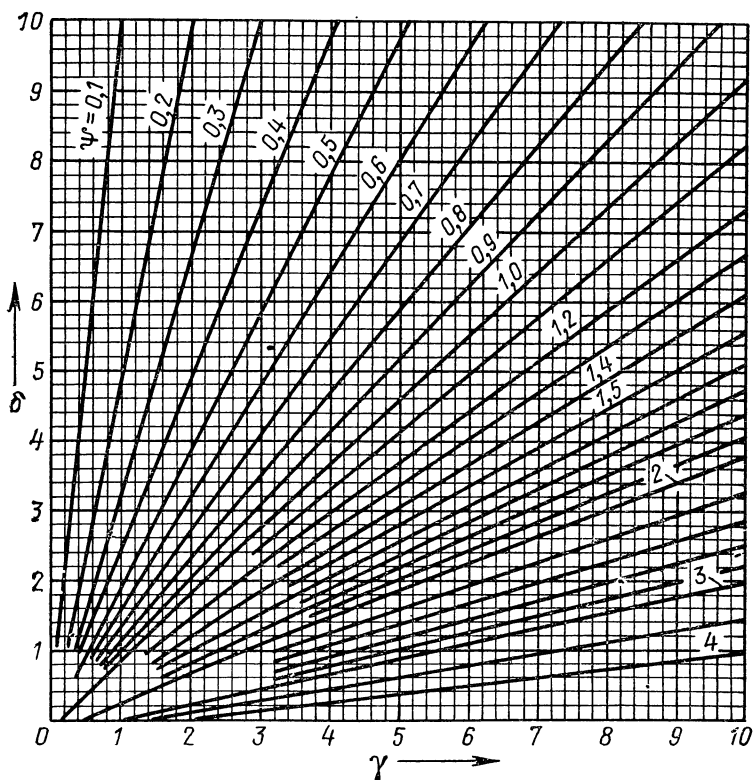


Рис. 9-4

**Таблица 9-3. Значения коэффициентов  $\beta$  в формуле (9-11) для прямоугольного соленоида**

$\xi$	$\beta_1$	$\beta'_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_7$
1,00	0,4622	0,6366	0,2122	-0,0046	0,0046	-0,0382
0,95	4574	6534	2234	0046	0053	—
90	4512	6720	2358	0046	0064	-0,0525
85	4448	6928	2496	0042	0080	—
80	4364	7162	2653	0031	0103	-0,0838
0,75	0,4260	0,7427	0,2829	-0,0010	0,0141	—
70	4132	7730	3032	+0,0026	0198	-0,1564
65	3971	8080	3265	0085	0291	—
60	3767	8488	3537	0179	0432	-0,3372
55	3500	8970	3858	0331	0711	—
0,50	3151	0,9549	0,4244	0,0578	1183	-0,7855
40	+0,1836	1,1141	5305	1697	0,3898	-2,403
30	-0,0314	1,3359	0,7074	0,5433	2,0517	-7,85
20	-0,6409	1,9099	1,0610	2,3230	14,507	+15,51
0,10	-3,2309	3,5014	2,1220	22,548	497,36	+14280

Т о ч н о е значение индуктивности прямоугольного соленоида можно найти по формуле

$$\begin{aligned}
 L = \frac{\mu_0}{\pi} \omega^2 \frac{bc}{a} & \left[ \frac{a}{b} \ln \frac{c+v}{a} + \frac{a}{c} \ln \frac{b+u}{a} - \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \ln \frac{c+s}{u} - \right. \\
 & - \left( \frac{a}{c} - \frac{c}{a} \right) \ln \frac{b+t}{v} - \frac{b}{a} \ln \frac{c+t}{b} - \frac{c}{a} \ln \frac{b+t}{c} + \frac{2}{3} \frac{a^2}{bc} - \\
 & - \frac{1}{3} \left( 2 \frac{a}{c} - \frac{c}{a} \right) \frac{v}{b} - \frac{1}{3} \left( 2 \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \frac{u}{c} + \frac{1}{3} \frac{2a^2 - t^2}{abc} s + \\
 & \left. + \frac{t^3 - b^3 - c^3}{3abc} + 2 \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{bc}{as} \right) \right], \quad (9-13)
 \end{aligned}$$

где  $s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ;  $t = \sqrt{b^2 + c^2}$ ;  $u = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $v = \sqrt{a^2 + c^2}$  (рис. 9-2).

Ввиду громоздкости этой формулы ею следует пользоваться только для коротких соленоидов и лишь при  $1/\gamma > \xi$ , когда формула (9-11) неприменима.

**Пример 9-2.** Соленоид длиной  $a = 2,5$  см имеет прямоугольное основание, размеры которого  $b = 10$  см и  $c = 15$  см. Соленоид имеет  $w = 25$  витков. Определить индуктивность соленоида.

**Р е ш е н и е.**

1. Применяем формулу (9-9) и кривые рис. 9-3 и 9-4.

При  $\gamma = c/a = 6$  и  $\delta = b/a = 4$  находим  $\varphi_c = 6,07$ ;  $\psi_c = 1,3$ .

При  $\gamma = b/a = 4$  и  $\delta = c/a = 6$  находим  $\varphi_b = 5,40$ ;  $\psi_b = 0,64$ .

Подставляя эти значения в формулу (9-9), имеем

$$L = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 625 [0,15 (6,07 - 1,3) + 0,1 (5,40 - 0,64)] = 1,50 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

2. Для более точного определения индуктивности применяем формулу (9-10), находя  $K$  по формуле (9-11). В данном случае  $\xi = 0,6667$  и из табл. 9.3 находим

$$\beta_1 = 0,4031; \quad \beta'_1 = 0,7957; \quad \beta_2 = 0,3183; \quad 1/\gamma = 0,1667;$$

$$\ln \gamma = 1,792; \quad \frac{\beta_1}{\gamma} = 0,06718; \quad \frac{\beta'_1}{\gamma} \ln \gamma = 0,2376; \quad \frac{\beta_2}{\gamma^2} = 0,0088.$$

$$\text{Следовательно, } K = 0,0672 + 0,2376 + 0,0088 = 0,3136;$$

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 625 \frac{0,10 \cdot 0,15}{0,025} \cdot 0,3136 = 4,714 \cdot 0,3136 \cdot 10^{-4} = 1,478 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

3. Применяем формулу (9-13). В данном случае  $u = 10,31$  см;  $v = 15,21$  см;  $t = 18,03$  см;  $s = 18,20$  см;

$$a/b = 0,25; \quad b/a = 4; \quad a/c = 0,1667; \quad c/a = 6; \quad bc/a = 60 \text{ см.}$$

$$\ln \frac{c+v}{a} = 2,492; \quad 0,25 \cdot 2,492 = 0,6230;$$

$$\ln \frac{b+u}{a} = 2,095; \quad 0,1667 \cdot 2,095 = 0,3492;$$

$$\ln \frac{c+s}{u} = 1,169; \quad \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = -3,75; \quad -3,75 \cdot 1,169 = -4,383;$$

$$\ln \frac{b+s}{v} = 0,6173; \quad \frac{a}{c} - \frac{c}{a} = -5,833; \quad -5,833 \cdot 0,6173 = -3,601;$$

Таблица 9-4. Значения коэффициентов  $\alpha$  в формуле (9-12) для прямоугольного соленоида

$\xi$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\alpha_6$	$\alpha_8$
1,00	0,4732	0,1592	0,0265	0,0113	0,0102
0,95	4612	1512	0240	0097	0085
90	4486	1432	0216	0084	0070
85	4356	1353	0194	0072	0058
80	4220	1273	0174	0062	0048
0,75	0,4077	0,1194	0,0155	0,0053	0,0040
70	3928	1114	0138	0046	0034
65	3773	1035	0123	0040	0028
60	3608	0955	0108	0034	0024
55	3435	0875	0095	0029	0020
0,50	0,3251	0,0796	0,0083	0,0025	0,0017
45	3056	0716	0072	0022	0015
40	2847	0637	0062	0018	0012
35	2623	0557	0052	0016	0011
30	2381	0477	0043	0013	0009
0,25	0,2117	0,0398	0,0035	0,0010	0,0007
20	1826	0318	0028	0008	0005
15	1499	0239	0020	0006	0004
10	1124	0159	0013	0004	0003
0,05	0,0669	0,0080	0,0007	0,0002	0,0001

$$\ln \frac{c+t}{b} = 1,195; \quad 4 \cdot 1,195 = 4,780;$$

$$\ln \frac{b+t}{c} = 0,6254; \quad 6 \cdot 0,6254 = 3,752;$$

$$\frac{2}{3} \frac{a^2}{bc} = 0,0278; \quad \frac{1}{3} \left( 2 \frac{a}{c} - \frac{c}{a} \right) \frac{v}{b} = -2,873;$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{2a}{b} - \frac{b}{a} \right) \frac{u}{c} = -0,802;$$

$$\frac{2a^2 - t^2}{3abc} = -5,056; \quad \frac{t^3 - b^3 - c^3}{3abc} = 1,320; \quad \frac{bc}{as} = 3,297;$$

$$2 \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{bc}{as} \right) = 0,590.$$

Искомая индуктивность

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot 625 \cdot 0,6 (0,623 + 0,349 + 4,383 + 3,601 - 4,780 - 3,752 + \\ + 0,028 + 2,873 + 0,802 - 5,056 + 1,320 + 0,590) = \\ = 1,500 \cdot 0,981 \cdot 10^{-4} = 1,472 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Так как формула (9-13) содержит разности относительно близких величин, то при расчете с четырьмя знаками четвертая значащая цифра ответа в приведенном примере недостоверна, хотя сама формула и является точной.

#### 9.4. ИНДУКТИВНОСТЬ КВАДРАТНОЙ ПЛОСКОЙ КАТУШКИ

Индуктивность квадратной плоской катушки

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 (c + r) \Phi, \quad (9-14)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $c$  — сторона среднего витка катушки;  $r$  — толщина катушки (рис. 9-5);  $\Phi$  — величина, значения которой даны в табл. 9-5 в зависимости от отношения  $\rho = \frac{r}{c+r}$ .

Для более точного определения индуктивности квадратной плоской катушки с обмоткой из провода кругового сечения может служить формула

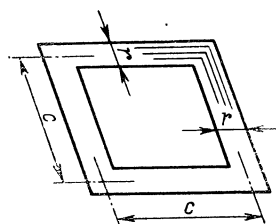


Рис. 9-5

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega c \left[ \ln \frac{c}{r_1} - 0,524 + (\omega - 1) \times \right. \\ \times \left( \ln \frac{c}{p} - 0,774 \right) + (\omega^2 - 1) \cdot 0,178 \times \\ \times \left. \frac{p}{c} + \omega (\omega^2 - 1) \cdot 0,125 \frac{p^2}{c^2} - \omega f_{\omega} \right], \quad (9-15)$$

где  $c$  — сторона среднего витка;  $p$  — шаг обмотки;  $r_1$  — радиус голого провода;  $f_{\omega}$  —

**Таблица 9-5. Значения коэффициента  $\Phi$  в формуле (9-14) для квадратной плоской катушки**

$\rho$	$\Phi$	$\rho$	$\Phi$
0,05	27,922	0,26	10,708
0,10	21,108	0,28	9,868
0,12	19,212	0,30	9,087
0,14	17,576	0,32	8,360
0,16	16,131	0,34	7,679
0,18	14,838	0,36	7,005
0,20	13,666	0,38	6,454
0,22	12,600	0,40	5,900
0,24	11,616	0,42	5,386
0,26	10,708	—	—

величина, значения которой в зависимости от числа витков даны в табл. 9-2 для  $w \leq 40$ . При  $w > 40$  для определения  $f_w$  следует пользоваться формулой (9-8).

Формула (9-15) выведена методом суммирования (§ 1-14) и не требует внесения поправки на изоляцию.

Другие способы определения индуктивности плоской квадратной катушки даны в § 9-5 и 9-7.

**Пример 9-3.** Плоская однослойная рамка (катушка) с числом витков  $w = 20$  выполнена из провода диаметром  $\delta_i = 2,10$  мм и имеет форму квадрата, причем средняя длина витка рамки равна 220 см, а шаг обмотки  $\rho = 0,5$  см. Определить индуктивность рамки.

**Решение.** Средняя длина одной стороны витка  $c = 220/4 = 55$  см. Расчетный размер рамки  $r = w\rho = 20 \cdot 0,5 = 10$  см.

1. Определяем индуктивность по формуле (9-14). Отношение  $\rho = 10/55 = 0,1818$ . По табл. 9-5 находим  $\Phi = 16,58$ , и, следовательно, расчетная индуктивность рамки

$$L = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 0,65 \cdot 16,58 = 4,311 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Для определения действительной индуктивности рамки следует внести поправку на изоляцию. Эта поправка в данном примере равна поправке вычисленной в примере 9-1, так как в обоих случаях величины  $c$ ,  $w$ ,  $\rho$  и  $\delta_i$  одинаковы. Вследствие малости этой поправки пренебрегаем ею.

2. Более точное значение индуктивности находим по формуле (9-15). В данном случае

$$\ln \frac{c}{r_1} = 6,261; \quad (w-1) \left( \pi \frac{c}{\rho} - 0,774 \right) = 74,59;$$

$$(w^2 - 1) \cdot 0,178 \frac{\rho}{c} = 0,65; \quad w (w^2 - 1) \cdot 0,125 \frac{\rho^2}{c^2} = 0,01.$$

По табл. 9-2 при  $w = 20$  находим  $f_w = 1,586$ , и, следовательно,  $wf_w = 31,72$ .

Таким образом,

$$L = \frac{2}{\pi} 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,55 \cdot 20 (6,26 - 0,52 + 74,59 + 0,65 + 0,01 - 31,72) = 4,335 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Сравнение полученного в этом примере результата с результатом примера 9-1 показывает, что при одинаковом среднем размере витка, одинаковом размере поперечного сечения обмотки и равном числе витков плоская катушка имеет почти такую же индуктивность, как соленоид.

## 9.5. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КАТУШКИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Если размеры  $a$  и  $r$  поперечного сечения прямоугольной катушки малы по сравнению со сторонами  $b$  и  $c$  ее среднего витка (рис. 9-6), то индуктивность катушки может быть определена по формуле

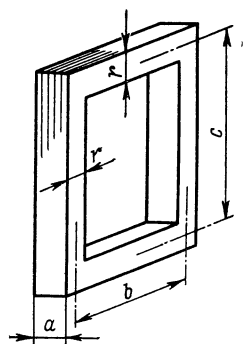


Рис. 9-6

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \omega^2 (b+c) \left[ \ln \frac{2bc}{a+r} - \frac{c}{b+c} \ln (c + \sqrt{b^2 + c^2}) - \frac{b}{b+c} \ln (b + \sqrt{b^2 + c^2}) + \frac{2\sqrt{b^2 + c^2}}{b+c} - \frac{1}{2} + 0,447 \times \right. \\ \left. \times \frac{a+r}{b+c} \right], \quad (9-16)$$

где  $\omega$  — число витков катушки.

Для квадратной катушки ( $c = b$ ) формула принимает вид

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \frac{c}{a+r} + 0,2235 \frac{a+r}{c} + 0,726 \right). \quad (9-17)$$

Если катушка является плоской, то в формулах (9-16) и (9-17) следует положить  $a = 0$ . Для соленоида следует принять  $r = 0$ .

## 9.6. ИНДУКТИВНОСТИ МНОГОУГОЛЬНЫХ СОЛЕНОИДОВ

Индуктивность многоугольного соленоида, основанием которого служит правильный  $n$ -угольник (рис. 9-7), близка к индуктивности кругового соленоида, имеющего ту же длину, то же число витков и ту же площадь основания; причем это

соотношение тем точнее, чем длиннее соленоиды и чем больше число сторон многоугольника.

Пусть  $d$  — диаметр кругового соленоида, индуктивность которого равна индуктивности данного многоугольного соленоида;

$d_0$  — диаметр круга, площадь которого равна площади многоугольника, являющегося основанием соленоида;

$D$  — диаметр круга, описанного вокруг этого многоугольника.

Тогда отношение  $d/d_0$  должно быть тем ближе к единице, чем больше число сторон многоугольника и чем больше отношение длины соленоида  $a$  к диаметру описанного круга  $D$ , что отчетливо видно из табл. 9-6, где отношение  $d/d_0$  дано в зависимости от отношения  $a/D$  для  $n = 3, 4, 6, 8, 12$ .

Расчет индуктивности многоугольного соленоида выполняют, сводя эту задачу к расчету индуктивности эквивалентного кругового соленоида. По заданной стороне многоугольника  $c$ , числу его сторон  $n$  и длине соленоида  $a$  определяют диаметр описанного круга

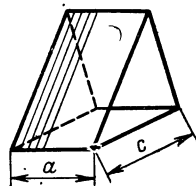


Рис. 9-7

$$D = \frac{c}{\sin \pi/n} \quad (9-18)$$

и отношение  $\alpha = a/D$ , после чего по табл. 9-6 можно найти соответствующее ему отношение  $d/d_0$ , умножая которое на

$$\frac{d_0}{D} = \sqrt{\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}}, \quad (9-19)$$

получают  $d/D$ . Для облегчения расчетов значения  $d/D$  даны в табл. 9-6, откуда их можно взять непосредственно, не определяя  $d/d_0$ . Умножая  $d/D$  на  $D$ , получают диаметр  $d$  эквивалентного кругового соленоида, индуктивность которого  $L$  может быть определена так, как указано в гл. 6. Индуктивность данного многоугольного соленоида равна найденному значению  $L$ .

Для тех значений  $n$ , которых нет в табл. 9-6, величину  $d/d_0$  можно определить путем интерполирования, построив для найденного значения  $\alpha$  кривую зависимости  $d/d_0$  от величины  $1/n$  и приняв во внимание, что при  $1/n = 0$  отношение  $d/d_0 = 1$ .



Таблица 9-6. Вспомогательные величины для расчета индуктивностей многоугольных соленоидов

$n = 3$			$n = 4$			$n = 6$			$n = 8$			$n = 12$		
$\alpha - \frac{a}{D}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$	$\alpha = \frac{a}{D}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$	$\alpha = \frac{a}{D}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$	$\alpha = \frac{a}{D}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$	$\alpha = \frac{a}{D}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$
0,00	1,2861	0,8270	0,00	1,1284	0,9003	0,00	1,0501	0,9549	0,00	1,0270	0,9745	0,00	1,0117	0,9886
01	1,341	7294	01	1,578	8440	01	0203	9278	01	0100	9583	01	0039	9810
02	1,168	7181	02	0500	8378	02	0172	9250	02	0082	9566	02	0034	9805
03	1,052	7107	03	0449	8337	03	0151	9231	03	0071	9556	03	0029	9800
04	0,964	7050	04	0410	8306	04	0136	9218	04	0063	9548	04	0025	9796
0,05	1,0892	0,7004	0,05	1,0378	0,8280	0,05	1,0124	0,9206	0,05	1,0056	0,9542	0,05	1,0022	0,9794
06	0,831	6965	06	0351	8259	06	0113	9197	06	0051	9537	06	0019	9791
07	0,779	6931	07	0328	8241	07	0104	9189	07	0047	9533	07	0017	9789
08	0,732	6901	08	0308	8224	08	0097	9183	08	0043	9529	08	0015	9787
09	0,691	6875	09	0290	8210	09	0090	9176	09	0040	9526	09	0013	9785
0,10	1,0654	0,6851	0,10	1,0274	0,8198	0,10	1,0085	0,9171	0,10	1,0037	0,9523	0,10	1,0012	0,9784
125	0,576	6801	125	0241	8171	125	0073	9160	125	0031	9518	125	0010	9782
15	0,512	6760	15	0214	8149	15	0064	9152	15	0026	9514	15	0008	9780
175	0,460	6726	175	0191	8132	175	0056	9145	175	0023	9510	175	0007	9779
20	0,416	6698	20	0173	8117	20	0050	9139	20	0020	9508	20	0006	9778
0,25	1,0345	0,6652	0,25	1,0143	0,8093	0,25	1,0040	0,9131	0,25	1,0016	0,9504	0,25	1,0005	0,9777
30	0,292	6618	30	0121	8075	30	0034	9124	30	0013	9501	30	0004	9776
35	0,251	6592	35	0104	8062	35	0029	9120	35	0011	9499	35	0004	9776
40	0,219	6571	40	0090	8051	40	0025	9117	40	0009	9497	40	0003	9775
45	0,191	6553	45	0079	8042	45	0022	9114	45	1,0008	9496	45	0003	9775
0,50	1,0169	0,6539	0,50	1,0070	0,8035	0,50	1,0020	0,9112	0,50	0,0008	0,9496	0,50	1,0002	0,9774
60	0,139	6520	60	0056	8024	60	0017	9109	60	0007	9495	60	0002	9774
70	0,118	6506	70	0046	8016	70	0014	9107	70	0006	9494	70	0002	9774
80	0,103	6497	80	0039	8010	80	0012	9105	80	0005	9493	80	0001	9773
0,90	0,090	6488	0,90	0,034	8006	0,90	0,011	9104	0,90	0,004	9492	0,90	0,001	9773
1,00	1,0080	0,6482	1,00	1,0030	0,8003	1,00	1,0010	0,9103	1,00	1,0004	0,9492	1,00	1,0001	0,9773

Продолжение табл. 9-6

$n = 3$			$n = 4$			$n = 6$			$n = 8$			$n = 12$		
$Q \frac{v}{Q} \parallel \frac{v}{-}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$	$Q \frac{v}{Q} \parallel \frac{v}{-}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$	$Q \frac{v}{Q} \parallel \frac{v}{-}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$	$Q \frac{v}{Q} \parallel \frac{v}{-}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$	$Q \frac{v}{Q} \parallel \frac{v}{-}$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{d}{D}$
1,0	1,0080	0,6482	1,0	1,0030	0,8003	1,0	1,0010	0,9103	1,0	1,0004	0,9492	1,0	1,0001	0,9773
0,9	0,072	6477	0,9	0,026	8000	0,9	0,009	9102	0,9	0,004	9492	0,9	1,0001	0,9773
8	0,064	6472	8	0,022	7997	8	0,008	9101	8	0,003	9491	—	—	—
7	0,056	6466	7	0,019	7994	7	0,007	9100	7	0,003	9491	—	—	—
6	0,048	6461	6	0,016	7992	6	0,006	9099	6	0,002	9491	—	—	—
0,5	1,0040	0,6456	0,5	1,0013	0,7989	0,5	1,0005	0,9098	0,5	1,0002	0,9490	0,5	1,0000	0,9772
4	0,032	6451	4	0,010	7987	4	0,004	9098	4	0,002	9490	—	—	—
3	0,024	6446	3	0,007	7984	3	0,003	9097	3	0,001	9489	—	—	—
2	0,016	6440	2	0,004	7982	2	0,002	9096	2	0,001	9489	—	—	—
1	0,008	6436	1	0,002	7980	1	0,001	9095	1	0,000	9489	1	1,0000	0,9772
0,0	1,0000	0,6430	0,0	1,0000	0,7979	0,0	1,0000	0,9094	0,0	1,0000	0,9488	0,0	1,0000	0,9772

Для коротких соленоидов, у которых отношение  $\alpha = a/D$  мало, определение отношений  $d/d_0$  или  $d/D$  по табл. 9-6 может оказаться недостаточно точным. В подобных случаях индуктивность многоугольного соленоида можно определить непосредственно по следующим формулам:

при  $n = 3$

$$L = \frac{3}{2\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \frac{1}{\alpha} - 0,04931 + 0,8503\alpha - 0,2037\alpha^2 + \right. \\ \left. + 0,0278\alpha^4 \dots \right); \quad (9-20)$$

при  $n = 4$

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \frac{1}{\alpha} + 0,37942 + 0,4714\alpha - \right. \\ \left. - 0,0143\alpha^2 - 0,290\alpha^4 \dots \right); \quad (9-21)$$

при  $n = 6$

$$L = \frac{3}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \frac{1}{\alpha} + 0,65533 + 0,2696\alpha + \right. \\ \left. + 0,0774\alpha^2 - 0,055\alpha^4 - \dots \right); \quad (9-22)$$

при  $n = 8$

$$L = \frac{4}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \frac{1}{\alpha} + 0,75143 + 0,1869\alpha + \right. \\ \left. + 0,1197\alpha^2 + 0,082\alpha^4 + \dots \right), \quad (9-23)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида.

**Пример 9-4.** Соленоид длиной  $a = 2$  см с числом витков  $\omega = 10$  имеет основание в форме правильного шестиугольника со стороной  $c = 5$  см. Определить индуктивность соленоида.

**Решение.**

1. Применяем метод эквивалентного кругового соленоида. Диаметр описанной окружности в данном случае

$$D = 5/\sin 30^\circ = 10 \text{ см.}$$

Отношение  $\alpha = a/D = 2/10 = 0,2$ , и из табл. 9-6 находим  $d/D = 0,9139$ , откуда диаметр эквивалентного кругового соленоида  $d = 10 \times 0,9139 = 9,139$  см.

Индуктивность кругового соленоида определяем по формуле (6-2). При  $a/d = 2/9,139 = 0,2188$  из табл. 6-2 находим  $K_a = 0,3378$ , и, следовательно,

$$L = \frac{4\pi^2}{4} \cdot 10^{-7} \frac{0,008352}{0,02} \cdot 100 \cdot 0,3378 = 1,393 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

2. Так как в данном случае отношение  $\alpha = a/D$  мало, то можно воспользоваться формулой (9-22).

При  $\alpha = 0,2$  имеем  $\ln 1/\alpha = 1,609$ ,  $\alpha^2 = 0,04$  и, следовательно,

$$L = \frac{3}{\pi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 0,05 (1,609 + 0,655 + 0,054 + 0,003) = \\ = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 2,321 = 1,393 \cdot 10^{-5} \text{ Гн,}$$

что совпадает с предыдущим результатом.

## 9-7. ИНДУКТИВНОСТИ ПЛОСКИХ МНОГОУГОЛЬНЫХ КАТУШЕК

Для расчета индуктивности плоской катушки, витки которой имеют форму правильного многоугольника (рис. 9-8), можно пользоваться методом, изложенным в предыдущем параграфе.

Средний диаметр  $d$  эквивалентной плоской круговой катушки находят по диаметру  $D$  окружности, описанной вокруг среднего витка катушки, — так же как для соленоидов. При этом, пользуясь табл. 9-6, за аргумент принимают отношение  $r/D$ , где  $r$  — радиальный размер (ширина обмотки) катушки. Найдя средний диаметр  $d$  эквивалентной круговой катушки, определяют ее индуктивность  $L$  одним из способов, указанных в § 6-3, считая радиальный размер (толщину) катушки равным радиальному размеру  $r$  многоугольной катушки.

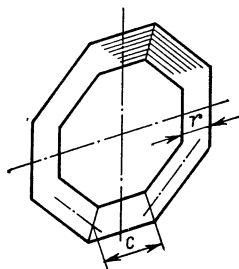


Рис. 9-8

Искомая индуктивность многоугольной катушки равна найденному значению  $L$ .

Если радиальный размер  $r$  мал по сравнению с диаметром  $D$ , то индуктивность катушки может быть определена непосредственно по следующим формулам:

при  $n = 3$

$$L = \frac{3}{2\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \frac{1}{\rho} + 0,0945 + 0,4132\rho + 0,3194\rho^2 + \dots \right); \quad (9-24)$$

при  $n = 4$

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \frac{1}{\rho} + 0,7260 + 0,1776\rho + 0,125\rho^2 + \dots \right); \quad (9-25)$$

при  $n = 6$

$$L = \frac{3}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \frac{1}{\rho} + 1,3485 + 0,0678\rho + 0,0491\rho^2 + \dots \right); \quad (9-26)$$

при  $n = 8$

$$L = \frac{4}{\pi} \mu_0 \omega^2 c \left( \ln \frac{1}{\rho} + 1,7120 + 0,0363\rho + 0,0277\rho^2 + \dots \right), \quad (9-27)$$

где  $\rho = r/c$ , причем через  $c$  обозначена длина стороны среднего витка катушки.

**Пример 9-5.** Плоская катушка с числом витков  $\omega = 10$  имеет форму правильного шестиугольника, причем средняя длина стороны витка  $c = 5$  см, а радиальный размер катушки  $r = 2$  см. Определить индуктивность катушки.

**Решение.**

1. Применяем метод эквивалентной круговой катушки. Диаметр описанной окружности для среднего витка в данном случае, как и в примере 9-4, равен  $D = 10$  см. При  $r/D = 0,2$  по табл. 9-6 находим, что средний диаметр эквивалентной плоской круговой катушки равен  $d = 0,9139 \cdot 10 = 9,139$  см.

Индуктивность этой катушки находим по формуле (6-9). При  $r/d = 2/9,139 = 0,2188$  по табл. 6-3 получаем  $\Psi = 30,40$ . Следовательно,

$$L = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 100 \frac{0,09139}{2} \cdot 30,40 = 1,389 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

2. Так как в данном примере отношение  $r/D = 0,2$  мало, то можно воспользоваться формулой (9-26). При  $\rho = r/c = 0,4$  имеем  $\ln 1/\rho = 0,9163$ ;  $0,0678\rho = 0,0271$ ;  $0,0491\rho^2 = 0,008$ .

Следовательно,

$$L = \frac{3}{\pi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 0,05 (0,916 + 1,349 + 0,027 + 0,008) = \\ = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 2,300 = 1,380 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

Из данного примера видно, что метод эквивалентной круговой катушки дает достаточно точный результат. Кроме того, сравнение данного примера с предыдущим показывает, что при одинаковом размере среднего витка и одинаковом числе витков индуктивности многоугольного соленоида и многоугольной плоской катушки весьма близки друг к другу, если размер  $a$  соленоида равен размеру  $r$  плоской катушки и оба размера достаточно малы по сравнению с диаметром описанной окружности.

## 9-8. ИНДУКТИВНОСТИ ТОРОИДАЛЬНЫХ КАТУШЕК

1. Катушка с каркасом прямоугольного сечения (рис. 9-9, а). Индуктивность

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \omega^2 a \ln \frac{D+r}{D-r}, \quad (9-28)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $D$  — ее средний диаметр;  $a$  и  $r$  — аксиальный и радиальный размеры среднего витка обмотки; причем, если обмотка имеет несколько слоев, то предполагается, что размеры витков наружного слоя мало отличаются от размеров витков внутреннего слоя.

**2. Катушка с каркасом кругового сечения (рис. 9-9, б).**  
Индуктивность

$$L = \frac{\mu_0 \omega^2}{2} \frac{d^2}{D + \sqrt{D^2 - d^2}}, \quad (9-29)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $D$  — ее средний диаметр;  $d$  — диаметр среднего витка обмотки; причем, если обмотка

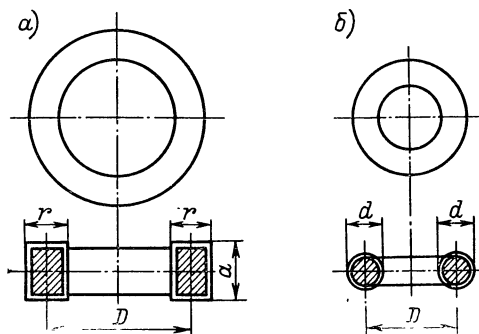


Рис. 9-9

имеет несколько слоев, то предполагается, что размеры витков наружного слоя мало отличаются от размеров витков внутреннего слоя.

**9-9. ИНДУКТИВНОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ И СФЕРОИДАЛЬНЫХ КАТУШЕК**

В формулах настоящего параграфа все геометрические размеры представляют собой средние размеры обмоток; если обмотка имеет несколько слоев, предполагается, что соответствующие размеры слоев мало отличаются друг от друга.

1. Индуктивность сферической катушки

$$L = \frac{\pi}{9} \mu_0 \omega^2 d, \quad (9-30)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $d = 2R$  — ее диаметр (рис. 9-10, а).

2. Индуктивность сплюснутой сфероидальной катушки

$$L = \frac{\pi}{3} \mu_0 \omega^2 \frac{a^2 b}{c^2} \left( \frac{a^2}{bc} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} - 1 \right), \quad (9-31)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $a$  и  $b$  — полуоси сфероиды;  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  — половина расстояния между его фокусами (рис. 9-10, б).

3. Индуктивность вытянутой сферической катушки

$$L = \frac{\pi}{3} \mu_0 \omega^2 \frac{b^4}{c^3} \left( \frac{ac}{b^2} - \ln \frac{a+c}{b} \right), \quad (9-32)$$

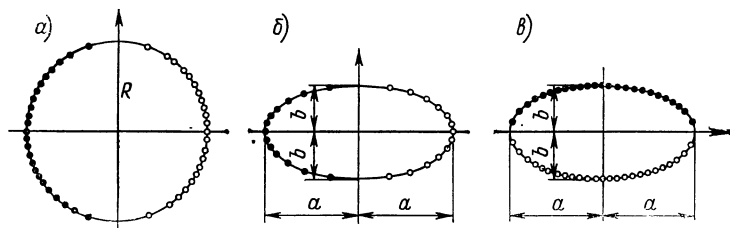


Рис. 9-10

где  $\omega$  — число витков катушки;  $a$  и  $b$  — полуоси сфероиды;  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  — половина расстояния между его фокусами (рис. 9-10, в).

#### 9-10. ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ КОАКСИАЛЬНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И МНОГУУГОЛЬНЫХ КАТУШЕК

Если линейные размеры поперечных сечений катушек малы по сравнению с размерами витков, то взаимную индуктивность катушек можно определить по формуле

$$M = \omega W M', \quad (9-33)$$

понимая под  $M'$  в первом, грубом, приближении взаимную индуктивность средних витков катушек, а во втором, менее грубом, приближении — взаимную индуктивность средних витков, удаленных на расстояние, равное среднему геометрическому расстоянию между ближайшими друг к другу площадями поперечных сечений катушек.

Для катушек прямоугольного поперечного сечения более точное значение взаимной индуктивности можно получить по методу ряда Тейлора (§ 7-12).

При всех указанных способах расчета задача сводится к определению взаимных индуктивностей одной или нескольких пар коаксиальных прямоугольных или много-

угольных контуров. Последняя задача решается относительно просто для одинаковых контуров (§ 4-13 и 4-14), но весьма сильно усложняется, если контуры неодинаковы [см., например, § 4-13, формулу (4-41)].

Для расчета взаимной индуктивности неодинаковых многоугольных катушек можно заменить их соответствующими круговыми катушками, «эквивалентные» диаметры которых в первом приближении можно определить так, как указано в § 9-6, 9-7.

**Пример 9-6.** Две одинаковые квадратные катушки с квадратным поперечным сечением имеют размеры, указанные на рис. 9-11. Оси катушек совпадают, стороны их параллельны. Каждая катушка имеет  $w = 200$  витков. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.**

1. Взаимную индуктивность катушек в первом приближении определяем по формуле  $M = w^2 M_{PQ}$ , где  $M_{PQ}$  — взаимная индуктивность средних витков катушек. Средние витки катушек в данном случае представляют собой одинаковые коаксиальные квадраты со стороной  $c = 17,5$  см, расположенные на расстоянии  $x = 5$  см друг от друга. Их взаимная индуктивность может быть определена по формуле (4-40), в которую следует подставить

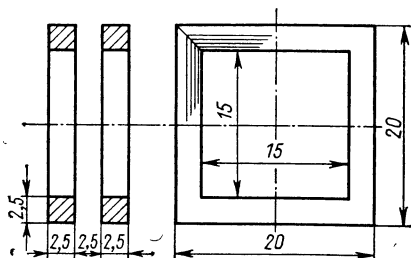


Рис. 9-11

двух коаксиальных квадратов со стороной  $c = 17,5$  см, расположенные на расстоянии  $x = 5$  см друг от друга. Их взаимная индуктивность может быть определена по формуле (4-40), в которую следует подставить

$$d = \sqrt{c^2 + x^2} = \sqrt{306,3 + 25} = 18,20 \text{ см};$$

$$D = \sqrt{2c^2 + x^2} = \sqrt{612,5 + 25} = 25,25 \text{ см}.$$

По формуле (4-40) получаем

$$M_{PQ} = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \left[ 17,5 \ln \left( \frac{17,5 + 18,20}{17,5 + 25,25} \frac{18,20}{5,00} \right) + \right. \\ \left. + 25,25 - 36,40 + 5,00 \right] \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 10^{-7} \cdot 0,1331 = 1,065 \cdot 10^{-7} \text{ Гн};$$

$$M = 4 \cdot 10^4 \cdot 1,065 \cdot 10^{-7} = 4,260 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

2. Более точное значение взаимной индуктивности катушек определяем по методу ряда Тейлора (§ 7-12), применяя формулу (7-56). В данном случае под  $M_{Q1}$ ,  $M_{Q2}$  и т. д. следует понимать взаимные индуктивности квадратных витков, проходящих через точки  $Q$  и  $1$ ,  $Q$  и  $2$  и т. д., причем квадраты  $Q$  и  $2$ ,  $Q$  и  $P$ ,  $Q$  и  $4$  одинаковы, а квадраты  $Q$  и  $1$ ,  $Q$  и  $3$  различны.

Определяя взаимные индуктивности  $M_{Q2}$  и  $M_{Q4}$  так же, как выше была определена взаимная индуктивность  $M_{PQ}$ , т. е. по формуле (4-40), находим

$$M_{Q2} = 1,570 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}; \quad M_{Q4} = 0,8256 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$



Взаимную индуктивность  $M_{Q1}$  находим по формуле (4-42) для неодинаковых коаксиальных квадратов (§ 4-13). В данном случае  $a_1 = 15$  см;  $a_2 = 17,5$  см;  $x = 5$  см;

$$t = \sqrt{\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)^2 + x^2} = 5,154 \text{ см}; \quad t' = \sqrt{\left(\frac{a_2 + a_1}{2}\right)^2 + x^2} = 17,00 \text{ см};$$

$$w' = \sqrt{\left(\frac{a_2 - a_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + x^2} = 5,304 \text{ см}; \quad w = \sqrt{\left(\frac{a_2 + a_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + x^2} = 23,52 \text{ см};$$

$$v' = v = \sqrt{\left(\frac{a_2 + a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)^2 + x^2} = 17,05 \text{ см};$$

$$t'/t = 17,00/5,154 = 3,298; \quad 2(2v - w - w') = 10,56 \text{ см};$$

$$\frac{a_1 + a_2 + 2v}{a_1 + a_2 + 2w} = 0,8373; \quad \frac{a_2 - a_1 + 2w'}{a_2 - a_1 + 2v} = 0,3582.$$

Подставляя найденные величины в формулу (4-42), получаем

$$M_{Q1} = 4 \cdot 10^{-7} (33,02 - 0,43 - 10,56) \cdot 10^{-2} = 0,8812 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

Аналогичными вычислениями находим

$$M_{Q3} = 4 \cdot 10^{-7} (40,28 - 0,35 - 11,32) \cdot 10^{-2} = 1,144 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

Таким образом, формула (7-56) дает

$$M = \frac{4 \cdot 10^4}{3} (0,8812 + 1,570 + 1,144 + 0,8256 - 1,065) \cdot 10^{-7} = 4,456 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Этот результат отличается от найденного приближенным способом на 5 %, но требует значительно более трудоемких вычислений.

## 9-11. ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ ТОРОИДАЛЬНЫХ КАТУШЕК

1. Взаимная индуктивность катушек с каркасом прямоугольного сечения (рис. 9-9, а)

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} w W a \ln \frac{D+r}{D-r}, \quad (9-34)$$

где  $w$  и  $W$  — числа витков катушек;  $D$  — их средний диаметр;  $a$  и  $r$  — аксиальный и радиальный размеры средних витков.

2. Взаимная индуктивность катушек с каркасом кругового сечения (рис. 9-9, б)

$$M = \frac{\mu_0}{2} w W \frac{d^2}{D + \sqrt{D^2 - d^2}}, \quad (9-35)$$

где  $w$  и  $W$  — числа витков катушек;  $D$  — их средний диаметр;  $d$  — диаметр среднего витка внутренней катушки;

причем, если эта катушка имеет несколько слоев, то предполагается, что размеры витков ее наружного слоя мало отличаются от соответствующих размеров витков внутреннего слоя.

## 9-12. ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ И СФЕРОИДАЛЬНЫХ КАТУШЕК

В настоящем параграфе даны формулы для расчета взаимных индуктивностей сферических и сфероидальных катушек в девяти случаях, изображенных на рис. 9-12. Во всех случаях предполагается, что центры катушек совпадают, а оси, перпендикулярные плоскостям витков (на рисунке эти оси показаны стрелками), образуют между собой угол  $\theta$ , который может изменяться в пределах от 0 до  $\pi$ ; если обмотки катушек имеют несколько слоев, то предполагается, что соответствующие размеры слоев мало отличаются друг от друга. Все размеры в формулах представляют собой средние размеры соответствующих обмоток. Через  $d$  и  $D$  обозначены диаметры внутренней и наружной сферических катушек; через  $a$  и  $A$  — большие полуоси, через  $b$  и  $B$  —

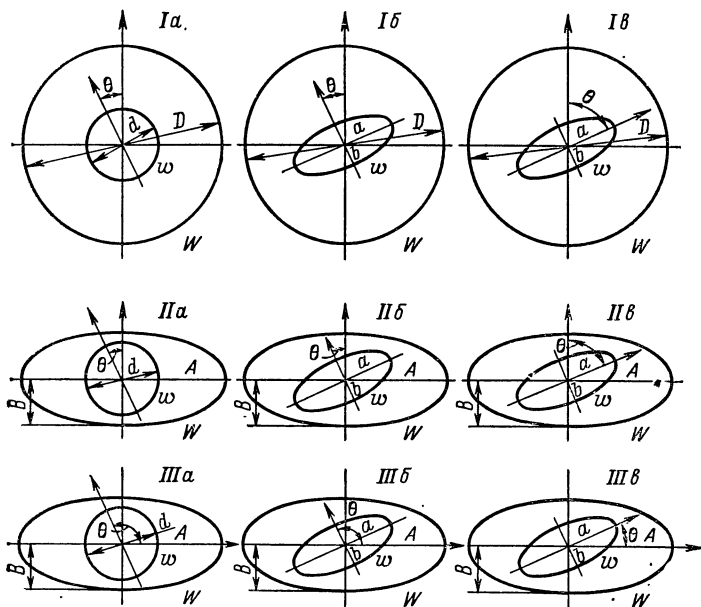


Рис. 9-12

малые полуоси внутренней и наружной сфероидальных катушек, через  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  и  $C = \sqrt{A^2 - B^2}$  — половины расстояний между их фокусами, через  $w$  и  $W$  — числа витков катушек.

Для случая *Ia* (обе катушки — сферические)

$$M = \frac{\pi}{9} \mu_0 w W \frac{d^2}{D} \cos \theta. \quad (9-36)$$

Для случая *Iб* (наружная катушка — сферическая, внутренняя — сплюснутая сфероидальная)

$$M = \frac{4}{9} \pi \mu_0 w W \frac{a^2}{D} \cos \theta. \quad (9-37)$$

Для случая *Iв* (наружная катушка — сферическая, внутренняя — вытянутая сфероидальная)

$$M = \frac{4}{9} \pi \mu_0 w W \frac{b^2}{D} \cos \theta. \quad (9-38)$$

Для случая *IIa* (наружная катушка — сплюснутая сфероидальная, внутренняя — сферическая)

$$M = \frac{\pi}{12} \mu_0 w W \frac{Ba^2}{C^2} \left( \frac{A^2}{BC} \operatorname{arctg} \frac{C}{B} - 1 \right) \cos \theta. \quad (9-39)$$

Для случая *IIб* (обе катушки — сплюснутые сфероидальные)

$$M = \frac{\pi}{3} \mu_0 w W \frac{Ba^2}{C^2} \left( \frac{A^2}{BC} \operatorname{arctg} \frac{C}{B} - 1 \right) \cos \theta. \quad (9-40)$$

Для случая *IIв* (наружная катушка — сплюснутая сфероидальная, внутренняя — вытянутая сфероидальная)

$$M = \frac{\pi}{3} \mu_0 w W \frac{Bb^2}{C^2} \left( \frac{A^2}{BC} \operatorname{arctg} \frac{C}{B} - 1 \right) \cos \theta. \quad (9-41)$$

Для случая *IIIa* (наружная катушка — вытянутая сфероидальная, внутренняя — сферическая)

$$M = \frac{\pi}{12} \mu_0 w W \frac{Ad^2}{C^2} \left( 1 - \frac{B^2}{AC} \ln \frac{A+C}{B} \right) \cos \theta. \quad (9-42)$$

Для случая *IIIб* (наружная катушка — вытянутая сфероидальная, внутренняя — сплюснутая сфероидальная)

$$M = \frac{\pi}{3} \mu_0 w W \frac{Aa^2}{C^2} \left( 1 - \frac{B^2}{AC} \ln \frac{A+C}{B} \right) \cos \theta. \quad (9-43)$$

Для случая *IIIв* (обе катушки — вытянутые сфероидальные)

$$M = \frac{\pi}{3} \mu_0 w W \frac{Ab^2}{C^2} \left( 1 - \frac{B^2}{AC} \ln \frac{A+C}{B} \right) \cos \theta. \quad (9-44)$$

## 9-13. ИНДУКТИВНОСТЬ РАССЕЯНИЯ ТРАНСФОРМАТОРА

Магнитный поток, сцепляющийся с обмотками трансформатора, как известно, разделяют на две части: основной поток, каждая из линий которого, замыкаясь в основном по железному сердечнику, сцепляется со всеми витками обеих обмоток трансформатора, и поток рассеяния, линии которого, замыкаясь в основном по воздуху, сцепляются лишь с частью витков обеих обмоток. Основной поток трансформатора создается суммой магнитодвижущих сил его обмоток, равной

$$\dot{I}_1 \omega_1 + \dot{I}_2 \omega_2 = \dot{I}_0 \omega_1,$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — числа витков обмоток;  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  — комплексы токов в обмотках;  $\dot{I}_0 \omega_1$  — магнитодвижущая сила холостого хода;  $\dot{I}_0$  — так называемый намагничивающий ток трансформатора. Для трансформатора, приведенного к одному числу витков  $\omega$ ,

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_0.$$

Если при заданном  $\dot{I}_2$  сделать первичный ток равным  $\dot{I}_1^* = \dot{I}_1 - \dot{I}_0 = -\dot{I}_2$ , то сумма обеих магнитодвижущих сил приведенного трансформатора

$$\omega (\dot{I}_1^* + \dot{I}_2) = \omega (\dot{I}_1 - \dot{I}_0 + \dot{I}_2) = \omega (\dot{I}_2 - \dot{I}_2)$$

окажется равной нулю, вследствие чего станет равным нулю и основной поток, и мы будем иметь в трансформаторе лишь поток рассеяния. Таким образом, поток рассеяния — это поток, существующий в трансформаторе, когда по обмоткам протекают одинаковые токи противоположного направления (рис. 9-13).

Отношение потока рассеяния  $\Psi_s$ , сцепляющегося с обмотками, к силе тока в них называют индуктивностью рассеяния трансформатора и обозначают буквой  $S$ . Следовательно, по определению,

$$S = \Psi_s / i,$$

где  $i = i_1^* = -i_2$  — мгновенное значение силы тока  $\dot{I}_1^*$ .

Индуктивность рассеяния цилиндрических обмоток, расположенных на одном стержне трансформатора, можно в первом приближении определить, пренебрегая кривизной обмоток и влиянием близости ферромагнитного сердечника. Мысленно распрямив обмотки и учитывая, что токи в них равны по значению и обратны по направлению, можно рассматривать совокупность обеих обмоток как двухпроводную линию из шин прямоугольного сечения длиной  $l = \pi D$ , где  $D$  — средний диаметр канала между обмотками. Размеры и взаимное расположение поперечных сечений шин должны быть такими же, как у обмоток. При указанных условиях индуктивность рассеяния обмоток  $S$  будет отличаться от собственной индуктивности соответствующей линии только множителем  $\omega^2$ , учитывающим, что обмотки имеют не один, а  $\omega$  витков:

$$S = \omega^2 l L = \pi D \omega^2 L, \quad (9-45)$$

где  $L$  — индуктивность линии на единицу длины.

Величина  $L$  может быть найдена по формулам § 3-4 и 3-5 или в общем случае по формуле (3-84).

Наличие ферромагнитного сердечника приводит к некоторому изменению индуктивности и может быть учтено по методу зеркальных изображений [10]. Считая магнитную проницаемость сердечника равной беско-

нечности и рассматривая его поверхность как плоскость ( $FF$ ), можно мысленно удалить сердечник, заменив его двумя эквивалентными ему обмотками 3 и 4, представляющими собой зеркальные изображения основных обмоток 1 и 2 в плоскости  $FF$  (рис. 9-14). Тогда искомая индуктивность рассеяния обмоток 1 и 2 с учетом влияния сердечника может быть определена по формуле

$$S'_{12} = S_{12} + S_{14} - \frac{1}{2} (S_{13} + S_{24}), \quad (9-46)$$

где  $S_{12}$  — индуктивность рассеяния тех же обмоток 1 и 2, вычисленная без учета сердечника;  $S_{14}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{24}$  — то же для обмоток 1 и 4, обмоток 1 и 3 и обмоток 2 и 4.

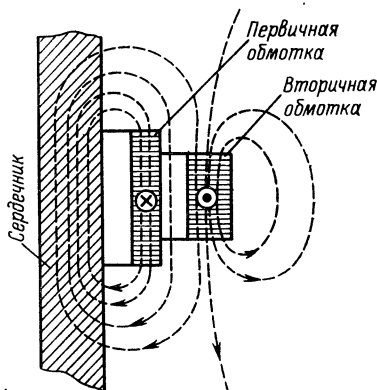


Рис. 9-13

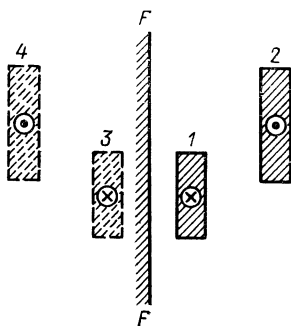


Рис. 9-14

Если первичная и вторичная обмотки трансформатора состоят из нескольких последовательно или параллельно соединенных частей, то определение индуктивности рассеяния обмоток можно свести к определению индуктивностей рассеяния отдельных их частей.

Для трансформатора с дисковыми обмотками расчет индуктивности рассеяния аналогичен предыдущему; однако в этом случае обмотки трансформатора после их распрямления образуют систему, состоящую не из двух, а из нескольких «шин» прямоугольного сечения, и индуктивность  $L$  такой системы следует определять в соответствии с указаниями § 3-9 и 3-10.

Методы расчета индуктивностей рассеяния для трансформаторов с обмотками, расположенными на разных стержнях, и в других специальных случаях излагаются в курсах электрических машин и трансформаторов и здесь не рассматриваются.

**Пример 9-7.** Первичная (1) и вторичная (2) обмотки трансформатора имеют по  $\omega = 100$  витков. Размеры поперечных сечений обмоток (в сантиметрах) и их положение относительно сердечника трансформатора показаны на рис. 9-15. Средний диаметр канала между обмотками  $D = 40$  см. Определить индуктивность рассеяния обмоток без учета и с учетом сердечника.

**Решение.**

1. Индуктивность рассеяния без учета сердечника находим по формуле (9-45). Индуктивность  $L_{12}$  соответствующей двухпроводной линии на

единицу ее длины находим по формуле (3-64). В данном случае  $d = 12$  см,  $b = 2$  см,  $c = 10$  см. По табл. 10-5 при  $b/c = 0,2$  и  $c/d = 0,8333$  находим  $f = 0,0497$ . По табл. 10-3 при  $b/c = 0,2$  имеем  $\varepsilon = 0,00249$ . Следовательно,

$$L_{12} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \left( \ln \frac{12}{2} + \frac{3}{2} + 0,050 - 0,002 \right) = 6,192 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$$S_{12} = \pi \cdot 0,4 \cdot 10^4 \cdot 6,192 \cdot 10^{-7} = 7,783 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

2. Индуктивность рассеяния с учетом влияния сердечника находим по формуле (9-46), которую напомним в виде

$$S'_{12} = \pi D \omega^2 L'_{12} = \pi D \omega^2 \left[ L_{12} + L_{14} - \frac{1}{2} (L_{13} + L_{24}) \right],$$

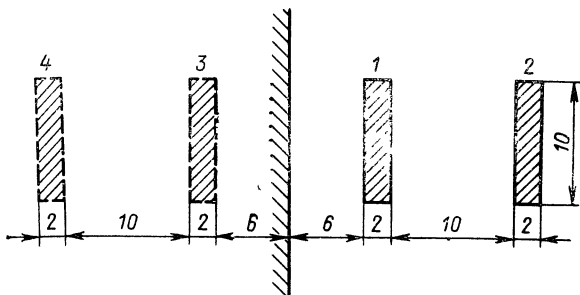


Рис. 9-15

где  $L_{14}$ ,  $L_{13}$  и  $L_{24}$  — индуктивности на единицу длины соответствующих двухпроводных линий. Индуктивность линии, состоящей из провода 1 и провода 4, являющегося зеркальным изображением провода 2, находим по формуле (3-64); причем в данном случае  $d = 26$  см;  $c/d = 10/26 = 0,3861$ ;  $b/c = 0,2$ , и по табл. 10-5 и 10-3 находим  $f = 0,012$ ,  $\varepsilon = 0,002$ , так что

$$\begin{aligned} L_{14} &= 4 \cdot 10^{-7} \left( \ln \frac{26}{2} + 1,500 + 0,012 - 0,002 \right) = 4 \cdot 10^{-7} (0,773 + 1,510) = \\ &= 4 \cdot 2,283 \cdot 10^{-7} = 9,132 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}. \end{aligned}$$

Аналогичным путем находим

$$L_{13} = 6,760 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}; \quad L_{24} = 10,63 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Следовательно,

$$L'_{12} = \left[ 6,192 + 9,132 - \frac{1}{2} (6,760 + 10,63) \right] \cdot 10^{-7} = 6,63 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$$S'_{12} = \pi \cdot 0,4 \cdot 10^4 \cdot 6,63 \cdot 10^{-7} = 8,33 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Как видно из приведенного примера, при расположении обмоток согласно рис. 9-15 влияние сердечника на индуктивность рассеяния трансформатора относительно невелико.

## СРЕДНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ, АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ РАССТОЯНИЯ

### 10-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В настоящей главе даны формулы и таблицы для расчета средних геометрических, а также средних арифметических и средних квадратичных расстояний различных фигур от самих себя и друг от друга, причем все фигуры предполагаются лежащими в одной плоскости.

Определения средних геометрических, средних арифметических и средних квадратичных расстояний даны в § 1-8, где приведен также пример вывода одной из формул и даны некоторые указания относительно вычисления этих величин.

2. В настоящей главе для краткости средние геометрические расстояния обозначаются буквами с. г. р., средние арифметические — буквами с. а. р. и средние квадратичные — буквами с. к. р.

### 10-2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

1. С. г. р. сложных фигур, состоящих из нескольких частей, могут быть выражены через с. г. р. этих частей самих от себя и друг от друга, а именно для площадей сложных фигур  $A$  и  $B$  имеем

$$F(A) = \sum_{k=1}^n F(k) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n F(k \times i), \quad i \neq k; \quad (10-1)$$

$$F(A \times B) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=n+1}^{n+m} F(k \times i), \quad (10-2)$$

где  $n$  — число частей, из которых состоит фигура  $A$ ;  $m$  — то же для фигуры  $B$ ;

$$F(k) = s_k^2 \ln g_k; \quad F(k \times i) = s_k s_i \ln g_{ki}; \quad (10-3)$$

$g_k$  — с. г. р. площади  $s_k$  от самой себя;  $g_{ki}$  — с. г. р. площадей  $s_k$  и  $s_i$  друг от друга.

Если фигуры  $A$  и  $B$  суть две линии, то формулы (10-1) и (10-2) сохраняют силу, но под  $F(k)$  и  $F(k \times i)$  следует по-

нимать соответственно  $l_k^2 \ln g_k$  и  $l_k l_i \ln g_{ki}$ , где  $g_k$  — с. г. р. участка  $l_k$  от самого себя,  $g_{ki}$  — с. г. р. участков  $l_k$  и  $l_i$  друг от друга.

Если  $A$  есть линия, а  $B$  — площадь, то в формуле (10-2) под  $F(k \times i)$  следует понимать  $l_k s_i \ln g_{ki}$ .

Формулы (10-1) и (10-2) применимы к с. а. р. и с. к. р., если в выражениях для  $F(k)$  и  $F(k \times i)$  заменить  $\ln g_k$  и  $\ln g_{ki}$  соответственно на  $a_k$  и  $a_{ki}$  или на  $q_k^2$  и  $q_{ki}^2$ .

2. Для фигур, расстояние между которыми в несколько раз превосходит их линейные размеры, взаимные с. а. р. и с. к. р. могут быть приняты равными с. г. р. между этими фигурами (о возможной погрешности см. в § 1-8 и 1-9).

3. Для фигур, расстояние между которыми значительно больше их линейных размеров, взаимные с. г. р., с. а. р. и с. к. р. могут быть приняты равными расстоянию между центрами инерции этих фигур (о возможной погрешности см. в § 1-8).

### 10-3. СРЕДНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ НЕКОТОРЫХ ФИГУР

1. С. г. р. прямолинейного отрезка длиной  $b$  от самого себя

$$g = be^{-3/2} = 0,22313 b. \quad (10-4)$$

2. С. г. р. окружности от самой себя равны ее радиусу.

3. С. г. р. площади круга от самой себя

$$g = re^{-1/4} = 0,7788 r. \quad (10-5)$$

4. С. г. р. площади кругового кольца от самой себя определяется формулой

$$\ln g = \ln r - \frac{q^4}{(r^2 - q^2)^2} \ln \frac{r}{q} + \frac{1}{4} \frac{3q^2 - r^2}{r^2 - q^2}, \quad (10-6)$$

где  $q$  и  $r > q$  — радиусы кольца.

Для определения  $g$  можно пользоваться формулой  $g = cr$ , взяв значения коэффициента  $c$  из табл. 10-1.

Для тонких колец (при  $t = r - q \ll q$ ) вместо формулы (10-6) удобнее пользоваться приближенными формулами:

$$\begin{aligned} \ln g &= \ln r - \frac{2}{3} \Delta + \frac{2}{3} \Delta^2 - \frac{2}{5} \Delta^3 = \\ &= \ln q - \frac{4}{3} \Delta + \frac{2}{3} \Delta^2 + \frac{4}{15} \Delta^3 \end{aligned} \quad (10-7)$$



Таблица 10-1: С. г. р. площади кольца от самой себя

$q/r$	$c = g/r$	$q/r$	$c = g/r$	$q/r$	$c = g/r$
0,0	0,7788	0,4	0,8286	0,7	0,9058
0,1	0,7825	0,5	0,8519	0,8	0,9358
0,2	0,7930	0,5	0,8519	0,9	0,9672
0,3	0,8087	0,6	0,8778	1,0	1,0000

или

$$\begin{aligned}\ln g &= \ln r - \frac{1}{3} \frac{t}{r} \left( 1 - \frac{1}{10} \frac{t^2}{r^2} \right) = \\ &= \ln q + \frac{2}{3} \frac{t}{q} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{t}{q} + \frac{1}{20} \frac{t^2}{q^2} \right),\end{aligned}\quad (10-8)$$

где

$$\Delta = \frac{r-q}{r+q}.\quad (10-9)$$

5. С. г. р. площади эллипса от самой себя

$$g = \frac{a+b}{2} e^{-1/4} = 0,3894 (a+b),\quad (10-10)$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса.

6. С. г. р. площади эллиптического кольца от самой себя определяется формулой

$$\ln g = \ln \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{a_2^2 b_2^2}{(a_1 b_1 - a_2 b_2)^2} \left( \ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2} - \frac{a_1^2 - a_2^2}{2a_2 b_2} \right) - \frac{1}{4},\quad (10-11)$$

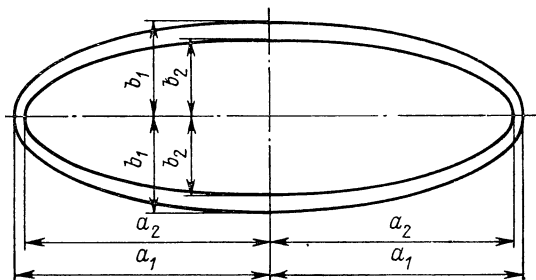
где  $a_1$ ,  $b_1$  и  $a_2$ ,  $b_2$  — полуоси софокусных эллипсов, между которыми заключено кольцо (рис. 10-1).

Рис. 10-1

Для тонких колец ( $\delta^2 = a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2 \ll b_1^2$ ) вместо формулы (10-11) удобнее пользоваться приближенной формулой

$$\ln g = \ln \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2}{4(a_1^2 + b_1^2)} - \frac{\delta^2}{4a_1b_1} \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{a_1^2 b_1^2}{(a_1^2 + b_1^2)^2} \right]. \quad (10-12)$$

7. С. г. р. периметра квадрата от самого себя определяется формулой

$$\ln g = \ln b + \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} = \ln b - 0,5413 \quad (10-13)$$

или

$$g = 0,5824 b, \quad (10-14)$$

где  $b$  — сторона квадрата.

8. С. г. р. площади квадрата от самой себя определяется формулой

$$\ln g = \ln b + \frac{1}{3} (\ln 2 + \pi) - \frac{25}{12} \quad (10-15)$$

или

$$g = 0,44705 b, \quad (10-16)$$

где  $b$  — сторона квадрата.

9. С. г. р. площади тонкой квадратной рамки от самой себя может быть приближенно принято равным с. г. р. от самого себя периметра квадрата со стороной

$$b_e = b \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{t}{b} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{t}{b} \right) \right], \quad (10-17)$$

где  $b$  — сторона квадрата, являющегося внешним контуром рамки;  $t$  — кратчайшее расстояние между внешним и внутренним контурами (рис. 10-2); предполагается, что  $t \ll b/3$ .

10. С. г. р. периметра прямоугольника от самого себя определяется из выражения

$$\begin{aligned} (b+c)^2 \ln g &= b^2 \ln b + c^2 \ln c + \\ &+ bc \ln(b^2 + c^2) + c(b+c) \operatorname{arctg} \frac{b}{c} + \\ &+ b(b+c) \operatorname{arctg} \frac{c}{b} - \frac{3}{2} (b+c)^2, \end{aligned} \quad (10-18)$$

где  $b$  и  $c$  — стороны прямоугольника. Значения  $g/c$  даны в зависимости от отношения  $b/c$  ( $b \leq c$ ) на рис. 10-3 и в табл. 10-2.

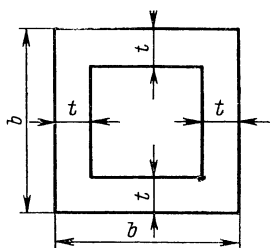


Рис. 10-2

Таблица 10-2. С. г. р. периметра прямоугольника от самого себя

$\eta = \frac{b}{c}$	$\ln \frac{g}{c}$	$\frac{g}{c}$	$\frac{g}{b+c}$
0	—1,5000	0,2231	0,2231
0,1	—1,2939	0,2742	0,2490
0,2	—1,1459	0,3179	0,2650
0,3	—1,0294	0,3572	0,2748
0,4	—0,9327	0,3931	0,2808
0,5	—0,8493	0,4277	0,2852
0,6	—0,7756	0,4604	0,2878
0,7	—0,7093	0,4920	0,2894
0,8	—0,6488	0,5227	0,2904
0,9	—0,5931	0,5526	0,2909
1,0	—0,5413	0,5820	0,2910

11. С. г. р. площади прямоугольника от самой себя определяется формулой

$$\ln g = \frac{1}{2} \ln (b^2 + c^2) - \frac{1}{12} \frac{b^2}{c^2} \ln \left( 1 + \frac{c^2}{b^2} \right) -$$

$$- \frac{1}{12} \frac{c^2}{b^2} \ln \left( 1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + \frac{2}{3} \frac{b}{c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} + \frac{2}{3} \frac{c}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{c} - \frac{25}{12},$$

(10-19)

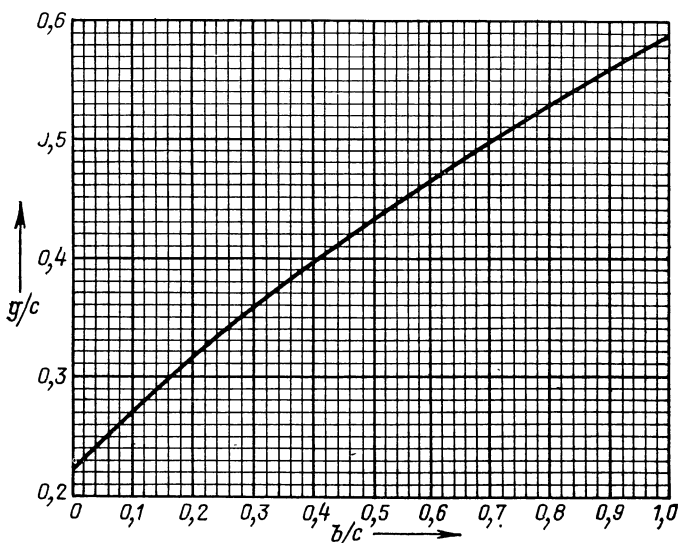


Рис. 10-3

где  $b$  и  $c$  — стороны прямоугольника. Со значительной степенью точности

$$g = k(b + c), \quad (10-20)$$

где  $k = 0,2236$ . Для более точного определения  $g$  значения коэффициента  $k$  в последней формуле можно взять из табл. 10-3. Если требуется определить не  $g$ , а  $\ln g$ , то удобно пользоваться формулой

$$[\ln g = \ln(b + c) + \ln k = \ln(b + c) - 3/2 + \varepsilon, \quad (10-21)$$

где  $\varepsilon$  — поправка, учитывающая отличие  $\ln k$  от значения  $3/2$ , отвечающего случаю  $b = 0$ . Значения  $\varepsilon$  даны также в табл. 10-3.

12. С. г. р. площади тонкой прямоугольной рамки от самой себя может быть приближенно принято равным с. г. р. от самого себя периметра прямоугольника со сторонами

$$b_e = b \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{t}{b} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{t}{b} \right) \right]; \quad (10-22)$$

$$c_e = c \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{t}{c} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{t}{c} \right) \right], \quad (10-23)$$

где  $b$  и  $c$  — стороны прямоугольника, являющегося внешним контуром рамки;  $t$  — кратчайшее расстояние между внешним и внутренним контурами (рис. 10-4); предполагается, что  $t \leq b/3$  ( $b \leq c$ ). С. г. р. периметра «эквивалентного» прямоугольника от самого себя определяется так, как указано в п. 10.

Точное выражение для с. г. р. площади прямоугольной рамки с произвольным соотношением размеров может быть

Таблица 10-3. Значения  $k$  и  $\varepsilon$  в формулах (10-20) и (10-21) для с. г. р. площади прямоугольника от самой себя

$b/c$ или $c/b$	$k$	$\varepsilon$	$b/c$ или $c/b$	$k$	$\varepsilon$
0,000	0,22313	0,00000	0,50	0,22360	0,00211
0,025	33	089	0,55	58	203
0,05	46	146	0,60	57	197
0,10	60	210	0,65	56	192
0,15	66	239	0,70	55	187
0,20	69	249	0,75	0,22354	0,00184
0,25	0,22369	0,00249	0,80	53	181
0,30	68	244	0,85	53	179
0,35	66	236	0,90	53	178
0,40	64	228	0,95	525	177
0,45	62	219	1,00	0,223525	0,00177
0,50	0,22360	0,00211			

найденно с помощью общих формул § 10-2 и теоремы о четырех прямоугольниках (§ 1-10).

13. С. г. р. от точки до окружности радиуса  $r$  равно  $r$  при  $d \leq r$  и равно  $d$  при  $d \geq r$  ( $d$  — расстояние от точки до центра окружности).

14. С. г. р. любой фигуры до окружности радиуса  $r$  равно  $r$ , если фигура целиком лежит внутри окружности, и равно с. г. р. от центра окружности до данной фигуры, если она целиком лежит вне окружности. В частности, с. г. р. между двумя окружностями, лежащими одна вне другой, равно расстоянию между их центрами.

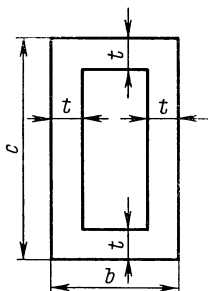


Рис. 10-4

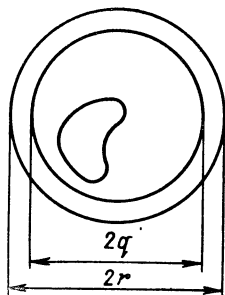


Рис. 10-5

15. С. г. р. от точки до площади круга радиуса  $r$  равно расстоянию  $d$  от точки до центра круга ( $d \geq r$ ).

16. С. г. р. любой фигуры до площади круга равно с. г. р. от центра круга до этой фигуры, если она целиком лежит вне круга. В частности, с. г. р. между площадями двух кругов, лежащих один вне другого, равно расстоянию между их центрами.

17. С. г. р. точки от площади кольца с радиусами  $q$  и  $r \geq q$  равно расстоянию  $d$  от точки до центра кольца, если точка лежит вне кольца ( $d \geq r$ ). Если точка лежит внутри кольца ( $d \leq q$ ), то

$$\ln g = \frac{r^2 \ln r - q^2 \ln q}{r^2 - q^2} - \frac{1}{2}. \quad (10-24)$$

Для тонкого кольца ( $t = r - q \ll q$ ) удобнее пользоваться приближенными формулами:

$$\ln g = \ln r - \frac{1}{2} \frac{t}{r} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{t}{r} \right) = \ln q + \frac{1}{2} \frac{t}{q} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{t}{q} \right). \quad (10-25)$$

18. С. г. р. любой фигуры, лежащей вне кольца, до площади кольца равно с. г. р. от центра кольца до этой фигуры. В частности, с. г. р. между площадями двух колец, лежащих одно вне другого, равно расстоянию между их центрами.

Если фигура целиком лежит внутри кольца (рис. 10-5), то с. г. р. определяется формулами (10-24) и (10-25).

19. С. г. р. от точки  $P$  до прямолинейного отрезка (рис. 10-6) определяется формулой

$$\ln g = \frac{y_2}{c} \ln r_2 - \frac{y_1}{c} \ln r_1 + \frac{x}{c} \varphi - 1. \quad (10-26)$$

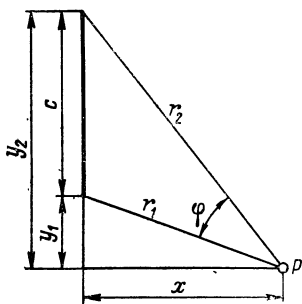


Рис. 10-6

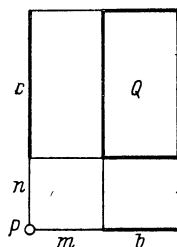


Рис. 10-7

20. С. г. р. от точки  $P$  до площади прямоугольника  $Q$  со сторонами  $b$  и  $c$  (рис. 10-7) определяется той же формулой (10-35), что и с. г. р. между двумя соответствующими взаимно перпендикулярными отрезками  $b$  и  $c$  (рис. 10-9).

21. С. г. р. между двумя прямолинейными параллельными отрезками (рис. 10-8, а) определяется формулой

$$bc \ln g = d^2 \ln \frac{r_1 r_2}{r_3 r_4} - \frac{1}{2} (r_1^2 \ln r_1 + r_2^2 \ln r_2 - r_3^2 \ln r_3 - r_4^2 \ln r_4) - \\ - d [(h+c) \varphi_1 + (h+b) \varphi_2 - h \varphi_3 - (h+b+c) \varphi_4] - \frac{3}{2} bc. \quad (10-27)$$

Если  $b = c$ ,  $h = -b$  (рис. 10-8, б), то

$$\ln g = \frac{d^2}{c^2} \ln \frac{d}{r} + \ln r + \frac{d}{c} \varphi - \frac{3}{2}, \quad (10-28)$$

где  $r^2 = d^2 + c^2$ , или

$$\ln g = \ln d + \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2} \ln (1 + \gamma^2) + \frac{2}{\gamma} \operatorname{arctg} \gamma - \frac{3}{2}, \quad (10-29)$$

где  $\gamma = c/d$ .

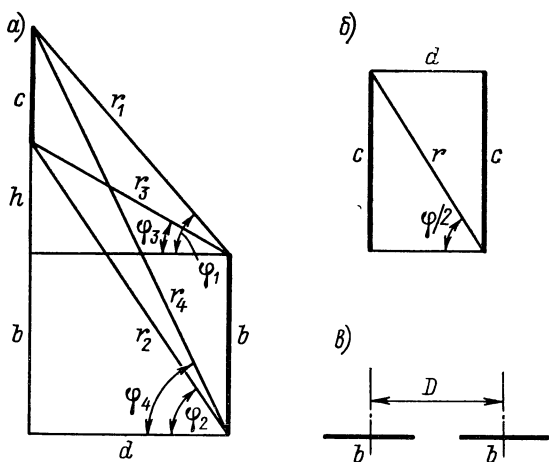


Рис. 10-8

Для расположения по рис. 10-8, в

$$\ln g = \ln D + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right)^2 \ln(1 + \beta) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right)^2 \ln(1 - \beta) - \frac{3}{2}, \quad (10-30)$$

где  $\beta = b/D$ ,

При больших расстояниях между отрезками удобно пользоваться формулой

$$\ln g = \ln D + \Delta, \quad (10-31)$$

где для расположения по рис. 10-8, а.

$$\Delta = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{24} (2\delta^2 - 1) - \frac{3\beta^4 + 10\beta^2\gamma^2 + 3\gamma^4}{960} (8\delta^4 - 8\delta^2 + 1) + \dots, \quad (10-32)$$

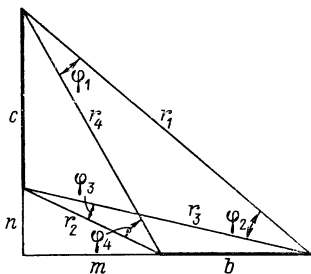


Рис. 10-9

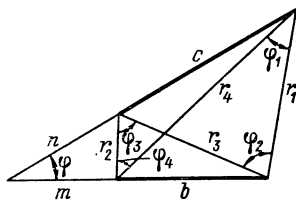


Рис. 10-10

причем  $\beta = b/D$ ,  $\gamma = c/D$ ,  $\delta = d/D$ ;  $D$  — расстояние между серединами отрезков. В частности, для расположения по рис. 10-8, б  $D = d$ ,  $\delta = 1$ ,  $\beta = \gamma$  и

$$\Delta = \frac{\gamma^2}{12} - \frac{\gamma^4}{60} + \frac{\gamma^6}{168} \dots = \frac{\gamma^2}{12} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{5} + \frac{\gamma^4}{14} \dots \right). \quad (10-33)$$

Для расположения по рис. 10-8, в  $\gamma = \beta$ ,  $d = 0$ ,  $\delta = 0$  и

$$\Delta = - \left( \frac{\beta^2}{12} + \frac{\beta^4}{60} + \frac{\beta^6}{168} \dots \right) = - \frac{\beta^2}{12} \left( 1 + \frac{\beta^2}{5} + \frac{\beta^4}{14} \dots \right). \quad (10-34)$$

22. С. г. р. между двумя прямолинейными взаимно перпендикулярными отрезками (рис. 10-9) определяется формулой

$$\begin{aligned} 2bc \ln g = & 2(m+b)(n+c) \ln r_1 + \\ & + 2mn \ln r_2 - 2(m+b)n \ln r_3 - 2(n+c)m \ln r_4 + \\ & + (n+c)^2 \varphi_1 + (m+b)^2 \varphi_2 - n^2 \varphi_3 - m^2 \varphi_4 - 3bc. \end{aligned} \quad (10-35)$$

В частности, при  $m = n = 0$

$$\ln g = \ln r_1 + \frac{c}{2b} \varphi_1 + \frac{b}{2c} \varphi_2 - \frac{3}{2}. \quad (10-36)$$

Если, кроме того,  $b = c$ , то  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/4$ ;  $r_1 = b\sqrt{2}$  и

$$\ln g = \ln b + \ln \sqrt{2} + \pi/4 - 3/2 = \ln b - 0,3680. \quad (10-37)$$

23. С. г. р. между двумя прямолинейными непараллельными отрезками, произвольно расположенными на плоскости (рис. 10-10), определяется формулой

$$\begin{aligned} 2bc \ln g = & [2(m+b)(n+c) \sin^2 \varphi - r_1^2 \cos \varphi] \ln r_1 + \\ & + (2mn \sin^2 \varphi - r_2^2 \cos \varphi) \ln r_2 - [2(m+b)n \sin^2 \varphi - \\ & - r_3^2 \cos \varphi] \ln r_3 - [2(n+c)m \sin^2 \varphi - r_4^2 \cos \varphi] \ln r_4 + \\ & + \sin \varphi [(n+c)^2 \varphi_1 + (m+b)^2 \varphi_2 - n^2 \varphi_3 - m^2 \varphi_4] - 3bc. \end{aligned} \quad (10-38)$$

24. С. г. р. между периметрами двух одинаковых прямоугольников, расположенных согласно рис. 10-11, определяется формулой

$$\begin{aligned} 4(b+c)^2 \ln g = & 4(c^2 - d^2) \ln \sqrt{d^2 + c^2} - \\ & - 4c(d-b) \ln \sqrt{(d-b)^2 + c^2} + 4c(d+b) \ln \sqrt{(d+b)^2 + c^2} + \\ & + 2(d-b)^2 \ln(d-b) + 2(d+b)^2 \ln(d+b) + 8cd \operatorname{arctg} \frac{c}{d} + \\ & + 2[(d+b)^2 - c^2] \operatorname{arctg} \frac{c}{d+b} - 2[(d-b)^2 - c^2] \operatorname{arctg} \frac{c}{d-b} - \\ & - 6(b+c)^2. \end{aligned} \quad (10-39)$$

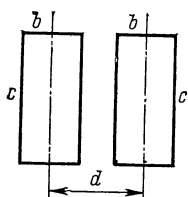


В частности, для двух квадратов ( $b = c$ )

$$8 \ln g = 2(1 - \alpha^2) \ln \sqrt{1 + \alpha^2} + 2(1 - \alpha) \ln \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 1} + \\ + 2(1 + \alpha) \ln \sqrt{(\alpha + 1)^2 + 1} + (1 - \alpha)^2 \ln(\alpha - 1) + \\ + (1 + \alpha)^2 \ln(\alpha + 1) + 4\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} + [(\alpha + 1)^2 - 1] \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha + 1} - \\ - [(\alpha - 1)^2 - 1] \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha - 1} - 12 + 8 \ln c, \quad (10-40)$$

где  $\alpha = d/c$ .

25. С. г. р. между площадями двух одинаковых прямоугольников, расположенных согласно рис. 10-11, определяется из формулы



$$\ln g = \ln k + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{b} + 1 \right)^2 \ln(d + c + b) + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{b} - 1 \right)^2 \ln(d + c - b) - \left( \frac{d}{b} \right)^2 \times \\ \times \ln(d + c), \quad (10-41)$$

Рис. 10-11

полученной с помощью формулы (10-20), в которой коэффициент  $k$  принят не зависящим от отношения сторон прямоугольника. При  $d + c \geq 3b$  удобнее пользоваться выражением

$$\ln g = \ln[k(d + c)] + \frac{2d}{d + c} \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} \dots \right) - \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{d - b}{d + c} \right)^2 \left( 1 + \frac{x^2}{2} \dots \right), \quad (10-42)$$

полученным из (10-41) разложением в ряд; в формуле (10-42)

$$x = b/(d + c). \quad (10-43)$$

Формулы (10-41) и (10-42) применимы как при  $b \geq c$ , так и при  $c \geq b$ .

С. г. р. между площадями прямоугольников, расположенных согласно рис. 10-11, можно определить по формуле

$$\ln g = \ln d + f, \quad (10-44)$$

взяв значение  $f$  из табл. 10-4 при  $b \geq c$  или из табл. 10-5 при  $b < c$ . В последнем случае при малых значениях  $d/c$  и  $b/c$  удобнее пользоваться формулой

$$\ln g = \ln c - f', \quad (10-45)$$

определяя значения  $f'$  из табл. 10-6.

Таблица 10-4. Значения  $f$  в формуле (10-44) для с. г. р. между площадями двух прямоугольников при  $b \geq c$

$b/d$	$c/b = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
05	-0,0002	-0,0002	-0,0002	-0,0002	-0,0002	-0,0002	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0001	+0,0000
10	0008	0008	0008	0008	0007	0006	0005	0004	0003	0002	0000
15	0019	0019	0018	0017	0016	0014	0012	0010	0006	0003	0000
0,20	-0,0034	-0,0033	-0,0032	-0,0030	-0,0028	-0,0025	-0,0021	-0,0017	-0,0012	-0,0006	+0,0000
0,25	-0,0053	-0,0052	-0,0051	-0,0048	-0,0044	-0,0039	-0,0034	-0,0027	-0,0019	-0,0010	+0,0000
30	0076	0076	0073	0069	0064	0057	0048	0038	0027	0014	0001
35	0105	0104	0100	0095	0087	0078	0066	0052	0036	0018	0002
40	0138	0136	0132	0125	0115	0102	0086	0068	0047	0024	0002
0,45	-0,0176	-0,0174	-0,0169	-0,0159	-0,0146	-0,0130	-0,0110	-0,0086	-0,0059	-0,0029	+0,0003
0,50	-0,0220	-0,0217	-0,0210	-0,0198	-0,0182	-0,0161	-0,0136	-0,0106	-0,0073	-0,0036	+0,0005
55	0269	0266	0257	0243	0222	0197	0164	0128	0087	0042	0007
60	0325	0321	0310	0292	0267	0235	0196	0152	0103	0048	0010
65	0388	0383	0369	0347	0316	0277	0231	0178	0120	0055	0014
0,70	-0,0458	-0,0452	-0,0435	-0,0408	-0,0370	-0,0324	-0,0269	-0,0207	-0,0137	-0,0062	+0,0019
0,75	-0,0536	-0,0529	-0,0509	-0,0476	-0,0431	-0,0375	-0,0310	-0,0237	-0,0156	-0,0070	+0,0023
80	0625	0616	0591	0551	0497	0431	0354	0269	0176	0075	0031
85	0725	0714	0683	0634	0569	0491	0401	0302	0195	0081	0037
90	0839	0825	0786	0726	0648	0555	0451	0337	0216	0087	0046
0,95	-0,0973	-0,0954	-0,0903	-0,0828	-0,0734	-0,0625	-0,0504	-0,0374	-0,0236	-0,0092	+0,0056
1,00	-0,1137	-0,1106	-0,1037	-0,0942	-0,0828	-0,0700	-0,0561	-0,0413	-0,0258	-0,0098	+0,0065

Таблица 10-5. Значения  $f$  в формуле (10-44) для с. г. р. между площадями двух прямоугольников при  $c \geq b$

$c/d$	$b/c = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003	0,0002	0,0000
2	0,0033	0,0033	0,0032	0,0030	0,0028	0,0025	0,0021	0,0017	0,0012	0,0007	0,0000
3	0,0074	0,0073	0,0071	0,0067	0,0062	0,0056	0,0048	0,0038	0,0027	0,0015	0,0001
0,4	0,0129	0,0128	0,0124	0,0118	0,0109	0,0098	0,0084	0,0068	0,0050	0,0027	0,0003
0,5	0,0199	0,0197	0,0191	0,0182	0,0169	0,0152	0,0131	0,0106	0,0077	0,0043	0,0005
6	0,0281	0,0278	0,0271	0,0258	0,0240	0,0216	0,0185	0,0152	0,0111	0,0064	0,0011
7	0,0374	0,0371	0,0361	0,0344	0,0320	0,0290	0,0251	0,0206	0,0155	0,0090	0,0019
8	0,0477	0,0473	0,0461	0,0440	0,0411	0,0373	0,0321	0,0268	0,0200	0,0129	0,0031
0,9	0,0589	0,0584	0,0569	0,0544	0,0506	0,0464	0,0404	0,0338	0,0254	0,0158	0,0046
1,0	0,0708	0,0702	0,0685	0,0655	0,0614	0,0560	0,0492	0,0406	0,0313	0,0199	0,0065
0,9	0,0847	0,0841	0,0821	0,0787	0,0738	0,0675	0,0596	0,0501	0,0382	0,0250	—
8	0,1031	0,1023	0,0999	0,0959	0,0903	0,0829	0,0745	0,0622	0,0485	—	—
7	0,1277	0,1268	0,1240	0,1191	0,1125	0,1037	0,0925	0,0788	—	—	—
0,6	0,1618	0,1607	0,1573	0,1507	0,1436	0,1329	0,1194	—	—	—	—
0,5	0,2107	0,2094	0,2053	0,1984	0,1886	0,1754	—	—	—	—	—
4	0,2843	0,2826	0,2776	0,2691	0,2567	—	—	—	—	—	—
3	0,4024	0,4003	0,3942	0,3831	—	—	—	—	—	—	—
2	0,6132	0,6105	0,6021	—	—	—	—	—	—	—	—
0,1	1,0787	1,1075	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$d/c$	$b/c = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

Таблица 10-б. Значения  $f'$  в формуле (10-45) для с. г. р. между площадями двух прямоугольников

$d/c$	$b/c = 0$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,00	1,5000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,05	1,3542	1,3555	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,10	1,2239	1,2248	1,2278	—	—	—	—	—	—	—	—
0,15	1,1052	1,1060	1,1084	1,1125	—	—	—	—	—	—	—
0,20	0,9962	0,9969	0,9989	1,0024	1,0073	—	—	—	—	—	—
0,25	0,8953	0,8959	0,8977	0,9007	0,9049	0,9105	—	—	—	—	—
0,30	8015	8020	8037	8062	8098	8147	0,8208	—	—	—	—
0,35	7140	7145	7159	7182	7215	7258	7311	0,7375	—	—	—
0,40	6321	6325	6337	6358	6387	6425	6472	6530	0,6596	—	—
0,45	5550	5554	5565	5584	5610	5645	5687	5738	5797	0,5865	—
0,50	0,4825	0,4828	0,4838	0,4855	0,4879	0,4910	0,4948	0,4994	0,5046	0,5109	0,5178

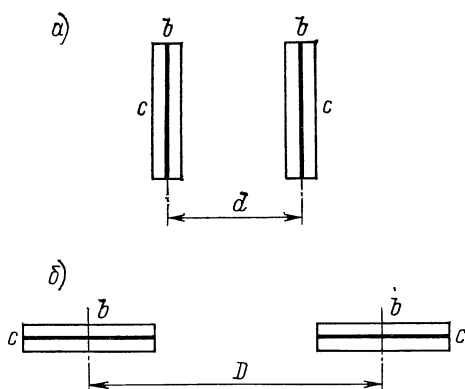


Рис. 10-12

26. С. г. р. между площадями двух узких и достаточно удаленных друг от друга прямоугольников может быть принято равным с. г. р. между двумя соответствующими отрезками, совпадающими с продольными осями прямоугольников. В частности, для двух одинаковых узких прямоугольников, расположенных согласно рис. 10-12, а, б, справедлива формула (10-31), причем  $\Delta$  определяется по формуле (10-33) при  $c \gg b$  и  $\gamma = c/d < 1$  и по формуле (10-34) при  $b \gg c$ .

В первом из указанных случаев можно учесть конечность размера  $b$ , введя в правую часть формулы (10-31) дополнительное слагаемое

$$\Delta_i = -\frac{1}{12} \eta^2 \ln(1 + \gamma^2),$$

где  $\eta = b/c$ ;  $\gamma = c/d$ .

27. С. г. р. между площадями двух прямоугольников с параллельными сторонами при произвольном их расположении на плоскости может быть определено по формулам (1-50)—(1-58), если положить

$$F(k) = s_k^2 \ln g_k; \quad F(k \times i) = s_k s_i \ln g_{ki}. \quad (10-46)$$

Тем самым задача сведется к определению с. г. р. площадей нескольких прямоугольников от самих себя, для которых имеется простая формула (10-20).

Такой метод удобен лишь для прямоугольников, расположенных близко друг от друга. Если расстояние между центрами прямоугольников больше каждой из их сторон, то

с. г. р. между площадями прямоугольников удобно вычислять по формуле

$$\ln g = \ln D + \Delta, \quad (10-47)$$

где  $D$  — расстояние между центрами прямоугольников, а

$$\Delta = \frac{(B^2 + b^2) - (C^2 + c^2)}{24D^2} (1 - 2u^2) - \\ - \frac{(3B^4 + 10B^2b^2 + 3b^4) + (3C^4 + 10C^2c^2 + 3c^4) - 10(B^2 + b^2)(C^2 + c^2)}{960D^4} \times \\ \times (1 - 8u^2 + 8u^4) \dots, \quad (10-48)$$

причем  $B$  и  $C$  — стороны одного прямоугольника;  $b$  и  $c$  — соответствующие стороны другого прямоугольника;  $u = \cos \theta$ ;  $\theta$  — угол между направлением прямой, соединяющей центры прямоугольников, и направлением прямой, параллельной сторонам  $B$  и  $b$  (рис. 10-13).

При  $B = b$  и  $C = c$ , т. е. для одинаковых прямоугольников,

$$\Delta = \frac{1}{12} (\beta^2 - \gamma^2) (1 - 2u^2) - \\ - \frac{1}{60} \left( \beta^4 + \gamma^4 - \frac{5}{2} \beta^2 \gamma^2 \right) \times \\ \times (1 - 8u^2 + 8u^4) \dots, \quad (10-49)$$

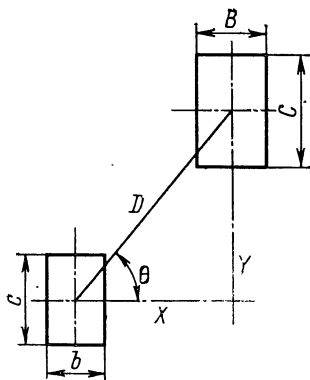


Рис. 10-13

где  $\beta = b/D$ ;  $\gamma = c/D$ .

28. С. г. р. между площадями двух одинаковых прямоугольников, произвольно расположенных друг относительно друга на плоскости, можно определить следующим методом.

Если отношение большей стороны прямоугольников к меньшей есть целое число  $n$ , то, разбив каждый прямоугольник на  $n$  квадратов (рис. 10-14, а), будем иметь

$$\ln g = \frac{1}{n^2} \ln \prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^n r_{ki}, \quad (10-50)$$

где  $r_{ki}$  — расстояние между центрами  $k$ -го и  $i$ -го квадратов;  $\Pi$  — знак произведения.

В частности, если большие стороны прямоугольников параллельны друг другу, то

$$\prod_{k=1}^{i=n} r_k = r_{1n} r_{2n}^2 r_{3n}^3 \dots r_{n-1}^{n-1} n r_{nn} r_{n, n-1}^{n-1} r_{n, n-2}^{n-2} \dots r_{n2}^2 r_{n1}. \quad (10-51)$$

Если отношение сторон прямоугольников не есть целое число и равно  $c/b = n + \alpha$ , где  $n$  — целое число и  $0 < \alpha < 1$ , то, определив с. г. р.  $g_1$

между площадями двух прямоугольников с отношением сторон, равным  $c/b_1 = n + 1$ , и с. г. р.  $g_2$  между площадями двух прямоугольников с отношением сторон, равным  $c/b_2 = n$  (рис. 10-14, б), найдем искомое с. г. р. из формулы

$$g = g_1 + (g_2 - g_1) \frac{b - b_1}{b_2 - b_1}. \quad (10-52)$$

При этом с. г. р.  $g_1$  и  $g_2$  определяются так, как было указано для прямоугольников с отношением сторон, равным целому числу.

29. С. г. р. между площадями двух одинаковых прямоугольных рамок, расположенных согласно рис. 10-15, а, можно принять равным с. г. р. между периметрами двух таким же образом расположенных

прямоугольников (рис. 10-15, б) со сторонами  $b_e$  и  $c_e$ , определяемыми по формулам п. 12 (об определении с. г. р. между периметрами прямоугольников см. в п. 24).

30. С. г. р. фигур, ограниченных ломаными линиями со взаимно перпендикулярными участками, с помощью формул (10-1) и (10-2) могут быть выражены через с. г. р. прямоугольников от самих себя и взаимные с. г. р. прямоугольников с параллельными сторонами. Последние могут быть определены так, как указано в пп. 25—28 настоящего параграфа.

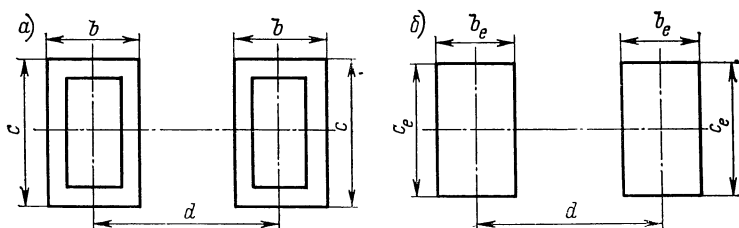


Рис 10-15

31. С. г. р. между площадями двух софокусных эллиптических колец с полуосями  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и  $b_1, b_2, b_3, b_4$  (рис. 10-16) определяется формулой

$$\ln g = \frac{1}{2} \ln \frac{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}{4} + \frac{1}{2} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a_1 b_1 - a_2 b_2} \ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2} - \frac{1}{4} \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 b_1 - a_2 b_2} - \frac{1}{4}, \quad (10-53)$$

причем это выражение не зависит от параметров внутреннего кольца.

В случае когда наружное кольцо тонкое ( $\delta^2 = a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2 \ll b_1^2$ ), вместо формулы (10-53) удобнее пользоваться приближенной формулой

$$\ln g = \ln \frac{a_2 + b_2}{2} - \frac{1}{4} \frac{(a_2 - b_2)^2}{(a_2 + b_2)^2} + \frac{\delta^2}{4a_2 b_2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a_2^2 - b_2^2}{a_2^2 + b_2^2} \right)^2 \right]. \quad (10-54)$$

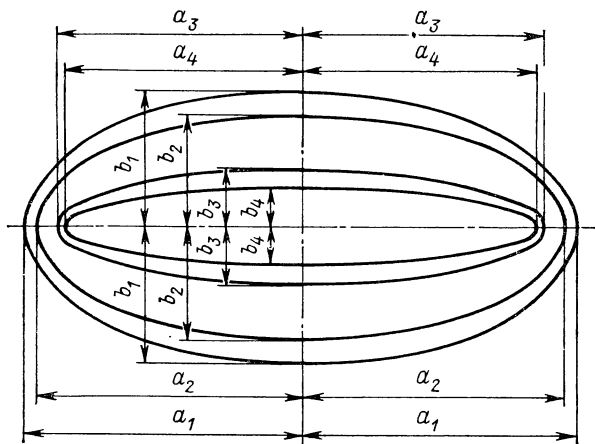


Рис. 10-16



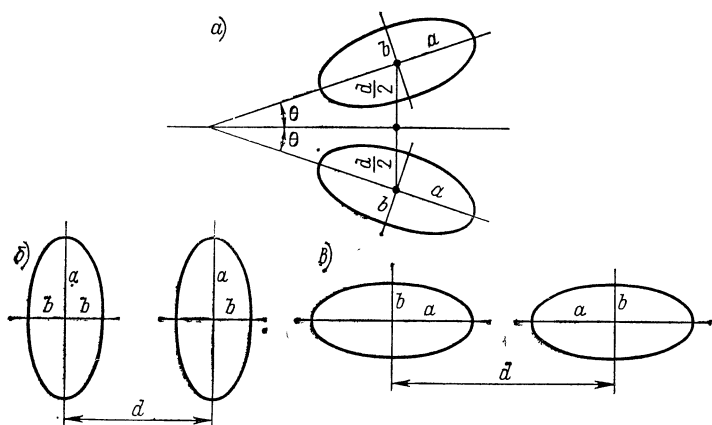


Рис. 10-17

32. С. г. р. между площадями двух одинаковых эллипсов, симметрично расположенных относительно прямой, проходящей через точки пересечения их больших и малых осей (рис. 10-17, а), определяется формулой

$$\ln g = \ln d + \Delta, \quad (10-55)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{4} \delta^2 \cos 2\theta - \frac{1}{32} \delta^4 (3 + 2 \cos 4\theta) + \\ & + \frac{5}{192} \delta^6 (6 \cos 2\theta + \cos 6\theta) - \frac{7}{712} \delta^8 (10 + 10 \cos 4\theta + \cos 8\theta) \dots; \end{aligned} \quad (10-56)$$

$\delta = q/d$ ;  $q = \sqrt{a^2 - b^2}$ ;  $a$  и  $b$  — полуоси эллипсов;  $d$  — расстояние между их центрами;  $\theta$  — половина угла между большими осями эллипсов. Сходимость ряда (10-56) зависит от соотношения между  $q$  и  $d$  и от угла  $\theta$ ; если  $\delta < 1/2$ , то ряд сходится достаточно быстро при всех значениях угла  $\theta$ .

Если большие оси эллипсов параллельны ( $\theta = 0$ , рис. 10-17, б), то формула (10-56) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{4} \delta^2 - \frac{5}{32} \delta^4 + \frac{35}{192} \delta^6 - \frac{147}{712} \delta^8 + \dots = \\ = & \frac{1}{4} \delta^2 \left( 1 - \frac{5}{8} \delta^2 + \frac{35}{48} \delta^4 - \frac{147}{178} \delta^6 + \dots \right). \end{aligned} \quad (10-57)$$

Если параллельны малые оси эллипсов ( $\theta = \pi/2$ , рис. 10-17, в), то

$$\Delta = - \left( \frac{1}{4} \delta^2 + \frac{5}{32} \delta^4 + \frac{35}{192} \delta^6 + \frac{147}{712} \delta^8 + \dots \right) = \\ = - \frac{1}{4} \delta^2 \left( 1 + \frac{5}{8} \delta^2 + \frac{35}{48} \delta^4 + \frac{147}{178} \delta^6 + \dots \right). \quad (10-58)$$

**Пример 10-1.** Два параллельных отрезка длиной  $c = 10$  см расположены на расстоянии  $d = 5$  см друг от друга, как показано на рис. 10-8, б. Определить с. г. р. между ними.

**Решение.** В данном случае

$$r = \sqrt{0,1^2 + 0,05^2} = 0,1118 \text{ м}; \quad \varphi = 2 \arctg \frac{10}{5} = 2,2146;$$

$$\frac{d}{c} = \frac{0,05}{0,10} = 0,5,$$

и, применяя формулу (10-28), имеем

$$\ln g = 0,25 \ln \frac{0,05}{0,1118} + \ln 0,1118 + 0,5 \cdot 2,2146 - 1,5 = -2,672,$$

откуда  $g = 0,06911 \text{ м} = 6,911 \text{ см}$ .

**Пример 10-2.** Два одинаковых прямоугольника, стороны которых равны  $b = 1$  см и  $c = 5$  см, расположены так, как показано на рис. 10-11; причем расстояние между осями прямоугольников  $d = 3$  см. Определить с. г. р. между площадями прямоугольников.

**Решение.**

1. Применяем формулу (10-41). В данном случае

$$d + c + b = 0,09 \text{ м}; \quad \ln 0,09 = -2,408; \quad (d/b + 1)^2 = 16;$$

$$d + c - b = 0,07 \text{ м}; \quad \ln 0,07 = -2,659; \quad (d/b - 1)^2 = 4;$$

$$d + c = 0,08 \text{ м}; \quad \ln 0,08 = -2,526; \quad (d/b)^2 = 9;$$

$$\ln g = \ln 0,2236 - 8 \cdot 2,408 - 2 \cdot 2,659 + 9 \cdot 2,526 = -3,350;$$

$$g = 0,03506 \text{ м} = 3,506 \text{ см}.$$

2. Применяем формулу (10-42). В данном случае

$$x = 1/8 = 0,125; \quad \ln [k(d + c)] = \ln (0,2236 \cdot 0,08) = -4,024;$$

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} = 0,9422; \quad \frac{2d}{d + c} = \frac{6}{8} = 0,75;$$

$$0,75 \cdot 0,9422 = 0,7066;$$

$$1 + \frac{x^2}{2} = 1,0078; \quad \frac{1}{2} \left( \frac{d - b}{d + c} \right)^2 = 0,03125;$$

$$0,03125 \cdot 1,0078 = 0,0315;$$

$$\ln g = -4,024 + 0,7066 - 0,0315 = -3,349.$$

3. Применяем формулу (10-44).

При  $d/c = 0,6$  и  $b/c = 0,2$  из табл. 10-5 находим  $f = 0,1573$ , и, следовательно,  $\ln g = \ln 0,03 + 0,1573 = -3,507 + 0,1573 = -3,350$ .

4. Приближенно принимаем, что с. г. р. между площадями прямоугольников равно с. г. р. между двумя соответствующими отрезками, совпадающими с продольными осями прямоугольников. Для определения с. г. р. между отрезками применяем формулу (10-28), полагая в ней  $d = 3$  см,  $c = 5$  см. Тогда

$$r = \sqrt{9 + 25} = 5,831 \text{ см}; \quad \varphi = 2 \arctg \frac{5}{3} = 2,062$$

и

$$\ln g = 0,36 \ln \frac{3}{5,831} + \ln 0,05831 + 0,6 \cdot 2,062 - 1,5 = -3,334.$$

Как видно из приведенных расчетов, три первых способа дают совпадающие результаты, последний способ дал погрешность около 0,5 %.

**Пример 10-3.** Два одинаковых прямоугольника, стороны которых равны  $b = 1$  см и  $c = 5$  см, расположены так, как показано на рис. 10-13; причем расстояние между продольными осями прямоугольников  $X = 3$  см, а расстояние между их поперечными осями  $Y = 6$  см. Определить с. г. р. между площадями прямоугольников.

**Решение.**

1. Применяем формулы (10-47) и (10-49). В данном случае

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{9 + 36} = 6,708 \text{ см}; \quad u = X/D = 0,4472;$$

$$\beta = 1/6,708 = 0,1491; \quad \beta^2 = 0,02222;$$

$$\beta^4 = 0,00049; \quad \beta^2 - \gamma^2 = -0,5333;$$

$$\gamma = 5/6,708 = 0,7454; \quad \gamma^2 = 0,5555;$$

$$\gamma^4 = 0,3086; \quad 1 - 2u^2 = 0,6;$$

$$\frac{1}{12} \cdot 0,5333 \cdot 0,6 = 0,02666;$$

$$\beta^4 + \gamma^4 - \frac{5}{2} \beta^2 \gamma^2 = 0,2790;$$

$$1 - 8u^2 + 8u^4 = -0,28;$$

$$\frac{1}{60} \cdot 0,2790 \cdot 0,28 = 0,00130;$$

$$\Delta = -0,02666 + 0,00130 = -0,02536;$$

$$\ln g = \ln 6,708 - 0,02536 = 1,878;$$

$$g = 6,540 \text{ см.}$$

Отношение  $g/D = 0,9750$ .

2. Применяем метод, указанный в п. 28. Разбиваем каждый прямоугольник на 5 квадратов со стороной  $b = 1$  см (рис. 10-18). Имеем

$$r_{15}^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \text{ см}^2;$$

$$r_{25}^2 = 10^2 + 3^2 = 109 \text{ см}^2;$$

$$r_{35}^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \text{ см}^2;$$

$$r_{55}^2 = 9^2 + 3^2 = 90 \text{ см}^2;$$

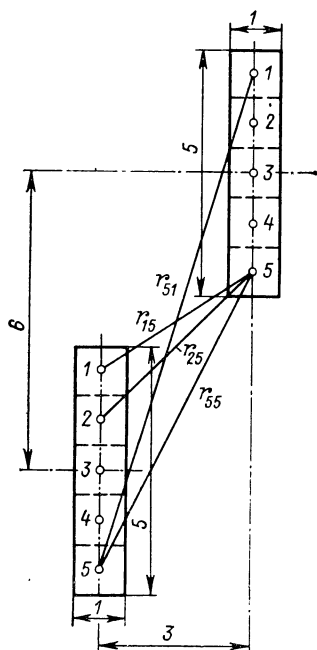


Рис. 10-18

$$\begin{aligned} r_{35}^2 &= 4^2 + 3^2 = 25 \text{ см}^2; & r_{53}^2 &= 8^2 + 3^2 = 73 \text{ см}^2; \\ r_{45}^2 &= 5^2 + 3^2 = 34 \text{ см}^2; & r_{54}^2 &= 7^2 + 3^2 = 58 \text{ см}^2; \\ r_{55}^2 &= 6^2 + 3^2 = 45 \text{ см}^2; & r_{55}^2 &= 6^2 + 3^2 = 45 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Напишем формулу (10-50) в виде

$$\ln g = \frac{1}{n^2} \ln \prod_{k=1}^{i=n} \prod_{i=1}^{k=n} r_{ki} = \frac{1}{2n^2} \ln \prod_{k=1}^{i=n} \prod_{i=1}^{k=n} r_{ki}^2$$

и подставим в нее значения  $r_{ki}^2$ :

$$\ln g = \frac{1}{50} \ln (13 \cdot 18^2 \cdot 25^3 \cdot 34^4 \cdot 45^5 \cdot 58^4 \cdot 73^3 \cdot 90^2 \cdot 109) = 1,879;$$

$$g = 6,547 \text{ см.}$$

Расхождение между результатами расчета, произведенного обоими методами, незначительно.

#### 10-4. СРЕДНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ НЕКОТОРЫХ ФИГУР

1. С. а. р. окружности радиуса  $r$  от самой себя

$$a = 4r/\pi. \quad (10-59)$$

2. С. а. р. площади круга радиуса  $r$  от самой себя

$$a = 128r/(45\pi). \quad (10-60)$$

3. С. а. р. прямолинейного отрезка длиной  $b$  от самого себя

$$a = b/3. \quad (10-61)$$

4. С. а. р. периметра прямоугольника со сторонами  $b$  и  $c$  от самого себя определяется из формулы

$$\begin{aligned} 2(b+c)a &= b^2 \left( c + \frac{2}{3}b \right) \ln \frac{c+d}{b} + c^2 \left( b + \frac{2}{3}c \right) \ln \frac{b+d}{c} + \\ &+ \frac{4}{3}bcd - \frac{1}{3}d^3 + b^3 + c^3, \end{aligned} \quad (10-62)$$

где  $d = \sqrt{b^2 + c^2}$  — диагональ прямоугольника.

В частности, для квадрата ( $b = c$ ,  $d = \sqrt{2}b$ )

$$a = \frac{b}{12} [5 \ln (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} + 3] = 0,7350 b. \quad (10-63)$$

5. С. а. р. площади прямоугольника со сторонами  $b$  и  $c$  от самой себя

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{6} \frac{b^2}{c} \ln \frac{c+d}{b} + \frac{1}{6} \frac{c^2}{b} \ln \frac{b+d}{c} + \frac{d}{3} - \\ &- \frac{1}{15} \frac{d^5}{b^2 c^2} + \frac{1}{15} \frac{b^5}{c^2} + \frac{1}{15} \frac{c^5}{b^2}, \end{aligned} \quad (10-64)$$

где  $d$  — диагональ прямоугольника.

В частности, для квадрата ( $b = c$ ,  $d = \sqrt{2}b$ )

$$a = \frac{b}{3} \left[ \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{2}{5} \right] = 0,5214 b. \quad (10-65)$$

6. С. а. р. между двумя прямолинейными отрезками, расположенными согласно рис. 10-8, б,

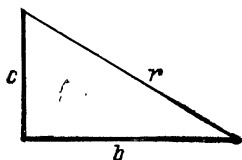
$$a = \frac{d^2}{c} \ln \frac{c+r}{d} - \frac{d^2}{c^2} r + \frac{r^3}{3c^2} + \frac{2}{3} \frac{d^3}{c^2}, \quad (10-66)$$

где

$$r = \sqrt{d^2 + c^2}. \quad (10-67)$$

7. С. а. р. между двумя прямолинейными отрезками, расположенными согласно рис. 10-8, в, равно расстоянию между их серединами:  $a = D$ .

8. С. а. р. между двумя взаимно перпендикулярными прямолинейными отрезками  $b$  и  $c$ , сходящимися в одной точке (рис. 10-19),



$$a = \frac{1}{6} \frac{b^2}{c} \ln \frac{c+r}{b} + \frac{1}{6} \frac{c^2}{b} \ln \frac{b+r}{c} + \frac{r}{3}. \quad (10-68)$$

Рис. 10-19

9. С. а. р. между площадями двух узких и достаточно удаленных друг от друга прямоугольников может быть принято равным с. а. р. между двумя соответствующими отрезками, совпадающими с продольными осями прямоугольников. В частности, для двух одинаковых узких прямоугольников, расположенных согласно рис. 10-12, а, справедлива формула (10-66), а для прямоугольников, расположенных согласно рис. 10-12, б, — формула  $a = D$ .

10. С. а. р. между площадями двух прямоугольников с параллельными сторонами при произвольном их расположении на плоскости может быть определено по формулам (1-50)–(1-58), если положить

$$F(k) = s_k^2 a_{kk}; \quad F(k \times i) = s_k s_i a_{ki}. \quad (10-69)$$

Тем самым задача сводится к определению с. а. р. площадей нескольких прямоугольников от самих себя.

Если расстояние между центрами прямоугольников больше каждой из их сторон, то для определения с. а. р. между площадями прямоугольников лучше пользоваться методом ряда Тейлора (§ 1-11).

11. С. а. р. площадей фигур, ограниченных ломаными линиями со взаимно перпендикулярными участками, могут быть выражены через с. а. р.  $a_{kk}$  прямоугольников от самих себя и взаимные с. а. р.  $a_{ki}$  прямоугольников с параллельными сторонами, для чего достаточно воспользоваться формулами (10-1) и (10-2), понимая под  $F(k)$  и  $F(k \times i)$  величины, определяемые формулами (10-69). При этом с. а. р.  $a_{kk}$  и  $a_{ki}$  могут быть определены так, как указано выше в пп. 5, 9 и 10.

## 10-5. СРЕДНИЕ КВАДРАТИЧНЫЕ РАССТОЯНИЯ НЕКОТОРЫХ ФИГУР

1. С. к. р. окружности радиуса  $r$  от самой себя

$$q = r \sqrt{2}. \quad (10-70)$$

2. С. к. р. площади круга от самой себя равно радиусу круга.

3. С. к. р. прямолинейного отрезка длиной  $b$  от самого себя

$$b = b/\sqrt{6}. \quad (10-71)$$

4. С. к. р. периметра прямоугольника со сторонами  $b$  и  $c$  от самого себя определяется из формулы

$$(b+c)^2 q^2 = \frac{1}{6} (b^4 + c^4) + b^2 c^2 + \frac{2}{3} bc (b^2 + c^2). \quad (10-72)$$

В частности, для квадрата ( $b = c$ )

$$q^2 = \frac{2}{3} b^2 \quad \text{или} \quad q = 0,8165b. \quad (10-73)$$

5. С. к. р. площади прямоугольника со сторонами  $b$  и  $c$  от самой себя вычисляется по формуле

$$q^2 = \frac{1}{6} (b^2 + c^2). \quad (10-74)$$

В частности, для квадрата ( $b = c$ )

$$q^2 = b^2/3 \quad \text{или} \quad q = 0,5774b. \quad (10-75)$$

6. С. к. р. между двумя окружностями определяется из формулы

$$q^2 = d^2 + r_1^2 + r_2^2, \quad (10-76)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы окружностей;  $d$  — расстояние между их центрами.

7. С. к. р. между площадями двух кругов находится по формуле

$$q^2 = d^2 + \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}, \quad (10-77)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы кругов;  $d$  — расстояние между их центрами.

8. С. к. р. между двумя прямолинейными отрезками, расположенными согласно рис. 10-8, б, определяется из формулы

$$q^2 = d^2 + c^2/6. \quad (10-78)$$

9. С. к. р. между двумя прямолинейными отрезками, расположенными согласно рис. 10-8, в, находится по формуле

$$q^2 = D^2 + b^2/6. \quad (10-79)$$

10. С. к. р. между двумя взаимно перпендикулярными прямолинейными отрезками  $b$  и  $c$ , сходящимися в одной точке (рис. 10-19),

$$q = \sqrt{(b^2 + c^2)/3}. \quad (10-80)$$

11. С. к. р. между площадями двух узких и достаточно удаленных друг от друга прямоугольников может быть принято равным с. к. р. между двумя соответствующими отрезками, совпадающими с продольными осями прямоугольников. В частности, для двух одинаковых узких прямоугольников, расположенных согласно рис. 10-12, справедлива формула (10-78) при  $b \ll c$  и формула (10-79) при  $b \gg c$ .

12. С. к. р. между площадями двух прямоугольников с параллельными сторонами при произвольном их расположении на плоскости может быть определено по формулам (1-50) — (1-58), если положить

$$F(k) = s_k^2 q_k^2; \quad F(k \times i) = s_k s_i q_{ki}^2. \quad (10-81)$$

Тем самым задача сведется к определению с. к. р. площадей нескольких прямоугольников от самих себя.

Если расстояние между центрами прямоугольников больше каждой из их сторон, то для определения с. к. р. между площадями прямоугольников лучше пользоваться методом ряда Тейлора (§ 1-11).

13. С. к. р. площадей фигур, ограниченных ломаными линиями со взаимно перпендикулярными участками, могут быть выражены через с. к. р.  $q_h$  прямоугольников от самих себя и взаимные с. к. р.  $q_{hi}$  прямоугольников с параллельными сторонами, для чего достаточно воспользоваться формулами (10-1) и (10-2), понимая под  $F(k)$  и  $F(k \times i)$  величины, определяемые формулами (10-81). При этом с. к. р.  $q_h$  и  $q_{hi}$  могут быть определены так, как указано выше в пп. 5, 11 и 12.

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

---

### ИНДУКТИВНОСТИ ЭКРАНИРОВАННЫХ КОНТУРОВ И КАТУШЕК

---

#### 11-1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Собственные и взаимные индуктивности ( $L$  и  $M$ ) экранированных контуров и катушек \* могут быть найдены как суммы соответствующих индуктивностей ( $L_0$  и  $M_0$ ), определенных без учета экрана, и вносимых индуктивностей ( $\Delta L$  и  $\Delta M$ ), учитывающих влияние экрана:

$$L = L_0 + \Delta L; \quad M = M_0 + \Delta M; \quad (11-1; 11-2)$$

причем формула (11-1) применима также и к эквивалентным индуктивностям отдельных фаз трехфазной линии (§ 1-13, 3-15).

Индуктивности  $L_0$  и  $M_0$  определяются в различных случаях так, как указано в гл. 2—9. В настоящей главе даны формулы и кривые для определения вносимых индуктивностей  $\Delta L$  и  $\Delta M$  контуров и катушек, расположенных вблизи, внутри или вне магнитных или электромагнитных экранов различной формы — плоских, двухсторонних плоских, цилиндрических и сферических.

Под *плоским* экраном понимается пластина, ограниченная двумя параллельными бесконечными плоскостями; под *двухсторонним плоским* экраном — совокупность двух таких

---

\* Здесь и в дальнейшем общий термин «контур» включает в себя и двухпроводные линии, которые можно рассматривать как весьма длинные контуры прямоугольной формы.

параллельных пластин, между которыми расположен экранируемый объект (контур, катушка). *Цилиндрическим экраном* называется полый цилиндр кругового сечения (бесконечно длинный или ограниченный с двух сторон плоскими крышками, перпендикулярными оси цилиндра). *Сферический экран* представляет собой замкнутую оболочку сферической формы.

2. В соответствии с ГОСТ 18311—80 под *магнитными экранами* понимаются экраны, действие которых основано на использовании высокой магнитной проницаемости материала экрана; под *электромагнитными* понимаются экраны, действие которых основано на использовании вихревых токов, возникающих в проводящих стенках экрана.

3. Все приведенные в настоящей главе формулы и кривые для вносимых индуктивностей относятся к *идеальным* экранам: предполагается, что магнитные экраны выполнены из непроводящего материала с бесконечно большой магнитной проницаемостью ( $\gamma = 0, \mu = \infty$ ), а электромагнитные — из немагнитного материала с бесконечно большой удельной электрической проводимостью ( $\mu = \mu_0, \gamma = \infty$ ).

При указанном допущении толщина стенки экрана значения не имеет.

О погрешности, связанной с отличием реальных экранов от идеальных, см. в § 1-16.

4. Все рассматриваемые провода и контуры предполагаются *линейными*, т. е. имеющими поперечное сечение, линейные размеры которого достаточно малы по сравнению с другими размерами проводов и контуров и расстояниями между ними. В соответствии с этим при расчете не только взаимных ( $\Delta M$ ), но и собственных ( $\Delta L$ ) вносимых индуктивностей провода и контуры рассматриваются как бесконечно тонкие нити соответствующей формы; при этом истинный характер распределения тока по сечениям проводов значения не имеет.

Во всех приводимых ниже формулах вносимые (собственные и взаимные) индуктивности *линейные* даны на единицу их длины.

5. Все рассматриваемые в этой главе *катушки* предполагаются имеющими прямоугольное поперечное сечение (рис. 6-1), причем в зависимости от соотношения между размерами катушек применяется терминология, указанная в § 6-1. Как и в гл. 6—9, предполагается, что витки каждой из катушек представляют собой коаксиальные круговые контуры, имеют бесконечно тонкую изоляцию, плотно запол-



няют все пространство, занятые обмоткой, и уложены равномерно как по длине, так и в радиальном направлении. При определении вносимых (собственных и взаимных) индуктивностей возможная неравномерность распределения тока по сечениям отдельных витков не учитывается; поправка на изоляцию (§ 1-14) не вносится.

Расчетные размеры катушек определяются так, как указано в § 6-1, п. 3.

6. При указанных в п. 5 условиях магнитное поле катушки, имеющей  $\omega$  витков, не отличается от магнитного поля массивного витка тех же размеров, если ток в витке, равномерно распределенный по его сечению, в  $\omega$  раз больше тока катушки. Поэтому при указанных условиях вносимые собственные и взаимные индуктивности массивных колец могут быть найдены по формулам для вносимых индуктивностей соответствующих катушек, если в этих формулах положить числа витков равными единице.

7. Применяя метод эквивалентных контуров, изложенный в § 7-12, т. е. заменяя каждую катушку двумя «эквивалентными» круговыми контурами, можно свести определение вносимых собственных и взаимных индуктивностей катушек и массивных колец к определению вносимых (собственных и взаимных) индуктивностей эквивалентных контуров.

При степени точности, обычно достаточной для большинства инженерных расчетов, такой метод в ряде случаев приводит к заметному упрощению расчета.

Размеры и положение эквивалентных контуров должны быть определены так, как указано в § 7-12, после чего вносимые собственные и взаимные индуктивности катушек определяются по формулам:

$$\Delta L = \frac{\omega^2}{4} (\Delta L_1 + \Delta L_2 + 2 \Delta M_{12}); \quad (11-3)$$

$$\Delta M = \frac{\omega W}{4} (\Delta M_{13} + \Delta M_{14} + \Delta M_{23} + \Delta M_{24}), \quad (11-4)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков рассматриваемых катушек, а слагаемые в скобках — вносимые собственные и взаимные индуктивности эквивалентных контуров (нумерация контуров соответствует указанной в § 7-12: 1 и 2 — для одной катушки, 3 и 4 — для другой).

8. За исключением областей, занятых экранами, среда, в которой расположены рассматриваемые контуры и катушки, предполагается непроводящей и немагнитной ( $\gamma = 0$ ,  $\mu = \mu_0$ ).

9. При рассмотрении экранов различной формы используются различные системы координат — декартова ( $x, y, z$ ), цилиндрическая ( $r, \varphi, z$ ) и сферическая ( $r, \theta, \varphi$ ); направление осей и начало координат выбираются в соответствии с условиями рассматриваемой задачи.

10. Используемые в настоящей главе функции Лежандра  $P_n(x)$ , функции Бесселя первого рода  $J_n(x)$  и модифицированные функции Бесселя  $I_n(x)$  и  $K_n(x)$  первого и второго рода могут быть найдены по соответствующим формулам и таблицам (приложение 1).

## 11-2. ПЛОСКИЙ МАГНИТНЫЙ ЭКРАН

1. Двухпроводная линия, провода которой параллельны границе экрана (рис. 11-1).

Вносимая собственная индуктивность линии

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{d^2}{4h_1 h_2} \right); \quad (11-5)$$

в частности, при  $h_1 = h_2 = h$

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{d^2}{4h^2} \right); \quad (11-6)$$

при  $h_1 = h - d/2$ ;  $h_2 = h + d/2$

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{4h^2}{4h^2 - d^2}. \quad (11-7)$$

2. Две двухпроводные линии, параллельные друг другу и границе экрана (рис. 11-2).

Для расположения по рис. 11-2, а вносимая взаимная индуктивность линий

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ 1 + \frac{d^2}{(h_1 + h_2)^2} \right]; \quad (11-8)$$

для расположения по рис. 11-2, б

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{(h_1 + h_2)^2 + D^2}{\sqrt{4h_1^2 + D^2} \sqrt{4h_2^2 + D^2}}; \quad (11-9)$$

для расположения по рис. 11-2, в

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \ln \frac{[4h^2 + (d + d_1)^2][4h^2 + (d + d_2)^2]}{(4h^2 + d^2)[4h^2 + (d + d_1 + d_2)^2]}. \quad (11-10)$$

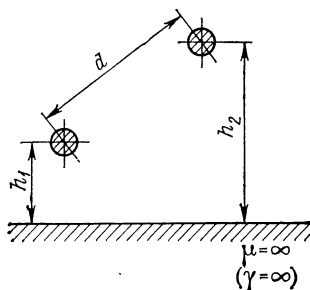


Рис. 11-1

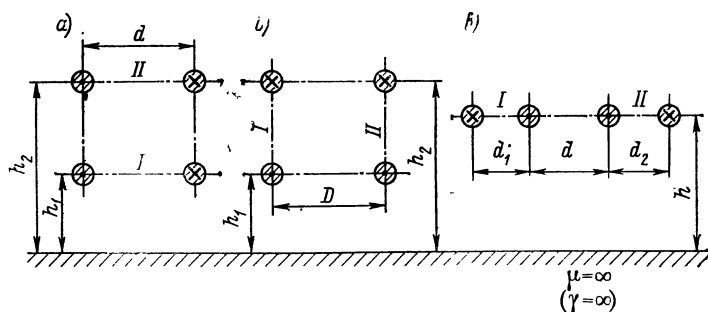


Рис. 11-2

### 3. Трехфазная линия (рис. 11-3).

Для расположения по рис. 11-3, а вносимые индуктивности фаз

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_1 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{h(h+d/2)}}{h+d}; & \Delta L_2 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{h^2-d^2/4}}{h}; \\ \Delta L_3 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{h(h-d/2)}}{h-d}. \end{aligned} \right\} \quad (11-11)$$

Средняя вносимая индуктивность трех фаз

$$\Delta L_{\nu} = \frac{\mu_0}{6\pi} \ln \frac{h^2-d^2/4}{h^2-d^2}. \quad (11-12)$$

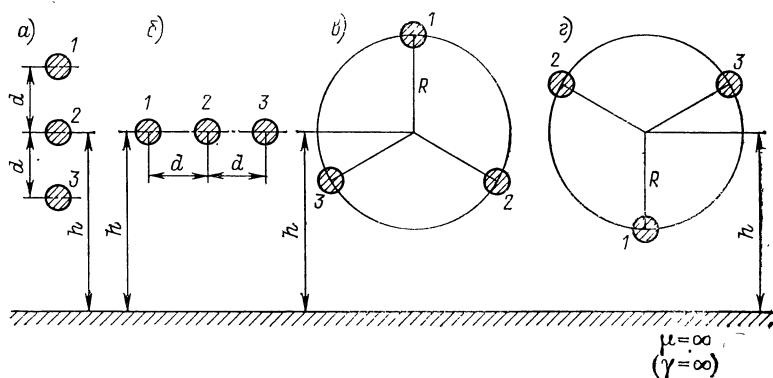


Рис. 11-3

Для расположения по рис. 11-3, б

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_1 = \Delta L_3 &= \frac{\mu_0}{8\pi} \ln \frac{(4h^2 + d^2)(h^2 + d^2)}{4h^4}; \\ \Delta L_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{4h^2 + d^2}{4h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11-13)$$

Средняя вносимая индуктивность трех фаз

$$\Delta L_p = \frac{\mu_0}{6\pi} \ln \frac{(4h^2 + d^2) \sqrt{h^2 + d^2}}{4h^3}. \quad (11-14)$$

Для расположения по рис. 11-3, в

$$\Delta L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{4h^2 + 2hR + R^2}}{2(h + R)}; \quad (11-15)$$

$$\Delta L_2 = \Delta L_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{2 \sqrt{4h^2 + 2hR + R^2} \sqrt{h^2 - hR + R^2}}{(2h - R)^2}. \quad (11-16)$$

Средняя вносимая индуктивность трех фаз

$$\Delta L_p = \frac{\mu_0}{6\pi} \ln \frac{(4h^2 + 2hR + R^2) \sqrt{h^2 - hR + R^2}}{(h + R)(2h - R)^2}. \quad (11-17)$$

Для расположения по рис. 11-3, г

$$\Delta L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{4h^2 - 2hR + R^2}}{2(h - R)}; \quad (11-18)$$

$$\Delta L_2 = \Delta L_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{2 \sqrt{4h^2 - 2hR + R^2} \sqrt{h^2 + hR + R^2}}{(2h + R)^2}. \quad (11-19)$$

Средняя вносимая индуктивность трех фаз

$$\Delta L_p = \frac{\mu_0}{6\pi} \ln \frac{(4h^2 - 2hR + R^2) \sqrt{h^2 + hR + R^2}}{(h - R)(2h + R)^2}. \quad (11-20)$$

4. Прямоугольный контур, лежащий в плоскости, параллельной границе экрана (рис. 11-4).

Вносимая собственная индуктивность контура

$$\begin{aligned} \Delta L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ a \ln \left( \frac{a + d_1}{a + D} \frac{d_2}{x} \right) + b \ln \left( \frac{b + d_2}{b + D} \frac{d_1}{x} \right) + \right. \\ \left. + 2(D - d_1 - d_2 + x) \right], \end{aligned} \quad (11-21)$$

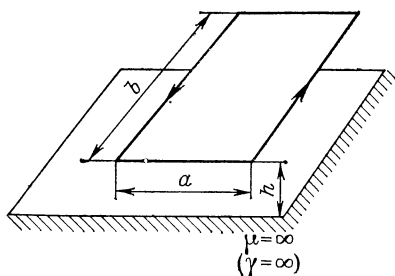


Рис. 11-4

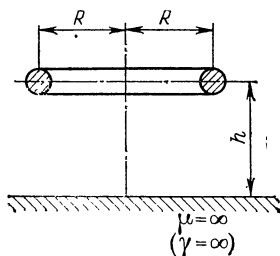


Рис. 11-5

где

$$\left. \begin{aligned} x &= 2h; & d_1 &= \sqrt{a^2 + x^2}; & d_2 &= \sqrt{b^2 + x^2}; \\ D &= \sqrt{a^2 + b^2 + x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11-22)$$

5. Круговой контур, лежащий в плоскости, параллельной границе экрана (рис. 11-5).

Вносимая собственная индуктивность контура

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{4\pi} RF, \quad (11-23)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны в табл. 5-3 и 5-4 в зависимости от величин  $\xi = h/R$  и  $\gamma = R/h$ .

6. Соленоид, ось которого перпендикулярна границе экрана (рис. 11-6, а).

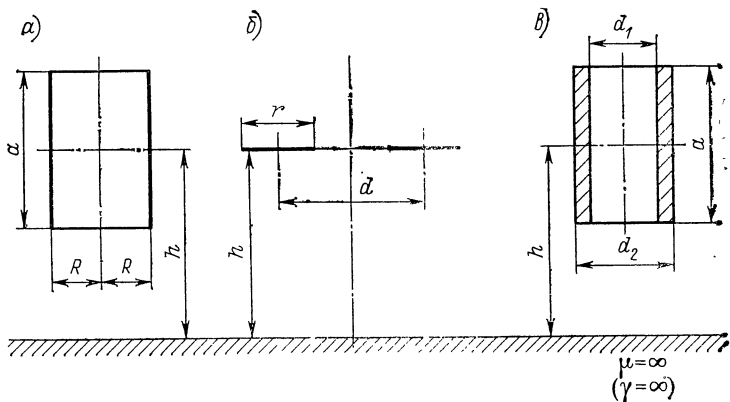


Рис. 11-6

Вносимая собственная индуктивность соленоида

$$\Delta L = \frac{\pi}{8} \mu_0 \omega^2 \frac{d^2}{a^2} [(2h + a) K_{a1} + (2h - a) K_{a2} - 4h K_{a3}]; \quad (11-24)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида;  $K_{a1}$ ,  $K_{a2}$ ,  $K_{a3}$  — значения коэффициента  $K_a$ , приведенные в табл. 6-2, при  $\alpha = (2h + a)/d$ ,  $(2h - a)/d$  и  $(2h)/d$  соответственно;  $d = 2R$ .

7. Плоская катушка, плоскость которой параллельна границе экрана (рис. 11-6, б).

Вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 d \Phi, \quad (11-25)$$

где  $\omega$  — число витков катушки,  $\Phi$  — величина, значения которой могут быть взяты из рис. 7-7 в зависимости от значений  $\rho = r/d$  и  $\xi = 2h/d$ .

8. Катушка прямоугольного сечения, ось которой перпендикулярна границе экрана (рис. 11-6, в).

Вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 - 2L_3), \quad (11-26)$$

где  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  — собственные индуктивности катушек, имеющих те же диаметры  $d_1$  и  $d_2$  и ту же плотность витков, что и данная катушка, и длины, равные соответственно  $2h + a$ ,  $2h - a$ ,  $2h$ .

Индуктивности  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  могут быть найдены с помощью формул, таблиц и кривых, данных в § 6-5.

9. В соответствии с методом зеркальных изображений [15] вносимая собственная индуктивность  $\Delta L_I$  любого контура  $I$ , расположенного в однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu = \mu_0$  вблизи от идеального плоского магнитного экрана (рис. 11-7, а), может быть найдена как взаимная индуктивность  $M_{I, I'}$  этого контура и его зеркального изображения  $I'$  в плоской границе экрана при отсутствии самого экрана (рис. 11-7, б):

$$\Delta L_I = M_{I, I'}. \quad (11-27)$$

Вносимая взаимная индуктивность двух контуров  $I$  и  $II$ , расположенных в однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu = \mu_0$  вблизи от идеального плоского магнитного экрана (рис. 11-7, а), равна взаимной индуктивности  $M_{II, I'}$

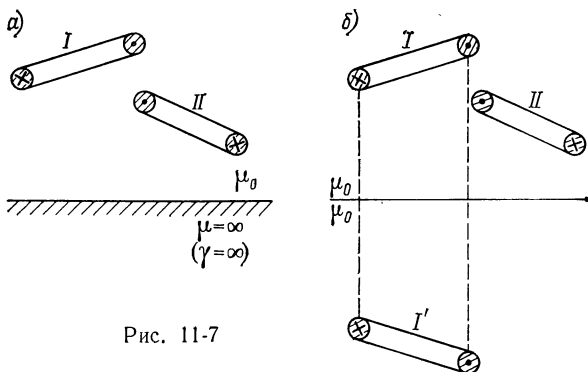


Рис. 11-7

одного из контуров (например,  $II$ ) и зеркального изображения  $I'$  другого контура при отсутствии экрана (рис. 11-7, б):

$$\Delta M_{I, II} = M_{II, I'}. \quad (11-28)$$

Так как катушка представляет собой совокупность отдельных контуров (витков), то аналогичные утверждения справедливы и в отношении катушек.

Таким образом, в соответствии с формулами (11-27) и (11-28) расчет вносимых собственных и взаимных индуктивностей контуров и катушек, расположенных вблизи от плоского магнитного экрана, сводится к расчету взаимных индуктивностей контуров и катушек, расположенных в безграничной однородной среде, т. е. к задаче, решение которой может быть получено с помощью формул, таблиц и кривых, данных в предыдущих главах книги.

**Пример 11-1.** Круговой контур радиуса  $R = 8$  см расположен вблизи от плоского магнитного экрана так, что ось контура параллельна границе экрана и находится от нее на расстоянии  $h = 12$  см; радиус провода  $r = 2$  мм. Определить вносимую собственную индуктивность  $\Delta L$  контура.

**Решение.** В соответствии со сказанным в § 11-2, п. 9, строим зеркальное изображение контура в плоскости, совпадающей с границей экрана, и определяем взаимную индуктивность  $M$  рассматриваемого контура и его изображения. В данном случае оси обоих контуров параллельны и расстояние между ними  $y = 2h$ . Для определения  $M$  применяем формулу (5-38). При  $\xi = 0$ ,  $\eta = y/(2R) = h/R = 1,5$  из рис. 5-17 находим  $\Phi = -0,25$ , и, следовательно,

$$\Delta L = M = -\frac{\mu_0}{2\pi} 8 \cdot 10^{-2} \cdot 0,25 = -4 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

Для сравнения найдем по формуле (5-2) собственную индуктивность  $L_0$  рассматриваемого контура при отсутствии экрана:

$$L_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8 \cdot 10^{-2} (\ln 320 - 1,75) = 4,04 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Таким образом, в данном случае

$$\Delta L/L_0 = \frac{4 \cdot 10^{-9}}{4,04 \cdot 10^{-7}} = 0,99 \cdot 10^{-2} \approx 1\%.$$

### 11-3. ПЛОСКИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ЭКРАН

Вносимые собственные и взаимные индуктивности контуров и катушек, расположенных в однородной среде вблизи от идеального плоского электромагнитного экрана, могут быть найдены по формулам, данным в § 11-2 для плоского магнитного экрана, но при этом знак во всех выражениях для  $\Delta L$  и  $\Delta M$  должен быть изменен на обратный \*. Например, для двухпроводной линии, расположенной вблизи плоского электромагнитного экрана (рис. 11-1), вместо формулы (11-5) имеем

$$\Delta L = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{d^2}{4h_1 h_2} \right) \quad (11-29)$$

и т. д.

Для контуров и катушек произвольного вида при любом их расположении относительно экрана и друг относительно друга вносимые индуктивности могут быть определены по методу зеркальных изображений и вытекающим из него формулам (11-27) и (11-28); при этом направление тока у изображения рассматриваемого контура или катушки для электромагнитного экрана должно быть обратным показанному на рис. 11-7, в соответствии с чем изменятся на обратные знаки взаимных индуктивностей  $M_{I, I'}$  и  $M_{II, I'}$ , а следовательно, и знаки вносимых индуктивностей  $\Delta L_I$  и  $\Delta M_{I, II}$ .

### 11-4. ДВУХСТОРОННИЙ ПЛОСКИЙ МАГНИТНЫЙ ЭКРАН

1. Двухпроводная линия, параллельная границам экрана (рис. 11-8).

Для расположения по рис. 11-8, а вносимая собственная индуктивность линии

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{2h^2}{\pi^2 x^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}}{1 + \cos \frac{\pi z}{h}} \left( \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - 1 \right) \right]; \quad (11-30)$$

---

\* Сказанное относится также и к вносимым индуктивностям отдельных фаз трехфазной линии.



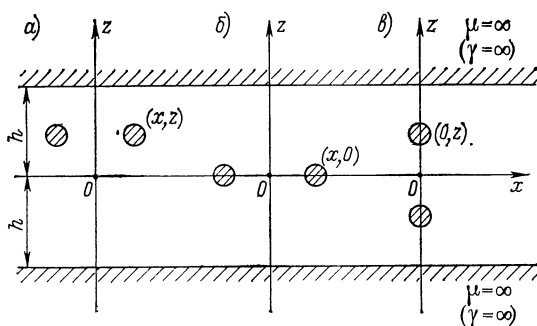


Рис. 11-8

в частности, для линии, симметричной относительно границ экрана (рис. 11-8, б),  $z = 0$  и

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{h}{\pi x} \operatorname{sh} \frac{\pi x}{h} \right). \quad (11-31)$$

Для расположения по рис. 11-8, в

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{2h}{\pi z} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2h} \right). \quad (11-32)$$

2. Две двухпроводные линии, параллельные друг другу и границам экрана (рис. 11-9).

Для расположения по рис. 11-9, а вносимая взаимная индуктивность линии

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{z^2}{x^2 + z^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + 1}{1 - \cos \frac{\pi z}{h}} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi z}{h}}{2} \right). \quad (11-33)$$

Для расположения по рис. 11-9, б

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h} (x_1 + x_2) - 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h} (x_1 - x_2) - 1} \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h} (x_1 + x_2) + \cos \frac{\pi z}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h} (x_1 - x_2) + \cos \frac{\pi z}{h}} \right]; \quad (11-34)$$

в частности, при  $z = 0$  (обе линии симметричны относительно границ экрана)

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left[ \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2h} (x_1 + x_2)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2h} (x_1 - x_2)} \right]. \quad (11-35)$$

Для расположения по рис. 11-9, в

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{x^2}{x^2 + z^2} \operatorname{cth}^2 \frac{\pi x}{2h} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi z}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}} \right). \quad (11-36)$$

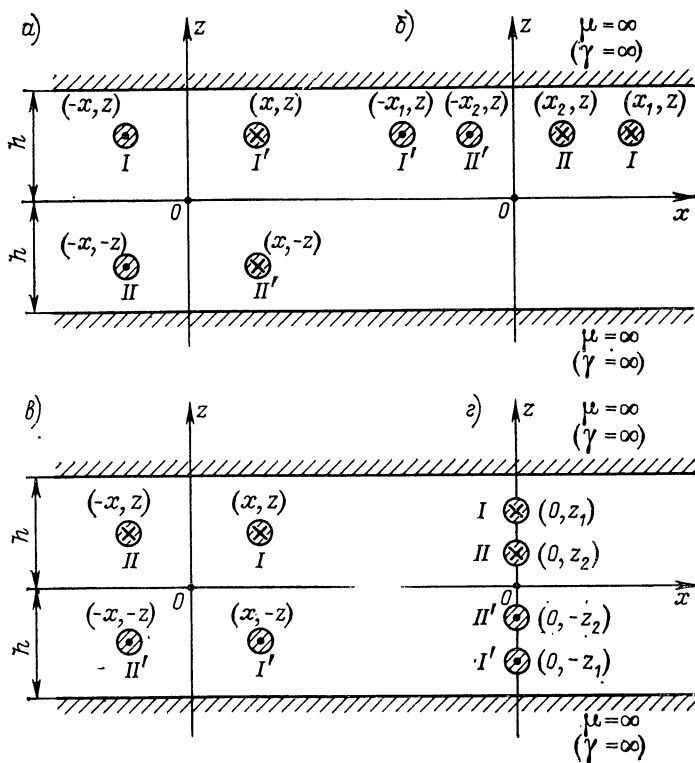


Рис. 11-9

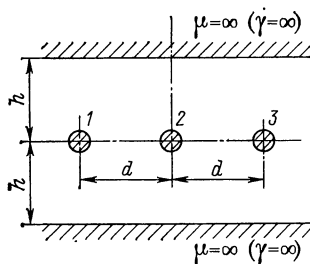


Рис. 11-10

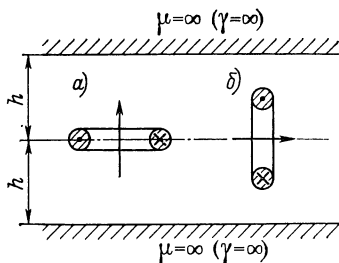


Рис. 11-11

Для расположения по рис. 11-9, *г*

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left[ \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4h} (z_1 + z_2)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4h} (z_1 - z_2)} \right]. \quad (11-37)$$

3. Трехфазная линия, расположенная симметрично относительно границ экрана (рис. 11-10).

Средняя вносимая индуктивность трех фаз

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{3\pi} \left[ \ln \left( \frac{4h^2}{\pi d^2} \operatorname{sh} \frac{\pi d^2}{4h^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{h^2}{\pi d^2} \operatorname{sh} \frac{\pi d^2}{h^2} \right) \right]. \quad (11-38)$$

4. Магнитный диполь (плоский контур произвольной формы, линейные размеры которого значительно меньше расстояния  $2h$  между границами экрана).

Для расположения по рис. 11-11, *а* (диполь расположен на одинаковом расстоянии от границ экрана, его ось перпендикулярна этим границам) вносимая собственная индуктивность

$$\Delta L = \frac{\mu_0 s^2}{8\pi h^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{\mu_0 s^2}{8\pi h^3} \zeta(3), \quad (11-39)$$

где  $s$  — площадь контура,  $\zeta(3) = 1,202$  — дзета-функция Римана.

Для расположения по рис. 11-11, *б* (ось диполя параллельна границам экрана)

$$\Delta L = \frac{3}{64} \frac{\mu_0 s^2}{\pi h^3} \zeta(3), \quad (11-40)$$

где  $s$  и  $\zeta(3)$  — то же, что и в предыдущем случае.

5. Прямоугольный контур со сторонами  $a$  и  $b$ , лежащий в плоскости симметрии, параллельной границам экрана (рис. 11-12,  $a$ ).

При  $a \gg b$  вносимая собственная индуктивность контура может быть определена по формуле (11-31) для вносимой индуктивности соответствующей двухпроводной линии (рис. 11-8,  $b$ ).

При  $b \leq a < h$  величину  $\Delta L$  можно определить по формуле

$$\Delta L = \frac{\mu_0 s^2}{8\pi h^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k^3} - \frac{a^2 + b^2}{8h^3} \frac{1}{k^5} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 s^2}{8\pi h^3} \left[ \zeta(3) - \frac{a^2 + b^2}{8h^2} \zeta(5) \right], \quad (11-41)$$

где  $s = ab$  — площадь контура;  $\zeta(3) = 1,202$  и  $\zeta(5) = 1,037$  — дзета-функции Римана от указанных аргументов.

При произвольном соотношении между размерами  $a$ ,  $b$ ,  $h$

$$\Delta L = 2 \sum_{k=1}^{\infty} M_k, \quad (11-42)$$

где  $M_k > 0$  — взаимная индуктивность двух одинаковых прямоугольников с параллельными сторонами (рис. 4-6,  $a$ ), расположенных на расстоянии  $x$  друг от друга; величины  $M_k$  определяются по формуле (4-39) при  $x = 2kh$ .

Величина  $\Delta L$  может быть также определена по формуле

$$\Delta L = \frac{2\mu_0 a}{\pi} F, \quad (11-43)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-13 в зависимости от величины  $\chi = h/a$  при различных значениях  $\beta = b/a$ .

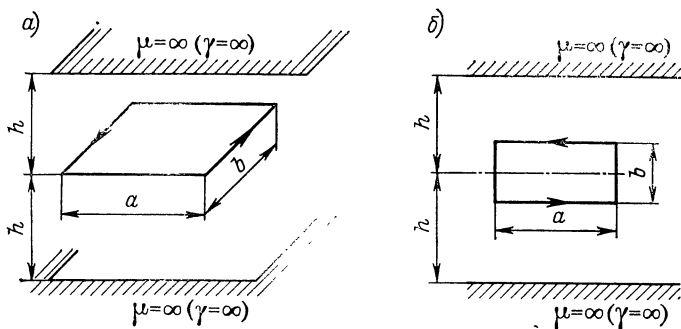


Рис. 11-12

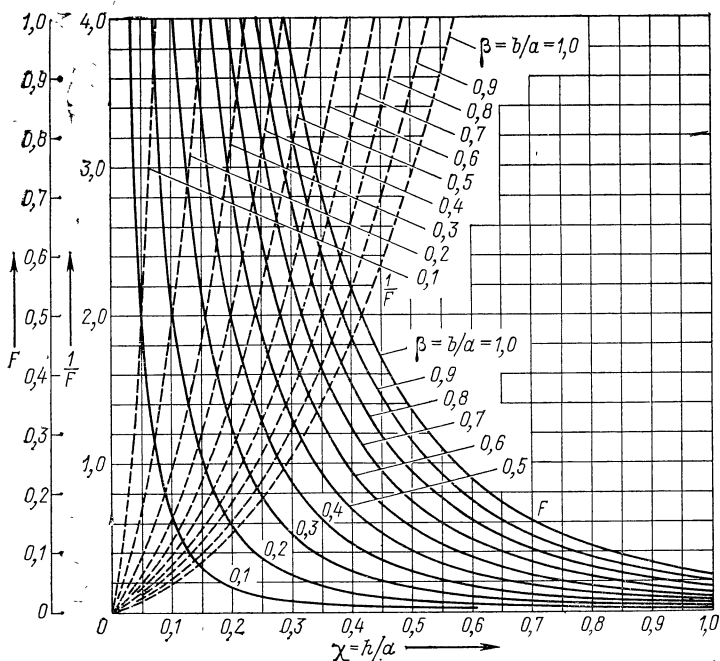


Рис. 11-13

6. Прямоугольный контур со сторонами  $a$  и  $b$ , соответственно параллельными и перпендикулярными границами экрана (рис. 11-12, б).

При  $a \gg b$  вносимая собственная индуктивность контура может быть определена по формуле (11-32) для вносимой индуктивности соответствующей двухпроводной линии (рис. 11-8, в).

При  $a < h$ ,  $b < h$  величину  $\Delta L$  можно определить по формуле

$$\Delta L = \frac{3}{64} \frac{\mu_0 s^2}{\pi h^3} \left[ \zeta(3) + \frac{5}{64} \frac{4a^2 - b^2}{h^2} \zeta(5) \right], \quad (11-44)$$

где  $s = ab$ ;  $\zeta(3)$  и  $\zeta(5)$  — то же, что в формуле (11-41).

При произвольном соотношении между размерами  $a$ ,  $b$ ,  $h$

$$\Delta L = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k M_k, \quad (11-45)$$

где  $M_h < 0$  — взаимная индуктивность рассматриваемого контура и другого такого же контура, стороны  $b$  которого лежат на продолжении сторон  $b$  данного, а центр удален от центра данного контура на расстояние, равное  $2kh$ ; величины  $M_h$  могут быть найдены так, как указано в § 4-11.

7. Круговой контур радиуса  $r_0$ , ось которого перпендикулярна границам экрана (рис. 11-14, а).

Вносимая собственная индуктивность контура

$$\Delta L = \pi \mu_0 r_0^2 \int_0^\infty \left( \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha z_0}{\operatorname{sh} \alpha h} + \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha z_0}{\operatorname{ch} \alpha h} \right) e^{-\alpha h} J_1^2(\alpha r_0) d\alpha; * \quad (11-46)$$

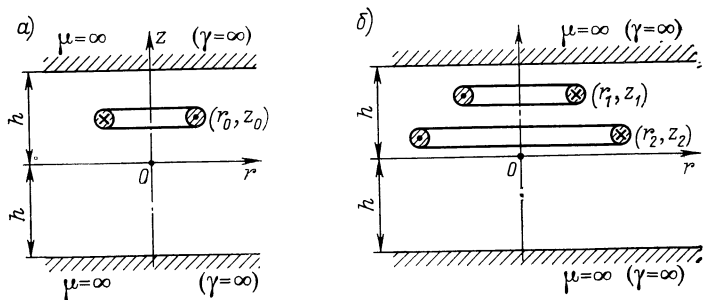


Рис. 11-14

в частности, при  $z_0 = 0$  (контур расположен симметрично относительно границ экрана)

$$\Delta L = \pi \mu_0 r_0^2 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha h}}{\operatorname{sh} \alpha h} J_1^2(\alpha r_0) d\alpha.$$

В последнем случае величину  $\Delta L$  можно найти также по формуле

$$\Delta L = \pi \mu_0 r_0 F, \quad (11-47)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-15 в зависимости от величины  $\chi = h/r_0$ .

При больших значениях  $\chi$  ( $\chi \geq 2$ ) можно пользоваться формулой

$$\Delta L = \frac{\pi}{8} \mu_0 \frac{r_0}{\chi^3} \left[ \zeta(3) - \frac{3}{4} \frac{\zeta(5)}{\chi^2} + \frac{75}{128} \frac{\zeta(7)}{\chi^4} \right], \quad (11-48)$$

\* Здесь и далее в этой главе через  $J_1$  обозначены функции Бесселя первого рода первого порядка от указанных аргументов.

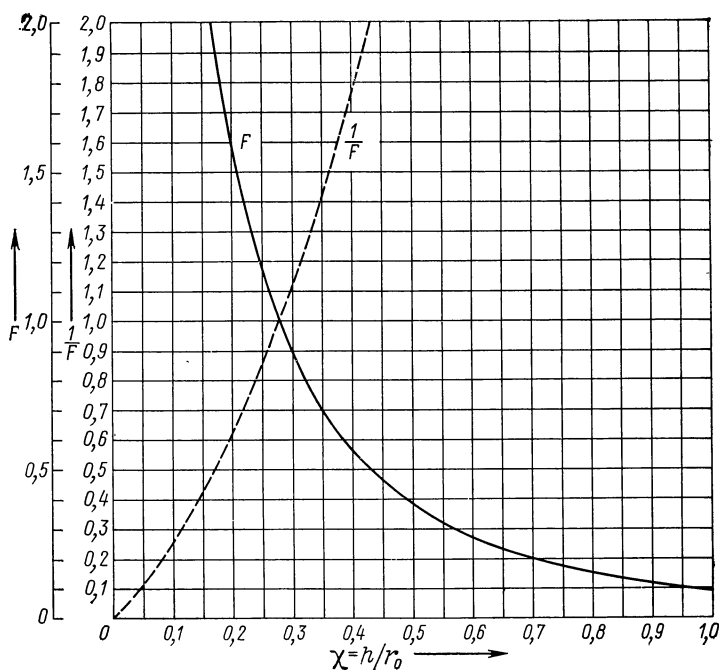


Рис. 11-15

где  $\zeta(3) = 1,202$ ;  $\zeta(5) = 1,037$ ;  $\zeta(7) = 1,017$  — дзета-функции Римана от указанных аргументов.

8. Два круговых контура с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , общая ось которых перпендикулярна границам экрана (рис. 11-14,б).

Вносимая взаимная индуктивность контуров

$$\Delta M = \pi \mu_0 r_1 r_2 \int_0^{\infty} \left( \frac{\operatorname{ch} \alpha z_1 \operatorname{ch} \alpha z_2}{\operatorname{sh} \alpha h} + \frac{\operatorname{sh} \alpha z_1 \operatorname{sh} \alpha z_2}{\operatorname{ch} \alpha h} \right) \times \\ \times e^{-\alpha h} J_1(\alpha r_1) J_1(\alpha r_2) d\alpha. \quad (11-49)$$

При  $r_1 = r_2 = r_0$ ,  $z_1 = -z_2 = z_0$  (контуры имеют одинаковые радиусы и расположены симметрично относительно границ экрана)

$$\Delta M = \pi \mu_0 r_0^2 \int_0^{\infty} \left( \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha z_0}{\operatorname{sh} \alpha h} - \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha z_0}{\operatorname{ch} \alpha h} \right) e^{-\alpha h} J_1^2(\alpha r_0) d\alpha. \quad (11-50)$$

При  $z_1 = z_2 = z_0$  (контуры лежат в одной плоскости  $z = z_0$ )

$$\Delta M = \pi \mu_0 r_1 r_2 \int_0^\infty \left( \frac{\text{ch}^2 \alpha z_0}{\text{sh} \alpha h} + \frac{\text{sh}^2 \alpha z_0}{\text{ch} \alpha h} \right) e^{-\alpha h} J_1(\alpha r_1) J_1(\alpha r_2) d\alpha; \quad (11-51)$$

в частности, при  $z_0 = 0$

$$\Delta M = \pi \mu_0 r_1 r_2 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha h}}{\text{sh} \alpha h} J_1(\alpha r_1) J_1(\alpha r_2) d\alpha. \quad (11-52)$$

9. Соленоид радиуса  $R_0$ , длиной  $2l$ , расположенный симметрично относительно границ экрана (рис. 11-16).

Вносимая собственная индуктивность соленоидов

$$\Delta L = \pi \mu_0 \omega^2 R^2 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha h}}{\text{sh} \alpha h} \frac{\text{sh}^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} J_1^2(\alpha R_0) d\alpha, \quad (11-53)$$

где  $\omega$  — число витков соленоидов.

Величину  $\Delta L$  можно также определить по формуле

$$\Delta L = \pi \mu_0 \omega^2 R_0 F, \quad (11-54)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-17 в зависимости от  $\chi = h/R_0$  при различных значениях  $\lambda = a/(2R_0)$ , где  $a = 2l$  — длина соленоидов.

10. Два соленоидов одинаковой длины  $2l$ , симметрично расположенные относительно границ экрана (рис. 11-18).

Для расположения по рис. 11-18, а (концентрические соленоиды с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ ) вносимая взаимная индуктивность

$$\Delta M = \pi \mu_0 \omega W R_1 R_2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \frac{e^{-\alpha h}}{\text{sh} \alpha h} \times \\ \times J_1(\alpha R_1) J_1(\alpha R_2) d\alpha, \quad (11-55)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков соленоидов.

Для расположения по рис. 11-18, б (коаксиальные соленоиды одинакового радиуса  $R_0$  с расстоянием между центрами  $2z_0$ )

$$\Delta M = \pi \mu_0 \omega W R_0^2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \left( \frac{\text{ch}^2 \alpha z_0}{\text{sh} \alpha h} - \frac{\text{sh}^2 \alpha z_0}{\text{ch} \alpha h} \right) e^{-\alpha h} J_1^2(\alpha R_0) d\alpha. \quad (11-56)$$

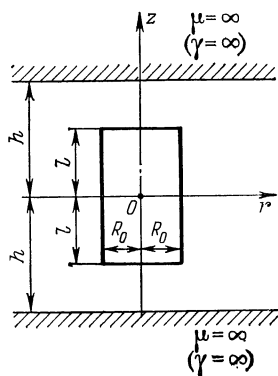


Рис. 11-16



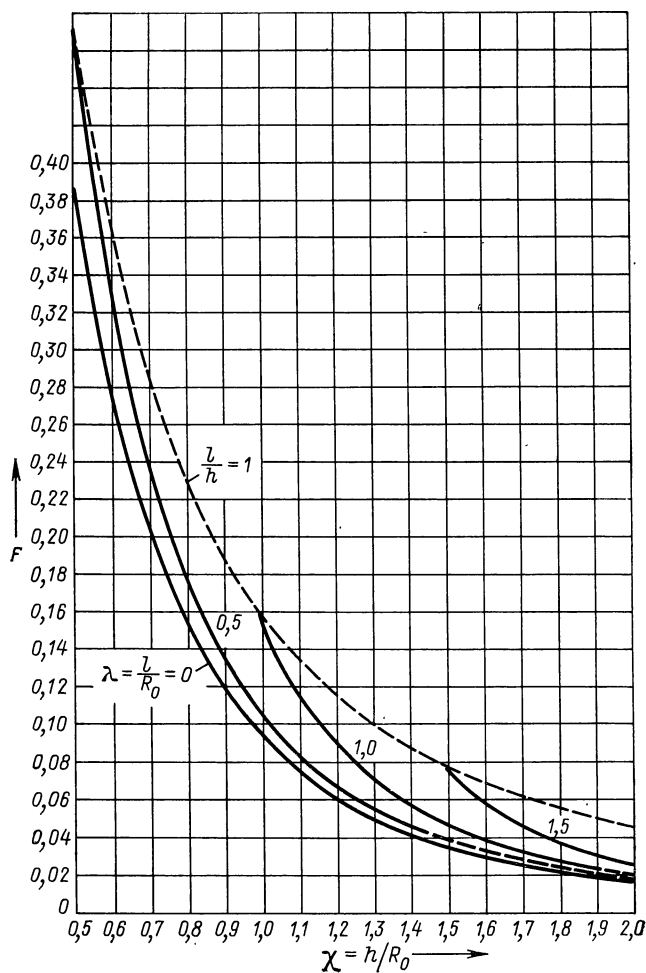


Рис. 11-17

11. Плоская катушка с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , симметрично расположенная относительно границ экрана (рис. 11-19). Вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = \frac{\pi \mu_0 \omega^2}{(R_2 - R_1)^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha h}}{\text{sh } \alpha h} \frac{(U_2 - U_1)^2}{\alpha^4} d\alpha, \quad (11-57)$$

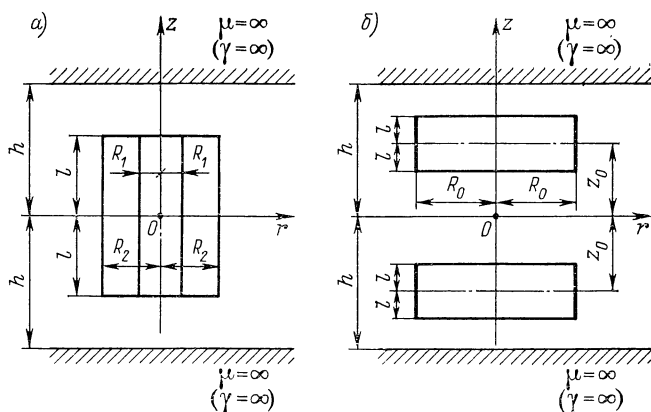


Рис. 11-18

где  $\omega$  — число витков катушки;  $U_1$  и  $U_2$  — значения функции  $U(x)$ , данной в приложении 10, при  $x = \alpha R_1$  и  $x = \alpha R_2$ .

Величину  $\Delta L$  можно также определить по формуле (11-54)

$$\Delta L = \pi \mu_0 \omega^2 R_0 F,$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-20 в зависимости от  $\chi = h/R_0$  при различных значениях  $r/(2R_0)$  ( $R_0 = (R_1 + R_2)/2$  — средний радиус катушки;  $r = R_2 - R_1$  — ее толщина).

12. Катушка прямоугольного сечения длиной  $2l$ , с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , расположенная симметрично относительно границ экрана (рис. 11-21).

Вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = \frac{\pi \mu_0 \omega^3}{(R_2 - R_1)^2} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \frac{e^{-\alpha h}}{\text{sh} \alpha h} \frac{(U_2 - U_1)^2}{\alpha^3} d\alpha,$$

$$(11-58)$$

где  $\omega$ ,  $U_1$  и  $U_2$  — то же, что в формуле (11-57).

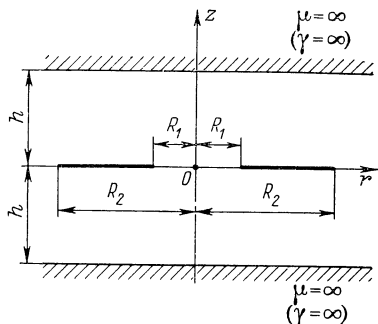


Рис. 11-19

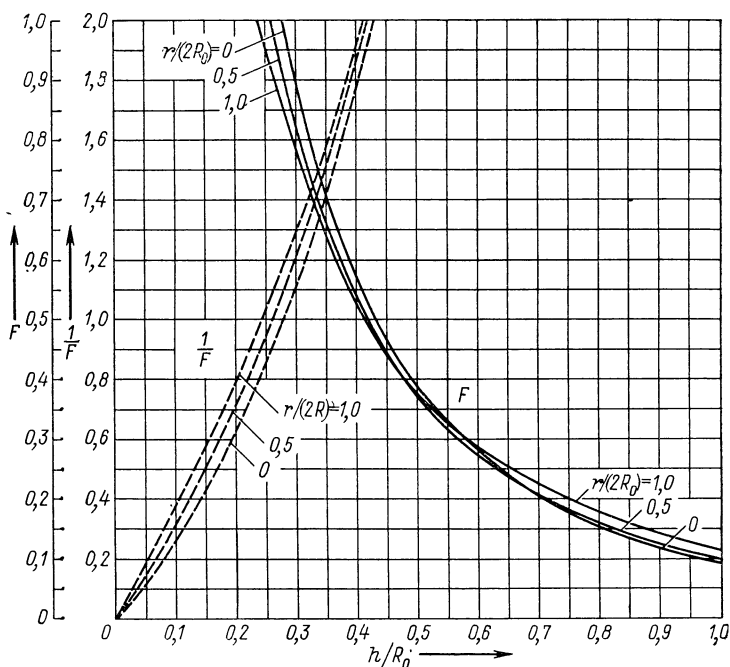


Рис. 11-20

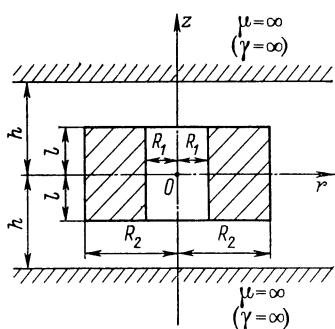


Рис. 11-21

### 11-5. ДВУХСТОРОННИЙ ПЛОСКИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ЭКРАН

1. Двухпроводная линия, параллельная границам экрана (рис. 11-8).

Для расположения по рис. 11-8, а вносимая собственная индуктивность линии

$$\Delta L = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{\pi^2 x^2}{2h^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi z}{h}}{\left( \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - 1 \right) \left( 1 + \cos \frac{\pi z}{h} \right)} \right]; \quad (11-59)$$

в частности, для линий, симметричной относительно границ экрана (рис. 11-8, б),  $z = 0$  и

$$\Delta L = -\frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{\pi x}{h} \operatorname{cth} \frac{\pi x}{2h} \right). \quad (11-60)$$

Для расположения по рис. 11-8, в

$$\Delta L = +\frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{h}{\pi z} \sin \frac{\pi z}{h} \right). \quad (11-61)$$

2. Две двухпроводные линии, параллельные друг другу и границам экрана (рис. 11-9).

Для расположения по рис. 11-9, а вносимая взаимная индуктивность линий

$$\Delta M = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{x^2 + z^2}{2z^2} \frac{\left( \operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + 1 \right) \left( 1 - \cos \frac{\pi z}{h} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi z}{h}} \right]. \quad (11-62)$$

Для расположения по рис. 11-9, б

$$\begin{aligned} \Delta M = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln & \left[ \left( \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \right)^2 \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h} (x_1 - x_2) - 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h} (x_1 + x_2) - 1} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h} (x_1 + x_2) + \cos \frac{\pi z}{2h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h} (x_1 - x_2) + \cos \frac{\pi z}{2h}} \right]; \end{aligned} \quad (11-63)$$

в частности, при  $z = 0$  (обе линии симметричны относительно границ экрана)

$$\Delta M = -\frac{\mu_0}{\pi} \ln \left[ \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{4h} (x_1 + x_2) \operatorname{th} \frac{\pi}{4h} (x_1 - x_2) \right]. \quad (11-64)$$

Для расположения по рис. 11-9, в

$$\Delta M = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{x^2 + z^2}{x^2} \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{h}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{h} - \cos^2 \frac{\pi z}{h}} \right). \quad (11-65)$$

Для расположения по рис. 11-9, г

$$\Delta M = -\frac{\mu_0}{\pi} \ln \left[ \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2h} (z_1 - z_2)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2h} (z_1 + z_2)} \right]. \quad (11-66)$$

3. Трехфазная линия, расположенная симметрично относительно границ экрана (рис. 11-10).

Средняя вносимая индуктивность трех фаз

$$\Delta L = -\frac{\mu_0}{3\pi} \left[ \ln \left( \frac{\pi d}{4h} \operatorname{cth} \frac{\pi d}{4h} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\pi d}{2h} \operatorname{cth} \frac{\pi d}{2h} \right) \right]. \quad (11-67)$$

4. Магнитный диполь (плоский контур произвольной формы, линейные размеры которого значительно меньше расстояния  $2h$  между границами экрана).

Для расположения по рис. 11-11, *a* (диполь расположен на одинаковом расстоянии от границ экрана, его ось перпендикулярна этим границам) вносимая собственная индуктивность

$$\Delta L = -\frac{3}{32} \frac{\mu_0 s^2}{\pi h^3} \zeta(3), \quad (11-68)$$

где  $s$  — площадь контура;  $\zeta(3) = 1,202$  — дзета-функция Римана.

Для расположения по рис. 11-11, *б* (ось диполя параллельна границам экрана)

$$\Delta L = -\frac{\mu_0 s^2}{16\pi h^3} \zeta(3), \quad (11-69)$$

где  $s$  и  $\zeta(3)$  — то же, что в предыдущем случае.

5. Прямоугольный контур со сторонами  $a$  и  $b$ , лежащий в плоскости симметрии, параллельной границам экрана (рис. 11-12, *a*).

При  $a \gg b$  вносимая собственная индуктивность контура может быть определена по формуле (11-60) для вносимой индуктивности соответствующей двухпроводной линии (рис. 11-8, *б*).

При  $b \leq a < h$  величину  $\Delta L$  можно определить по формуле

$$\Delta L = -\frac{3}{32} \frac{\mu_0 s^2}{\pi h^3} \left[ \zeta(3) - \frac{5}{32} \frac{a^2 + b^2}{h^2} \zeta(5) \right], \quad (11-70)$$

где  $s = ab$  — площадь контура;  $\zeta(3) = 1,202$  и  $\zeta(5) = 1,037$  — дзета-функции Римана от указанных аргументов.

При произвольном соотношении между размерами  $a$ ,  $b$ ,  $h$

$$\Delta L = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k M_k, \quad (11-71)$$

где  $M_k > 0$  — взаимная индуктивность двух одинаковых прямоугольников с параллельными сторонами (рис. 4-6, а), расположенных на расстоянии  $x$  друг от друга; величины  $M_k$  определяются по формуле (4-39) при  $x = 2kh$ .

Величина  $\Delta L$  может быть также определена по формуле

$$\Delta L = - \frac{2\mu_0 a}{\pi} F, \quad (11-72)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-22 в зависимости от величины  $\chi = h/a$  при различных значениях  $\beta = b/a$ .

6. Прямоугольный контур со сторонами  $a$  и  $b$ , соответственно параллельными и перпендикулярными границам экрана (рис. 11-12, б).

При  $a \gg b$  вносимая собственная индуктивность контура может быть определена по формуле (11-61) для вносимой индуктивности соответствующей двухпроводной линии (рис. 11-8, в).

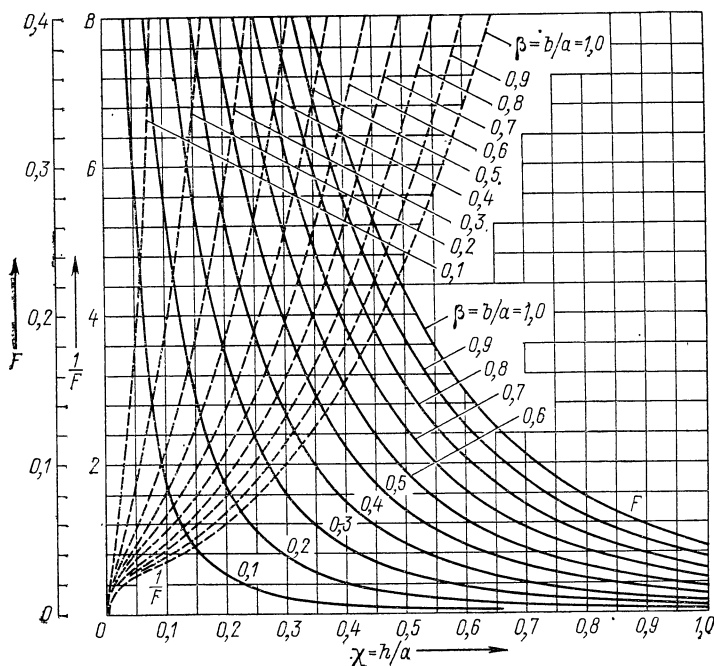


Рис. 11-22

При  $a < h$ ,  $b < h$  величину  $\Delta L$  можно определить по формуле

$$\Delta L = -\frac{\mu_0 s^2}{16\pi h^3} \left[ \zeta(3) + \frac{4a^2 - b^2}{16h^2} \zeta(5) \right], \quad (11-73)$$

где  $s = ab$ ;  $\zeta(3)$  и  $\zeta(5)$  — то же, что в формуле (11-70).

При произвольном соотношении между размерами  $a$ ,  $b$ ,  $h$

$$\Delta L = 2 \sum_{k=1}^{\infty} M_k, \quad (11-74)$$

где  $M_k < 0$  — взаимная индуктивность рассматриваемого контура и другого такого же контура, стороны  $b$  которого лежат на продолжении сторон  $b$  данного, а центр удален от центра данного контура на расстояние, равное  $2kh$ ; величины  $M_k$  могут быть найдены так, как указано в § 4-11. В частности, для тех членов этой суммы, для которых выполняются сформулированные в § 4-11 условия, может быть использована формула (4-37).

7. Круговой контур радиуса  $r_0$ , ось которого перпендикулярна границам экрана (рис. 11-14, а). Вносимая собственная индуктивность контура

$$\Delta L = -\pi\mu_0 r_0^2 \int_0^{\infty} \left( \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha z_0}{\operatorname{ch} \alpha h} + \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha z_0}{\operatorname{sh} \alpha h} \right) e^{-\alpha h} J_1^2(\alpha r_0) d\alpha; \quad (11-75)$$

в частности, при  $z_0 = 0$  (контур расположен симметрично относительно границ экрана)

$$\Delta L = -\pi\mu_0 r_0^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha h}}{\operatorname{ch} \alpha h} J_1^2(\alpha r_0) d\alpha,$$

В последнем случае величину  $\Delta L$  можно найти также по формуле

$$\Delta L = -\pi\mu_0 r_0 F, \quad (11-76)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-23 в зависимости от величины  $\chi = h/r_0$ .

При больших значениях  $\chi$  ( $\chi > 2$ ) можно пользоваться формулой

$$\Delta L = -\frac{3\pi}{32} \mu_0 \frac{r_0}{\chi^3} \left[ \zeta(3) - \frac{15}{16} \frac{\zeta(5)}{\chi^2} + \frac{1575}{2048} \frac{\zeta(7)}{\chi^4} \right], \quad (11-77)$$

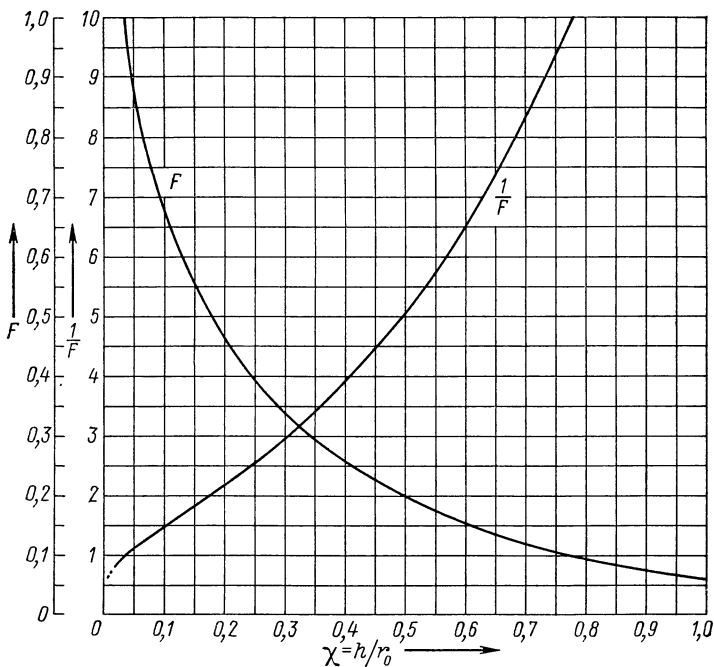


Рис. 11-23

где  $\zeta(3) = 1,202$ ;  $\zeta(5) = 1,037$ ;  $\zeta(7) = 1,017$  — дзета-функции Римана от указанных аргументов.

8. Два круговых контура с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , общая ось которых перпендикулярна границам экрана (рис. 11-14, б).

Вносимая взаимная индуктивность контуров

$$\Delta M = -\pi\mu_0 r_1 r_2 \int_0^\infty \left( \frac{\operatorname{ch} \alpha z_1 \operatorname{ch} \alpha z_2}{\operatorname{ch} \alpha h} + \frac{s' \alpha z_1 \operatorname{sh} \alpha z_2}{\operatorname{sh} \alpha h} \right) \times \\ \times e^{-\alpha h} J_1(\alpha r_1) J_1(\alpha r_2) d\alpha. \quad (11-78)$$

При  $r_1 = r_2 = r$ ;  $z_1 = -z_2 = z_0$  (контуры имеют одинаковые радиусы и расположены симметрично относительно границ экрана)

$$\Delta M = -\pi\mu_0 r_0^2 \int_0^8 \left( \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha z_0}{\operatorname{ch} \alpha h} - \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha z_0}{\operatorname{sh} \alpha h} \right) e^{-\alpha h} J_1^2(\alpha r_0) d\alpha. \quad (11-79)$$



При  $z_1 = z_2 = z_0$  (контурь лежат в одной плоскости  $z = z_0$ )

$$\Delta M = -\pi\mu_0 r_1 r_2 \int_0^\infty \left( \frac{\text{ch}^2 \alpha z_0}{\text{ch } \alpha h} + \frac{\text{sh}^2 \alpha z_0}{\text{sh } \alpha h} \right) e^{-\alpha h} J_1(\alpha r_1) J_1(\alpha r_2) d\alpha; \quad (11-80)$$

в частности, при  $z_0 = 0$

$$\Delta M = -\pi\mu_0 r_1 r_2 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha h}}{\text{ch } \alpha h} J_1(\alpha r_1) J_1(\alpha r_2) d\alpha. \quad (11-81)$$

9. Соленоид радиуса  $R_0$ , длиной  $2l$ , расположенный симметрично относительно границ экрана (рис. 11-16).

Вносимая собственная индуктивность соленоида

$$\Delta L = -\pi\mu_0 \omega^2 R_0^2 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha h}}{\text{ch } \alpha h} \frac{\text{sh}^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} J_1^2(\alpha R_0) d\alpha, \quad (11-82)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида.

Величину  $\Delta L$  можно также определить по формуле

$$\Delta L = -\pi\mu_0 \omega^2 R_0 F, \quad (11-83)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-24 в зависимости от  $\chi = h/R_0$  при различных значениях  $\lambda = a/(2R_0)$ , где  $a = 2l$  — длина соленоида.

10. Два соленоида одинаковой длины  $2l$ , симметрично расположенные относительно границ экрана (рис. 11-18).

Для расположения по рис. 11-18, а (концентрические соленоиды с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ ) вносимая взаимная индуктивность

$$\Delta M = -\pi\mu_0 \omega W R_1 R_2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \frac{e^{-\alpha h}}{\text{ch } \alpha h} J_1(\alpha R_1) J_1(\alpha R_2) d\alpha, \quad (11-84)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков соленоидов.

Для расположения по рис. 11-18, б (коаксиальные соленоиды одинакового радиуса  $R$  с расстоянием между центрами  $2z_0$ )

$$\Delta M = -\pi\mu_0 \omega W \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \left( \frac{\text{ch}^2 \alpha z_0}{\text{ch } \alpha h} - \frac{\text{sh}^2 \alpha z_0}{\text{sh } \alpha h} \right) e^{-\alpha h} J_1^2(\alpha R) d\alpha. \quad (11-85)$$

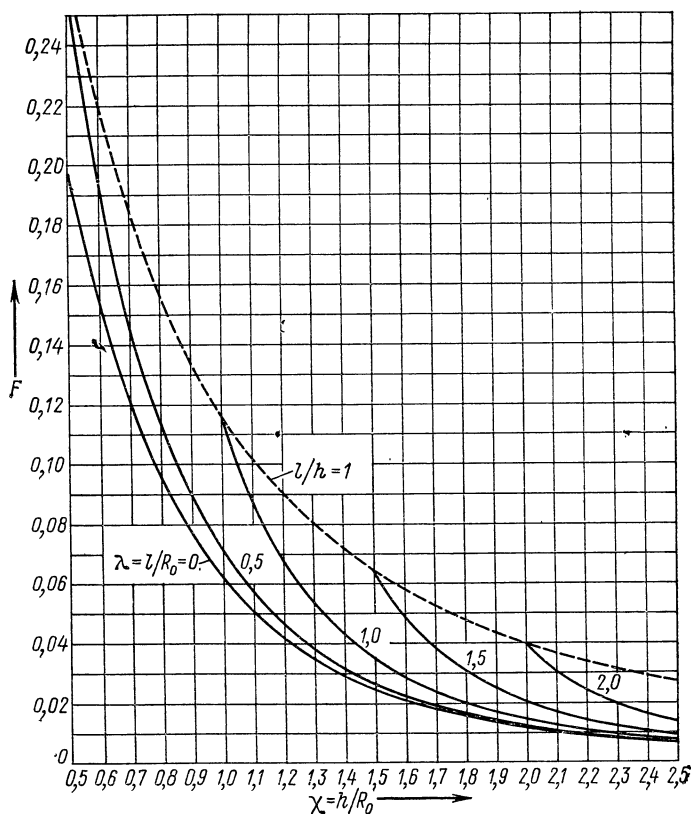


Рис. 11-24

11. Плоская катушка с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , симметрично расположенная относительно границ экрана (рис. 11-19). Вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = -\frac{\pi\mu_0\omega^2}{(R_2 - R_1)^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha h}}{\operatorname{ch} \alpha h} \frac{(U_2 - U_1)^2}{\alpha^4} d\alpha, \quad (11-86)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $U_1$  и  $U_2$  — значения функции  $U(x)$ , данной в приложении 10, при  $x = \alpha R_1$  и  $x = \alpha R_2$ .

Величину  $\Delta L$  можно также определить по формуле (11-83)

$$\Delta L = -\pi\mu_0\omega^2 R_0 F,$$

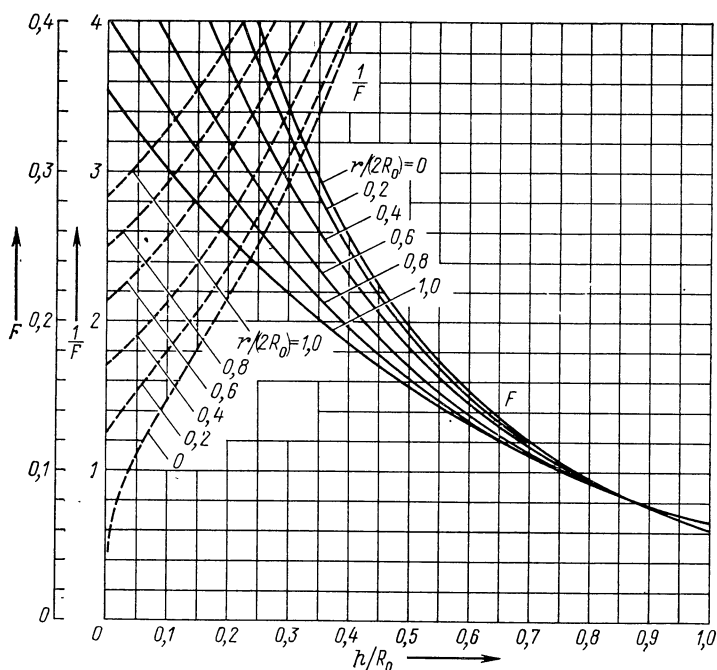


Рис. 11-25

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-25 в зависимости от  $\chi = h/R_0$  при различных значениях  $r/(2R_0)$  ( $R_0 = (R_1 + R_2)/2$  — средний радиус катушки;  $r = R_2 - R_1$  — ее толщина).

12. Катушка прямоугольного сечения длиной  $2l$ , с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , расположенная симметрично относительно границ экрана (рис. 11-21).

Вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = - \frac{\pi \mu_0 \omega^2}{(R_2 - R_1)^2} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \frac{e^{-\alpha h}}{\text{ch} \alpha h} \frac{(U_2 - U_1)^2}{\alpha^4} d\alpha, \quad (11-87)$$

где  $\omega$ ,  $U_1$  и  $U_2$  — то же, что в формуле (11-86).

**Пример 11-2.** Квадратный контур из провода диаметром  $2r = 4$  мм расположен в плоскости симметрии двухстороннего электромагнитного экрана на расстоянии  $h = 20$  см от его границ (рис. 11-12, а). Сторона квадрата  $a = h$ . Определить вносимую собственную индуктивность контура.

**Р е ш е н и е.**

1. Применяем формулу (11-72). В данном случае  $\chi = h/a = 1$ ,  $\beta = b/a = 1$ , и по соответствующей кривой рис. 11-21 находим  $F = 0,044$ . Таким образом,

$$\Delta L = -8 \cdot 10^{-7} \cdot 0,2 \cdot 4,4 \cdot 10^{-2} = -7,1 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

2. Применяем формулу (11-70). При  $a = b = h$ ,  $s = a^2$  эта формула дает

$$\Delta L = -\frac{3}{32\pi} \mu_0 a \left( 1,202 - \frac{5}{16} \cdot 1,037 \right) = -6,58 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

3. Применяем формулу (11-71), находя  $M_1$  по формуле (4-39), а следующие члены ряда — по формуле

$$M_k = \frac{\mu_0 s^2}{16\pi k^3 h^3} \left( 1 - \frac{a^2 + b^2}{8k^2 h^2} \right), \quad (*)$$

получаемой из (4-39) разложением в ряд Тейлора [по степеням  $a/(2h)$  и  $b/(2h)$ ].

При  $a = b$  и  $x = 2h = 2a$  имеем  $d = a\sqrt{5}$ ;  $D = a\sqrt{6}$ , и формула (4-39) дает  $M_1 = 0,0501 \frac{\mu_0}{\pi} a$ , а по формуле (\*) получаем  $M_2 = \frac{\mu_0 a}{\pi} \cdot 0,0073$ ;

$M_3 = \frac{\mu_0 a}{\pi} \cdot 0,0023$ ;  $M_4 = \frac{\mu_0 a}{\pi} \cdot 0,0010$ ;  $M_5 = \frac{\mu_0 a}{\pi} \cdot 0,0005$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta L &= -2 \frac{\mu_0 a}{\pi} (0,0501 - 0,0073 + 0,0023 - 0,0010 + 0,0005) = \\ &= -\frac{\mu_0 a}{\pi} \cdot 0,0892 = -71,4 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.} \end{aligned}$$

Различие при расчете по формулам (11-70) и (11-71) составляет около 7,7 % — за счет погрешности, даваемой формулой (11-70) при  $a$  и  $b$ , недостаточных малых по сравнению с  $h$ . Формулы (11-71) и (11-72) дают близкие друг к другу значения  $\Delta L$ .

Собственная индуктивность  $L_0$  рассматриваемого контура, определенная по формуле (4-26), равна  $L_0 = \frac{\mu_0 a}{\pi} \cdot 8,16 = 6,53 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$ , так что

$$\frac{|\Delta L|}{L_0} = 0,0109 \approx 1,1 \text{ \%}.$$

**Пример 11-3.** Соленоид длиной  $a = 20$  см и радиусом  $R_0 = 10$  см симметрично расположен внутри двухстороннего электромагнитного экрана (рис. 11-16), расстояние между границами которого  $2h = 30$  см. Число витков соленоидом  $w = 100$ . Определить вносимую собственную индуктивность соленоидом.

**Р е ш е н и е.** В данном случае  $\chi = h/R_0 = 1,5$ ;  $\lambda = a/(2R) = 1$  и по кривой рис. 11-24 находим  $F = 0,036$ , так что

$$\Delta L = -\pi \mu_0 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 0,036 = -1,42 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Индуктивность соленоидом при отсутствии экрана, найденная по формуле (6-1), равна  $L_0 = 1,358 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ , а при наличии экрана

$$L = L_0 + \Delta L = (1,358 - 0,142) \cdot 10^{-3} = 1,216 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

# 11-6. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ МАГНИТНЫЙ ЭКРАН БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

1. Двухпроводная линия, расположенная симметрично относительно экрана.

Для линии, расположенной внутри экрана (рис. 11-26, а), вносимая собственная индуктивность

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{\sqrt{R^4 + R_0^4 - 2R^2 R_0^2 \cos \alpha}}{R^2 - R_0^2}. \quad (11-88)$$

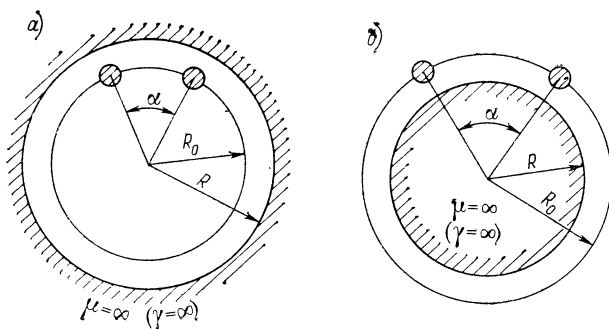


Рис. 11-26

Для линии, расположенной вне экрана (рис. 11-26, б), в формуле (11-88) следует поменять местами  $R$  и  $R_0$ .

2. Две одинаковые двухпроводные линии I и II, симметрично расположенные внутри или вне экрана (рис. 11-27, а, б).

Вносимая взаимная индуктивность линий

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{R^2 + R_0^2}{\sqrt{R^4 + R_0^4 + 2R^2 R_0^2 \cos \alpha}}. \quad (11-89)$$

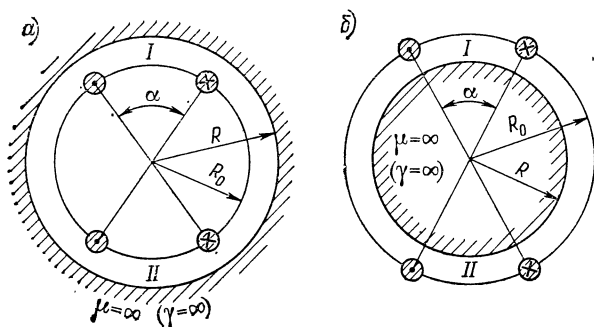


Рис. 11-27

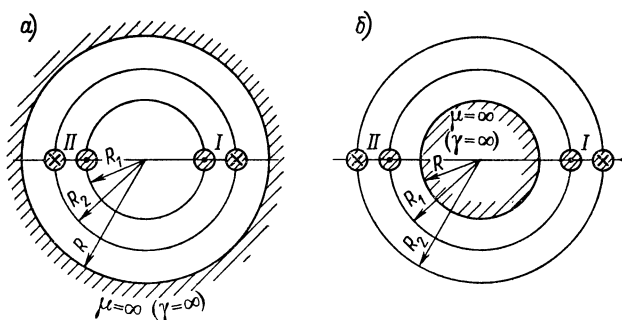


Рис. 11-28

3. Две одинаковые двухпроводные линии *I* и *II*, симметрично расположенные внутри или вне экрана в одной из плоскостей его симметрии (рис. 11-28, *а*, *б*).

Вносимая взаимная индуктивность линий

$$\Delta M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{(R^2 + R_1 R_2)^2}{(R^2 + R_1^2)(R^2 + R_2^2)}. \quad (11-90)$$

4. Симметричная трехфазная линия, симметрично расположенная внутри экрана (рис. 11-29, *а*).

Вносимая собственная индуктивность одной фазы линии

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{R^4 + R_0^4 + R^2 R_0^2}}{R^2 - R_0^2}. \quad (11-91)$$

Для линии, расположенной вне экрана (рис. 11-29, *б*), в формуле (11-91) следует поменять местами *R* и *R*<sub>0</sub>.

5. Круговой контур, расположенный внутри экрана симметрично с ним (рис. 11-30, *а*).

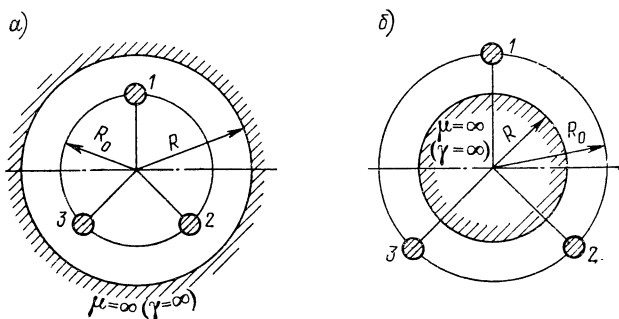


Рис. 11-29

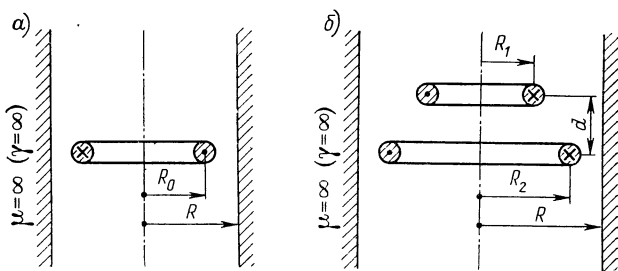


Рис. 11-30

Вносимая собственная индуктивность контура

$$\Delta L = +2\mu_0 R_0^2 \int_0^\infty \vartheta_0(\rho) I_1'(\rho_0) d\alpha, \quad (11-92)$$

где  $\rho = \alpha R$ ;  $\rho_0 = \alpha R_0$ ;  $\vartheta_0(\rho) = K_0(\rho)/I_0(\rho)$ .\*

Величину  $\Delta L$  можно также найти по формуле

$$\Delta L = 2\mu_0 R_0 F, \quad (11-93)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-31 в зависимости от  $R_0/R$  (кривые 1).

6. Два круговых контура, расположенные внутри экрана коаксиально с ним (рис. 11-30, б).

Вносимая взаимная индуктивность контуров

$$\Delta M = 2\mu_0 R_1 R_2 \int_0^\infty \vartheta_0(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) \cos(\alpha d) d\alpha, \quad (11-94)$$

где  $\rho = \alpha R$ ;  $\rho_1 = \alpha R_1$ ;  $\rho_2 = \alpha R_2$ ;  $\vartheta_0(\rho) = K_0(\rho)/I_0(\rho)$ ;  $d$  — расстояние между плоскостями контуров.

При  $R_1 = R_2 = R_0$  (одинаковые контуры)

$$\Delta M = 2\mu_0 R_0^2 \int_0^\infty \vartheta_0(\rho) I_1^2(\rho_0) \cos(\alpha d) d\alpha,$$

где  $\rho_0 = \alpha R_0$ .

7. Соленоид длиной  $a = 2l$ , расположенный внутри экрана коаксиально с ним (рис. 11-32, а).

\* Здесь и далее в этой главе через  $I_0$ ,  $I_1$  и  $K_0$  обозначены модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядка от указанных аргументов.

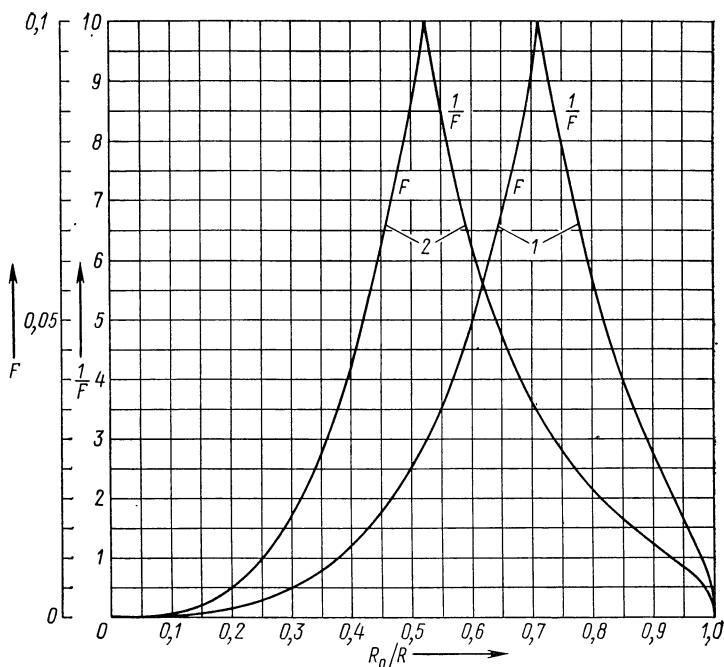


Рис. 11-31

Вносимая собственная индуктивность соленоида

$$\Delta L = 2\mu_0\omega^2 R_0^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \vartheta_0(\rho) I_1^2(\rho_0) d\alpha, \quad (11-95)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида;  $\rho = \alpha R$ ;  $\rho_0 = \alpha R_0$ ;  $\vartheta_0(\rho) = K_0(\rho)/I_0(\rho)$ .

Величину  $\Delta L$  можно также найти по формуле

$$\Delta L = 2\mu_0\omega^2 R_0 F, \quad (11-96)$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-33 в зависимости от  $R_0/R$  при различных значениях  $l/R_0$ .

8. Два соленоида с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и длинами  $2l_1$  и  $2l_2$ , расположенные внутри экрана коаксиально с ним (рис. 11-32, б).



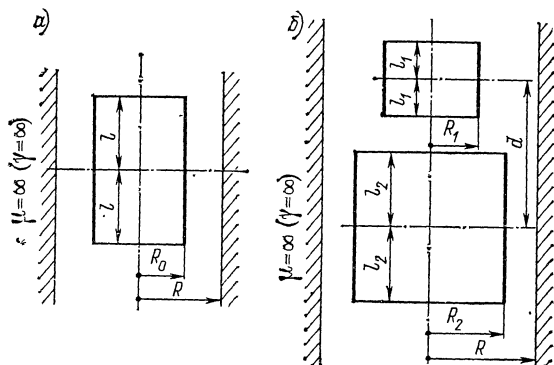


Рис. 11-32

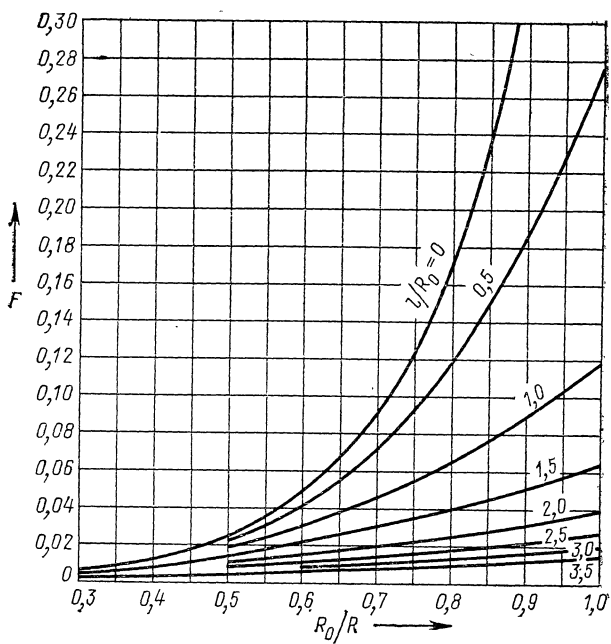


Рис. 11-33

Вносимая взаимная индуктивность соленоидов

$$\Delta M = 2\mu_0 w W R_1 R_2 \int_0^\infty \frac{\sin \alpha l_1 \sin \alpha l_2}{\alpha l_1 \alpha l_2} \times \\ \times \vartheta_0(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) \cos(\alpha d) d\alpha, \quad (11-97)$$

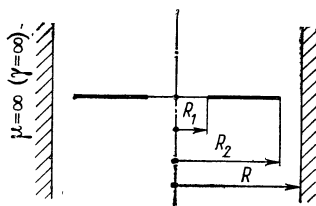


Рис. 11-34

где  $w$  и  $W$  — числа витков соленоидов;  $d$  — расстояние между их центрами;  $\rho = \alpha R$ ;  $\rho_1 = \alpha R_1$ ;  $\rho_2 = \alpha R_2$ ;  $\vartheta_0(\rho) = K_0(\rho)/I_0(\rho)$ .

При  $R_1 = R_2 = R_0$ ;  $l_1 = l_2 = l_0$ ;  $w = W$  (два одинаковых соленоида)

$$\Delta M = 2\mu_0 w^2 R_0^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \vartheta_0(\rho) I_1^2(\rho_0) \cos(\alpha d) d\alpha, \quad (11-98)$$

где  $\rho_0 = \alpha R_0$ .

При  $d = 0$ ;  $l_1 = l_2 = l$  (концентрические соленоиды одинаковой длины)

$$\Delta M = 2\mu_0 w W R_1 R_2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \vartheta_0(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) d\alpha.$$

9. Плоская катушка с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , коаксиальная с экраном (рис. 11-34).

Вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = \frac{2\mu_0 w^2}{(R_2 - R_1)^2} \int_0^\infty \vartheta_0(\rho) \frac{(V_2 - V_1)^2}{\alpha^4} d\alpha, \quad (11-99)$$

где  $w$  — число витков катушки;  $\rho = \alpha R$ ;  $\vartheta_0(\rho) = K_0(\rho)/I_0(\rho)$ ;  $V_1$  и  $V_2$  — значения функции  $V(x)$ , данной в приложении 10, при  $x = \rho_1 = \alpha R_1$  и  $x = \rho_2 = \alpha R_2$  соответственно.

Величину  $\Delta L$  можно также найти по формуле (11-96)

$$\Delta L = 2\mu_0 w^2 R_0 F,$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-35 в зависимости от  $R_0/R$  при различных значениях  $r/(2R_0)$

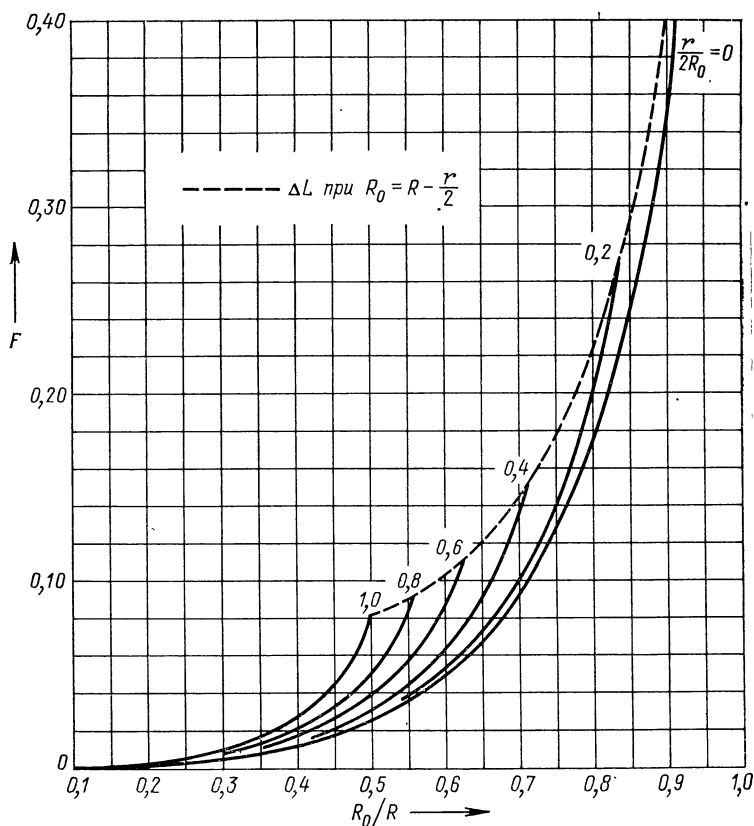


Рис. 11-35

( $R_0 = (R_1 + R_2)/2$  — средний радиус катушки;  $r = R_2 - R_1$  — ее толщина).

10. Катушка прямоугольного сечения с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и длиной  $a = 2l$ , расположенная внутри экрана коаксиально с ним (рис. 11-36).

Вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = 2\mu_0 \frac{\omega^2}{(R_2 - R_1)^2} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \vartheta_0(\rho) \frac{(V_2 - V_1)^2}{\alpha^4} d\alpha, \quad (11-100)$$

где  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $\vartheta_0(\rho)$ ,  $V_1$  и  $V_2$  — то же, что и в формуле (11-99).

11. Собственные и взаимные индуктивности контуров и катушек, охватывающих бесконечно длинный цилиндрический экран, неограниченно возрастают при стремлении магнитной проницаемости экрана к бесконечности. Поэтому рассмотрение таких случаев применительно к идеальному магнитному экрану (§ 11-1, п. 3) лишено смысла.

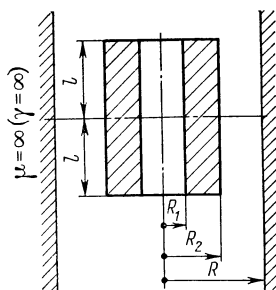


Рис. 11-36

### 11-7. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ЭКРАН БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

1. Вносимые индуктивности двухпроводных и трехфазных линий, расположенных внутри и вне бесконечно длинного цилиндрического экрана так, как показано на рис. 11-26—11-29, могут быть определены по формулам пп. 1—4 предыдущего параграфа, но при этом знак у всех выражений для  $\Delta L$  и  $\Delta M$  должен быть изменен на обратный.

2. Круговой контур, коаксиальный с экраном.

При расположении контура внутри экрана (рис. 11-30, а) вносимая собственная индуктивность контура

$$\Delta L = -2\mu_0 R_0^2 \int_0^\infty \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho_0) d\alpha, \quad (11-101)$$

где  $\rho = \alpha R$ ;  $\rho_0 = \alpha R_0$ ;  $\vartheta_1(\rho) = K_1(\rho)/I_1(\rho)$ .\*

При расположении контура вне экрана (рис. 11-37, а)

$$\Delta L = -2\mu_0 R_0^2 \int_0^\infty \frac{K_1^2(\rho_0)}{\vartheta_1(\rho)} d\alpha, \quad (11-102)$$

где  $\rho$ ,  $\rho_0$  и  $\vartheta_1(\rho)$  — то же, что и в формуле (11-101).

Величину  $\Delta L$  можно также найти по формуле (11-93) с обратным знаком

$$\Delta L = -2\mu_0 R_0 F,$$

где  $F$  — величина, значения которой даны для внутреннего расположения контура на рис. 11-31 в зависимости от  $R_0/R$

\* Здесь и далее в этой главе через  $I_1$  и  $K_1$  обозначены модифицированные функции Бесселя первого и второго рода первого порядка от указанных аргументов.

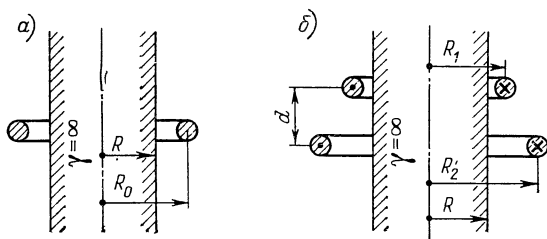


Рис. 11-37

(кривые 2), а для внешнего расположения контура — на рис. 11-38 в зависимости от  $R/R_0$  (кривая  $l/R_0 = 0$ ).

3. Два круговых контура, коаксиальных с экраном.

При расположении контуров внутри экрана (рис. 11-30, б) вносимая взаимная индуктивность контуров

$$\Delta M = -2\mu_0 R_1 R_2 \int_0^\infty \vartheta_1(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) \cos(\alpha d) d\alpha, \quad (11-103)$$

где  $\rho = \alpha R$ ;  $\rho_1 = \alpha R_1$ ;  $\rho_2 = \alpha R_2$ ;  $\vartheta_1(\rho) = K_1(\rho)/I_1(\rho)$ .

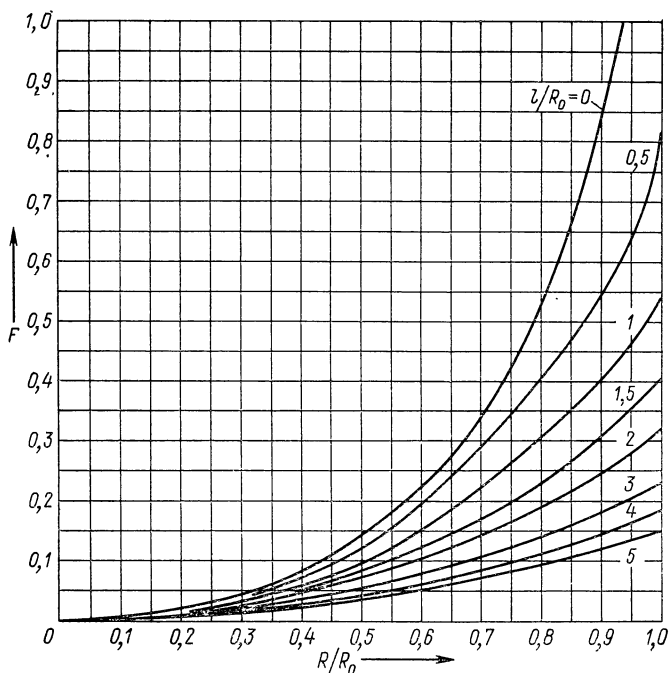


Рис. 11-38

При  $R_1 = R_2 = R_0$  (одинаковые контуры)

$$\Delta M = -2\mu_0 R_0^2 \int_0^\infty \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho_0) \cos(\alpha d) d\alpha, \quad (11-104)$$

где  $\rho_0 = \alpha R_0$ .

При расположении контуров вне экрана (рис. 11-37, б)

$$\Delta M = -2\mu_0 R_1 R_2 \int_0^\infty \frac{K_1(\rho_1) K_1(\rho_2)}{\vartheta_1(\rho)} \cos(\alpha d) d\alpha. \quad (11-105)$$

При  $R_1 = R_2 = R_0$  (одинаковые контуры)

$$\Delta M = -2\mu_0 R_0^2 \int_0^\infty \frac{K_1^2(\rho_0)}{\vartheta_1(\rho)} \cos(\alpha d) d\alpha. \quad (11-106)$$

4. Соленоид длиной  $a = 2l$ , коаксиальный с экраном.

При расположении соленоида внутри экрана (рис. 11-32, а) вносимая собственная индуктивность соленоида

$$\Delta L = -2\mu_0 \omega^2 R_0^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho_0) d\alpha, \quad (11-107)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида;  $\rho = \alpha R$ ;  $\rho_0 = \alpha R_0$ ;  $\vartheta_1(\rho) = K_1(\rho)/I_1(\rho)$ .

При расположении соленоида вне экрана (рис. 11-39, а)

$$\Delta L = -2\mu_0 \omega^2 R_0^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \frac{K_1^2(\rho_0)}{\vartheta_1(\rho)} d\alpha. \quad (11-108)$$

Величину  $\Delta L$  можно также найти по формуле (11-96) с обратным знаком

$$\Delta L = -2\mu_0 \omega^2 R_0 F,$$

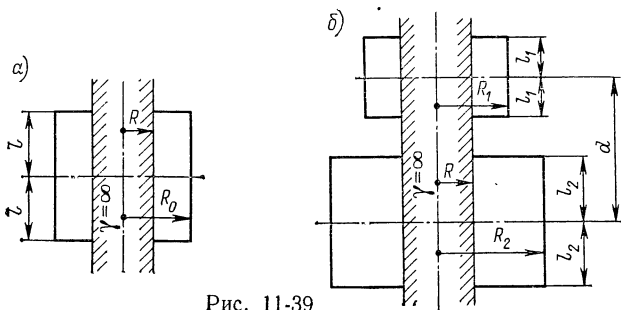


Рис. 11-39

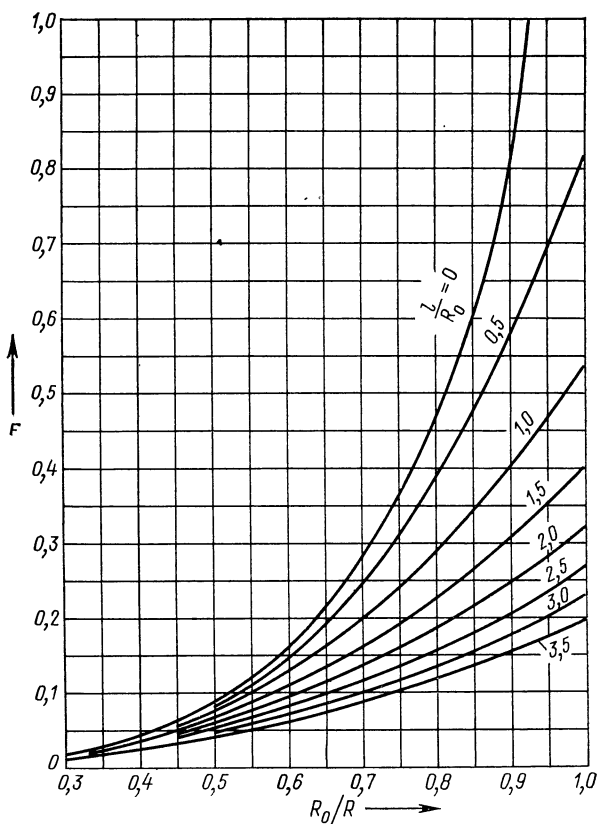


Рис. 11-40

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-40 (для внутреннего расположения соленоида) и на рис. 11-38 (для внешнего расположения соленоида) в зависимости от  $R_0/R$  (в первом случае) и от  $R/R_0$  (во втором случае) при различных значениях  $l/R_0$ .

5. Два соленоида с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и длинами  $2l_1$  и  $2l_2$ , коаксиальные с экраном.

При расположении соленоидов внутри экрана (рис. 11-32, б) вносимая взаимная индуктивность соленоидов

$$\Delta M = -2\mu_0\omega W R_1 R_2 \int_0^\infty \frac{\sin \alpha l_1 \sin \alpha l_2}{\alpha l_1 \alpha l_2} \vartheta_1(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) \cos(\alpha d) d\alpha, \quad (11-109)$$

где  $w$  и  $W$  — числа витков соленоидов;  $d$  — расстояние между их центрами;  $\rho = \alpha R$ ;  $\rho_1 = \alpha R_1$ ;  $\rho_2 = \alpha R_2$ ;  $\vartheta_1(\rho) = K_1(\rho)/I_1(\rho)$ .

При  $R_1 = R_2 = R_0$ ;  $l_1 = l_2 = l$ ;  $w = W$  (два одинаковых соленоида)

$$\Delta M = -2\mu_0 w^2 R_0^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho) \cos \alpha d \alpha. \quad (11-110)$$

При  $d = 0$ ;  $l_1 = l_2 = l$  (концентрические соленоиды одинаковой длины)

$$\Delta M = -2\mu_0 w W R_1 R_2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \vartheta_1(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) d \alpha. \quad (11-111)$$

При расположении соленоидов вне экрана (рис. 11-39, б)

$$\Delta M = -2\mu_0 w W R_1 R_2 \int_0^\infty \frac{\sin \alpha l_1 \sin \alpha l_2}{\alpha l_1 \alpha l_2} \frac{K_1(\rho_1) K_1(\rho_2)}{\vartheta_1(\rho)} \cos(\alpha d) d \alpha. \quad (11-112)$$

При  $R_1 = R_2 = R_0$ ;  $l_1 = l_2 = l$ ;  $w = W$  (два одинаковых соленоида)

$$\Delta M = -2\mu_0 w^2 R_0^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \frac{K_1^2(\rho_0)}{\vartheta_1(\rho)} \cos(\alpha d) d \alpha. \quad (11-113)$$

При  $d = 0$ ;  $l_1 = l_2 = l$  (концентрические соленоиды одинаковой длины)

$$\Delta M = -2\mu_0 w W R_1 R_2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \frac{K_1(\rho_1) K_1(\rho_2)}{\vartheta_1(\rho)} d \alpha. \quad (11-114)$$

6. Плоская катушка с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , коаксиальная с экраном.

При расположении катушки внутри экрана (рис. 11-34) вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = -\frac{2\mu_0 w^2}{(R_2 - R_1)^2} \int_0^\infty \vartheta_1(\rho) \frac{(V_2 - V_1)^2}{\alpha^4} d \alpha, \quad (11-115)$$

где  $w$  — число витков катушки;  $\rho = \alpha R$ ;  $\vartheta_1(\rho) = K_1(\rho)/I_1(\rho)$ ;  $V_1$  и  $V_2$  — значения функции  $V(x)$ , данной в приложении 10, при  $x = \rho_1 = \alpha R_1$  и  $x = \rho_2 = \alpha R_2$  соответственно.



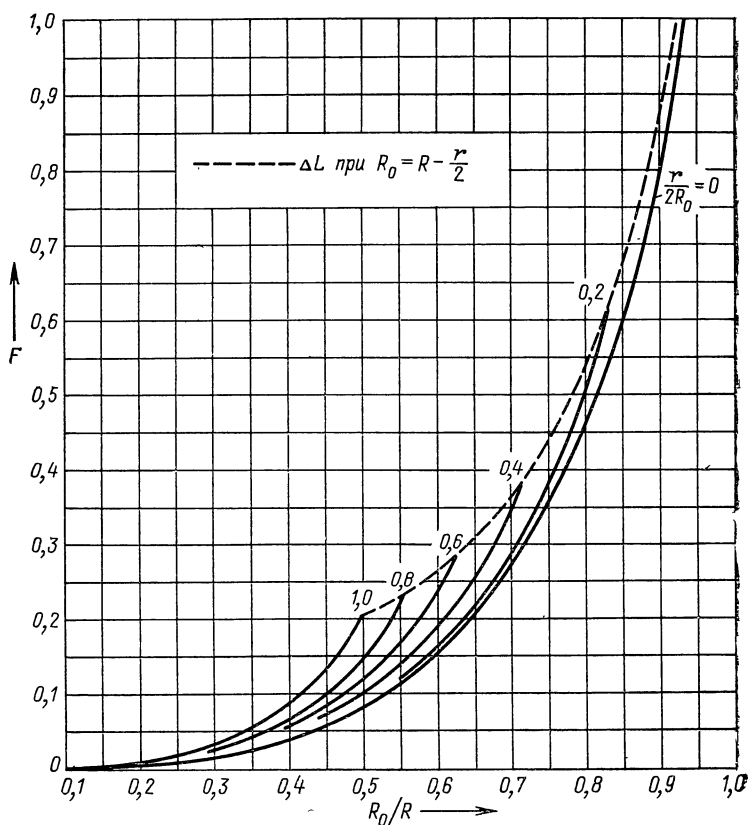


Рис. 11-41

Величину  $\Delta L$  можно в этом случае найти также по формуле (11-96) с обратным знаком

$$\Delta L = -2\mu_0\omega^2 R_0 F,$$

где  $F$  — величина, значения которой даны на рис. 11-41 в зависимости от  $R_0/R$  для различных значений  $r/(2R_0)$  ( $R_0 = (R_1 + R_2)/2$  — средний радиус катушки;  $r = R_2 - R_1$  — ее толщина).

При расположении катушки вне экрана (рис. 11-42)

$$\Delta L = -\frac{2\mu_0\omega^2}{(R_2 - R_1)^2} \int_0^\infty \frac{(W_2 - W_1)^2}{\vartheta_1(\rho)} \frac{d\alpha}{\alpha^4}, \quad (11-116)$$

где  $\rho$  и  $\vartheta_1(\rho)$  — то же, что и в формуле (11-115), а  $W_1$  и  $W_2$  — значения функции  $W(x)$ , данной в приложении 10, при  $x = \rho_1 = \alpha R_1$  и  $x = \rho_2 = \alpha R_2$  соответственно.

7. Катушка прямоугольного сечения с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и длиной  $a = 2l$ , коаксиальная с экраном.

При расположении катушки внутри экрана (рис. 11-36) вносимая собственная индуктивность катушки

$$\Delta L = -2\mu_0 \frac{\omega^2}{(R_2 - R_1)^2} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \vartheta_1(\rho) \frac{(V_2 - V_1)^2}{\alpha^4} d\alpha, \quad (11-117)$$

где  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $\vartheta_1(\rho)$ ,  $V_1$  и  $V_2$  — то же, что и в формуле (11-115).

При расположении катушки вне экрана (рис. 11-43)

$$\Delta L = -\frac{2\mu_0 \omega^2}{(R_2 - R_1)^2} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha l}{(\alpha l)^2} \frac{(W_2 - W_1)^2}{\vartheta_1(\rho)} \frac{d\alpha}{\alpha^4}, \quad (11-118)$$

где все обозначения — те же, что и в формуле (11-116).

**Пример 11-4.** Две одинаковые двухпроводные линии симметрично расположены внутри цилиндрического электромагнитного экрана бесконечной длины параллельно его оси (рис. 11-27, а). Радиус экрана  $R = 5$  см, а радиус окружности, на которой лежат сечения проводов обеих линий,  $R_0 = 4$  см. Центральный угол, соответствующий каждой из линий,  $\alpha = \pi/2$ . Определить вносимую взаимную индуктивность линий на единицу их длины.

**Решение.** Применяя формулу (11-89), имеем

$$\Delta M = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{(R^2 + R_0^2)^2}{R^4 + R_0^4} = -\frac{\mu_0}{2\pi} 0,646 = -1,292 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Взаимную индуктивность линий без экрана определяем по формуле (3-115), положив в ней  $d = h$ :

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln . = 1,386 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

В данном случае наличие экрана ввиду близости к нему обеих линий привело к весьма значительному изменению взаимной индуктивности линий.

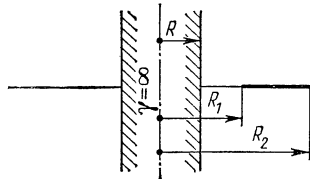


Рис. 11-42

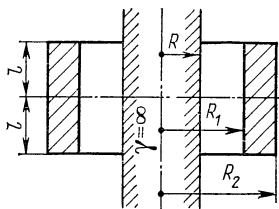


Рис. 11-43

**Пример 11-5.** Два круговых контура с радиусами  $R_1 = 8$  см и  $R_2 = 2$  см расположены внутри бесконечно длинного электромагнитного экрана радиуса  $R = 10$  см; контуры лежат в одной плоскости, а их общая ось совпадает с осью экрана. Определить вносимые собственные индуктивности  $\Delta L_1$  и  $\Delta L_2$  и вносимую взаимную индуктивность  $\Delta M$  контуров.

Решение. Вносимую собственную индуктивность первого контура  $\Delta L_1$  определяем по формуле (11-101), которую представим в виде

$$\Delta L_1 = -2\mu_0 \frac{R_1^2}{R} \int_0^{\infty} \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho_1) d\rho.$$

Пользуясь таблицами функций  $I_1$  и  $K_1$ , определяем подынтегральную функцию  $f$  при равноотстоящих значениях переменной  $\rho$ . Результаты расчета сводим в таблицку:

$\rho$	$f$	$\rho$	$f$	$\rho$	$f$
0	0,3200	0,8	0,2255	6	0,0083
0,1	3162	0,9	2122	7	0052
2	3061	1	1996	8	0031
3	2944	2	1033	9	0018
4	2813	3	0536	10	0011
5	2674	4	0287	11	0,0006
6	2531	5	0,0158		
0,7	0,2394				

Применяя к каждой половине этой таблички параболическую формулу (приложение 3), найдем искомый интеграл в виде суммы  $0,2683 + 0,3081 = 0,5764$ , откуда

$$\Delta L_1 = -2\mu_0 \frac{R_1^2}{R} \cdot 0,576 = -0,927 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Аналогично найдем

$$\Delta L_2 = -2\mu_0 \frac{R_2^2}{R} \cdot 0,025 = -0,251 \cdot 10^{-9} \text{ Гн;}$$

$$\Delta M = -2\mu_0 \frac{R_1 R_2}{R} \cdot 0,15 = -4,62 \cdot 10^{-9} \text{ Гн.}$$

Для сравнения определим еще взаимную индуктивность контуров  $M_0$  при отсутствии экрана, для чего воспользуемся формулой (5-22). В данном случае  $\delta = 1/4$ , и формула дает

$$M_0 = \frac{\pi}{4} \mu_0 \cdot 10^{-2} \cdot 1,024 = 10,1 \cdot 10^{-9} \text{ Гн,}$$

и, следовательно,  $\Delta M/M_0 = -0,457$ . Таким образом, влияние экрана на взаимную индуктивность контуров в рассмотренном примере весьма значительно.

## 11-8. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ МАГНИТНЫЙ ЭКРАН КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Вносимые собственные и взаимные индуктивности контуров и катушек, расположенных внутри цилиндрического магнитного экрана конечной длины  $2h$  и конечного радиуса  $R$ , могут быть представлены в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta L = \Delta_1 L + \Delta_2 L; \quad \Delta M = \Delta_1 M + \Delta_2 M, \quad (11-119; 11-120)$$

из которых первое ( $\Delta_1 L$ ,  $\Delta_1 M$ ) есть вносимая индуктивность рассматриваемых контуров или катушек при бесконечно большом радиусе экрана, а второе ( $\Delta_2 L$ ,  $\Delta_2 M$ ) можно рас-

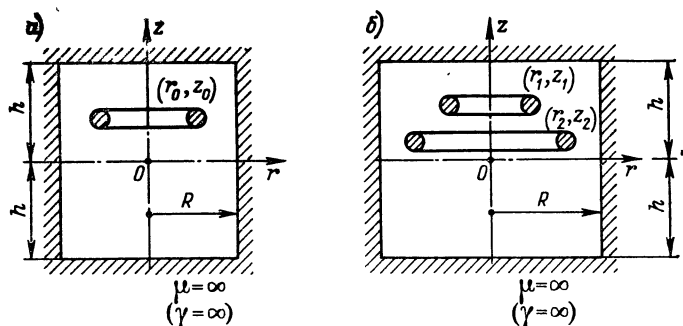


Рис. 11-44

считывать как слагаемое, учитывающее конечность радиуса  $R$ .

Так как при  $R \rightarrow \infty$  цилиндрический экран конечной длины превращается в двухсторонний плоский, то величины  $\Delta_1 L$  и  $\Delta_1 M$  могут быть определены по соответствующим формулам и кривым, данным в § 11-4. Формулы для определения  $\Delta_2 L$  и  $\Delta_2 M$  даны ниже.

1. Для кругового контура, коаксиального с экраном (рис. 11-44, а),

$$\Delta_2 L = \frac{2\pi\mu_0 r_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_0(\rho) I_1^2(\rho_0) (c_1 \cos^2 v z_0 + c_2 \sin^2 v z_0), \quad (11-121)$$

где  $\vartheta_0(\rho) = K_0(\rho)/I_0(\rho)$ ;  $\rho = vR$ ;  $\rho_0 = vr_0$ ;  $v = p\pi/(2h)$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ), причем  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  при  $p$  — четном и  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$  при  $p$  — нечетном; в частности, при  $z_0 = 0$  (контур лежит в плоскости симметрии экрана)

$$\Delta_2 L = \frac{2\pi\mu_0 r_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} c_1 \vartheta_0(\rho) I_1^2(\rho_0). \quad (11-122)$$

2. Для двух круговых контуров, коаксиальных с экраном (рис. 11-44, б),

$$\Delta_2 M = \frac{2\pi\mu_0 r_1 r_2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_0(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) \times \\ \times (c_1 \cos v z_1 \cos v z_2 + c_2 \sin v z_1 \sin v z_2), \quad (11-123)$$

где  $\rho_1 = v r_1$ ;  $\rho_2 = v r_2$ , а прочие обозначения — те же, что в формуле (11-121).

При  $r_1 = r_2 = r_0$ ;  $z_1 = -z_2 = z_0$  (контуров имеют одинаковые радиусы и расположены на одинаковом расстоянии  $z_0$  от плоскости симметрии экрана)

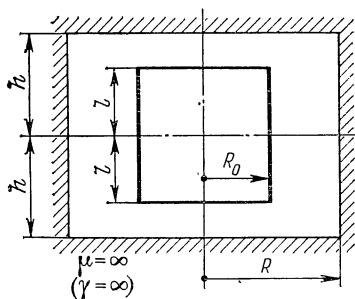


Рис. 11-45

$$\Delta_2 M = \frac{2\pi\mu_0 r_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_0(\rho) I_1^2(\rho_0) \times \\ \times (c_1 \cos^2 v z_0 - c_2 \sin^2 v z_0). \quad (11-124)$$

При  $z_1 = z_2 = z_0$ ;  $r_1 \neq r_2$  (контуров разных радиусов, лежащие в одной плоскости)

$$\Delta_2 M = \frac{2\pi\mu_0 r_1 r_2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_0(\rho) I_1(\rho_1) \times \\ \times I_1(\rho_2) (c_1 \cos^2 v z_0 + c_2 \sin^2 v z_0). \quad (11-125)$$

3. Для соленоида радиуса  $R_0$ , длиной  $2l$ , расположенного симметрично относительно границ экрана (рис. 11-45),

$$\Delta_2 L = \frac{2\pi\mu_0 \omega^2 R_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} c_p \vartheta_0(\rho) I_1^2(\rho_0) \frac{\sin^2 v l}{(v l)^2}, \quad (11-126)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида;  $\vartheta_0(\rho) = K_0(\rho)/I_0(\rho)$ ;  $\rho = v R$ ;  $\rho_0 = v R_0$ ;  $v = p\pi/(2h)$ ;  $c_1 = 1$  при  $p$  — четном и  $c_1 = 0$  при  $p$  — нечетном.

4. Для двух соленоидов одинаковой длины  $2l$ , симметричных относительно границ экрана (рис. 11-46), при расположении по рис. 11-46, а (концентрические соленоиды с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ )

$$\Delta_2 M = \frac{2\pi\mu_0 \omega W R_1 R_2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} c_p \vartheta_0(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) \frac{\sin^2 v l}{(v l)^2}, \quad (11-127)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков соленоидов;  $\rho_1 = v R_1$ ;  $\rho_2 = v R_2$ , а прочие обозначения — те же, что в формуле (11-126).

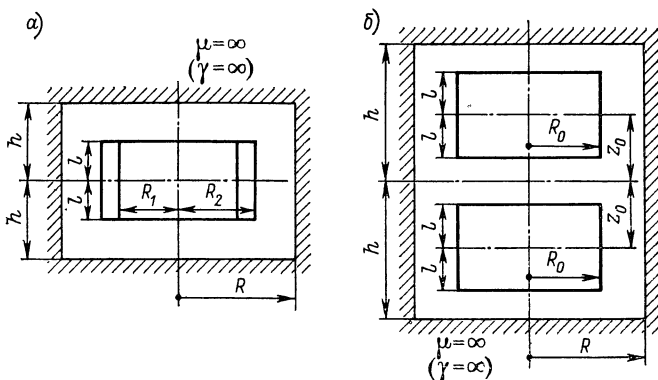


Рис. 11-46

При расположении по рис. 11-46, б (коаксальные соленоиды одинакового радиуса  $R_0$ )

$$\Delta_2 M = \frac{2\pi\mu_0\omega W R_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_0(\rho) I_1^2(\rho_0) \times \\ \times \frac{\sin^2 vl}{(vl)^2} (c_1 \cos^2 vz_0 - c_2 \sin^2 vz_0), \quad (11-128)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков соленоидов;  $2z_0$  — расстояние между их центрами;  $\vartheta_0(\rho) = K_0(\rho)/I_0(\rho)$ ;  $\rho = vR$ ;  $\rho_0 = vR_0$ ;  $v = p\pi/(2h)$ ;  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  при  $p$  — четном;  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$  при  $p$  — нечетном.

5. Для плоской катушки с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , симметрично расположенной относительно границ экрана (рис. 11-47),

$$\Delta_2 L = \frac{2\pi\nu_0\omega^2}{h (R_2 - R_1)^2} \sum_{p=1}^{\infty} c_1 \vartheta_0(\rho) \frac{(V_2 - V_1)^2}{v^4}, \quad (11-129)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $\vartheta_0(\rho) = K_0(\rho)/I_0(\rho)$ ;  $\rho = vR$ ;  $V_1$  и  $V_2$  — значения функции  $V(x)$ , данной в приложении 10, при  $x = vR_1$  и  $x = vR_2$  соответственно;  $v = p\pi/(2h)$ ;  $c_1 = 1$  при  $p$  — четном и  $c_1 = 0$  при  $p$  — нечетном.

6. Для катушки прямоугольного сечения дли-

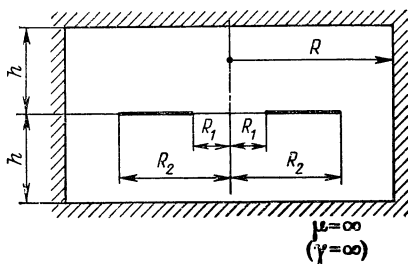


Рис. 11-47

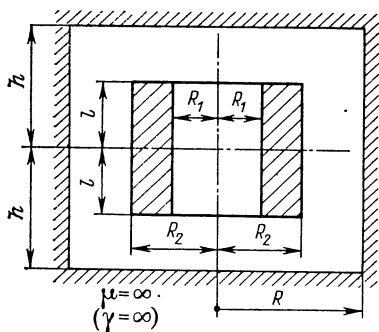


Рис. 11-48

ной  $2l$ , с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , расположенной симметрично относительно границ экрана (рис. 11-48),

$$\Delta_2 L = \frac{2\pi\mu_0\omega^2}{h(R_2 - R_1)^2} \sum_{p=1}^{\infty} c_1 \vartheta_0(\rho) \times \\ \times \frac{(V_2 - V_1)^2}{v^4} \frac{\sin^2 vl}{(vl)^2}, \quad (11-130)$$

где все обозначения — те же, что и в формуле (11-129).

### 11-9. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ЭКРАН КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Вносимые собственные и взаимные индуктивности контуров и катушек, расположенных внутри цилиндрического электромагнитного экрана конечной длины  $2h$  и конечного радиуса  $R$ , могут быть представлены в виде суммы двух слагаемых

$$\Delta L = \Delta_1 L + \Delta_2 L; \quad \Delta M = \Delta_1 M + \Delta_2 M, \quad (11-131; 11-132)$$

из которых первое ( $\Delta_1 L$ ,  $\Delta_1 M$ ) есть вносимая индуктивность рассматриваемых контуров или катушек при бесконечно большом радиусе экрана, а второе ( $\Delta_2 L$ ,  $\Delta_2 M$ ) можно рассматривать как слагаемое, учитывающее конечность радиуса  $R$ .

Так как при  $R \rightarrow \infty$  цилиндрический экран конечной длины превращается в двухсторонний плоский, то величины  $\Delta_1 L$  и  $\Delta_1 M$  могут быть определены по соответствующим формулам и кривым, данным в § 11-5. Формулы для определения  $\Delta_2 L$  и  $\Delta_2 M$  даны ниже.

1. Для кругового контура, коаксиального с экраном (рис. 11-44, а),

$$\Delta_2 L = -\frac{2\pi\mu_0 r_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho_0) (c_1 \cos^2 v z_0 + c_2 \sin^2 v z_0), \quad (11-133)$$

где  $\rho = vR$ ;  $\rho_0 = vr_0$ ;  $\vartheta_1(\rho) = K_1(\rho)/I_1(\rho)$ ;  $v = p\pi/(2h)$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ), причем  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$  при  $p$  — четном и  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  при  $p$  — нечетном.

В частности, при  $z_0 = 0$  (контур лежит в плоскости симметрии экрана)

$$\Delta_2 L = - \frac{2\pi\mu_0 r_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} c_1 \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho_0). \quad (11-134)$$

2. Для двух круговых контуров, коаксиальных с экраном (рис. 11-44, б),

$$\begin{aligned} \Delta_2 M = & - \frac{2\pi\mu_0 r_1 r_2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_1(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) \times \\ & \times (c_1 \cos v z_1 \cos v z_2 + c_2 \sin v z_1 \sin v z_2), \end{aligned} \quad (11-135)$$

где  $\rho_1 = vr_1$ ;  $\rho_2 = vr_2$ , а прочие обозначения — те же, что в формуле (11-133).

При  $r_1 = r_2 = r_0$ ;  $z_1 = -z_2 = z_0$  (контуры имеют одинаковые радиусы и расположены на одинаковом расстоянии  $z_0$  от плоскости симметрии экрана)

$$\Delta_2 M = - \frac{2\pi\mu_0 r_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho_0) (c_1 \cos^2 v z_0 - c_2 \sin^2 v z_0). \quad (11-136)$$

При  $z_1 = z_2 = z_0$ ;  $r_1 \neq r_2$  (контуры разных радиусов, лежащие в одной плоскости  $z = z_0$ )

$$\begin{aligned} \Delta_2 M = & - \frac{2\pi\mu_0 r_1 r_2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_1(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) \times \\ & \times (c_1 \cos^2 v z_0 + c_2 \sin^2 v z_0). \end{aligned} \quad (11-137)$$

3. Для соленоида радиуса  $R_0$ , длиной  $2l$ , расположенного симметрично относительно границ экрана (рис. 11-45),

$$\Delta_2 L = - \frac{2\pi\mu_0 \omega^2 R_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} c_1 \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho_0) \frac{\sin^2 vl}{(vl)^2}, \quad (11-138)$$

где  $\omega$  — число витков соленоида;  $\rho = vR$ ;  $\rho_0 = vR_0$ ;  $\vartheta_1(\rho) = K_1(\rho)/I_1(\rho)$ ;  $v = p\pi/(2h)$ ;  $c_1 = 0$  при  $p$  — четном;  $c_1 = 1$  при  $p$  — нечетном.

4. Для двух соленоидов одинаковой длины  $2l$ , симметричных относительно границ экрана (рис. 11-46), при



расположении по рис. 11-46, *а* (концентрические соленоиды с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ )

$$\Delta_2 M = - \frac{2\pi\mu_0\omega W R_1 R_2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} c_1 \vartheta_1(\rho) I_1(\rho_1) I_1(\rho_2) \frac{\sin^2 \nu l}{(\nu l)^2}, \quad (11-139)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков соленоидов;  $\rho_1 = \nu R_1$ ;  $\rho_2 = \nu R_2$ , а прочие обозначения — те же, что в формуле (11-138).

При расположении по рис. 11-46, *б* (коаксиальные соленоиды одинакового радиуса  $R_0$ )

$$\begin{aligned} \Delta_2 M = & - \frac{2\pi\mu_0\omega W R_0^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \vartheta_1(\rho) I_1^2(\rho_0) \times \\ & \times \frac{\sin^2 \nu l}{(\nu l)^2} (c_1 \cos^2 \nu z_0 - c_2 \sin^2 \nu z_0), \end{aligned} \quad (11-140)$$

где  $\omega$  и  $W$  — числа витков соленоидов;  $2z_0$  — расстояние между их центрами;  $\rho = \nu R$ ;  $\rho_0 = \nu R_0$ ;  $\vartheta_1(\rho) = K_1(\rho)/I_1(\rho)$ ;  $\nu = p\pi/(2h)$ ;  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$  при  $p$  — четном;  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  при  $p$  — нечетном.

5. Для плоской катушки с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , расположенной симметрично относительно границ экрана (рис. 11-47),

$$\Delta_2 L = - \frac{2\pi\mu_0\omega^2}{h(R_2 - R_1)^2} \sum_{p=1}^{\infty} c_1 \vartheta_1(\rho) \frac{(V_2 - V_1)^2}{\nu^4}, \quad (11-141)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;  $\rho = \nu R$ ;  $\vartheta_1(\rho) = K_1(\rho)/I_1(\rho)$ ;  $V_1$  и  $V_2$  — значения функции  $V(x)$ , данной в приложении 10, при  $x = \nu R_1$  и  $x = \nu R_2$  соответственно;  $\nu = p\pi/(2h)$ ;  $c_1 = 0$  при  $p$  — четном и  $c_1 = 1$  при  $p$  — нечетном.

6. Для катушки прямоугольного сечения длиной  $2l$ , с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , расположенной симметрично относительно границ экрана (рис. 11-48),

$$\Delta_2 L = - \frac{2\pi\mu_0\omega^2}{h(R_2 - R_1)^2} \sum_{p=1}^{\infty} c_1 \vartheta_1(\rho) \frac{(V_2 - V_1)^2}{\nu^4} \frac{\sin^2 \nu l}{(\nu l)^2}, \quad (11-142)$$

где все обозначения — те же, что и в формуле (11-141).

**Пример 11-6.** Соленоид примера 11-3 ( $a = 2l = 20$  см;  $R = 10$  см;  $\omega = 100$ ) расположен симметрично внутри цилиндрического электромагнитного экрана радиуса  $R = 15$  см и конечной длины  $2h = 30$  см (рис. 11-45). Определить вносимую собственную индуктивность  $\Delta L$  соленоида.

**Решение.** В соответствии с формулой (11-131) представляем  $\Delta L$  в виде суммы  $\Delta_1 L$  и  $\Delta_2 L$ , где  $\Delta_1 L$  — определенная в примере 11-3 вносимая собственная индуктивность того же соленоида, симметрично расположенного между пластинами двухстороннего плоского электромагнитного экрана (рис. 11-16);  $\Delta_2 L$  — слагаемое, учитывающее конечность радиуса  $R$  экрана и определяемое по формуле (11-138). В данном случае  $\nu l = \rho \pi \frac{l}{2h} = \rho \pi / 3$ , откуда видно, что второй член под знаком суммы в формуле (11-138) равен нулю (при  $\rho = 3$  величина  $\sin \nu l = 0$ ), а третий ( $\rho = 5$ ) мал. Сохраняя в этой сумме только первый член, по таблицам функций Бесселя  $I_1$  и  $K_1$  при  $\rho = \nu R = \pi/2$  и  $\rho_0 = \nu R_0 = \pi/3$  определяем  $I_1(\rho) = 1,054$ ;  $K_1(\rho) = 0,2507$ ;  $I_1(\rho_0) = 0,5985$ . Подставляя эти значения в формулу (11-138), получаем

$$\Delta_2 L = - \frac{2\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^4 \cdot 10^{-2}}{0,15} \frac{0,2507}{1,054} (0,5985)^2 \cdot \frac{3}{4} \frac{9}{\pi^2} =$$

$$= - 3,067 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Суммарная вносимая индуктивность соленоида

$$\Delta L = -(1,42 + 3,07) \cdot 10^{-4} = -4,49 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Относя ее к собственной индуктивности  $L_0$  соленоида без экрана, имеем  $\Delta L/L_0 = -0,330 = -33 \%$ .

## 11-10. СФЕРИЧЕСКИЙ МАГНИТНЫЙ ЭКРАН

1. Круговой контур, симметрично расположенный внутри экрана (рис. 11-49).

Вносимая собственная индуктивность контура

$$\Delta L = \pi \mu_0 \sin^4 \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{(n+1)^2} \left( \frac{r_0}{R} \right)^{2(n+1)} [P'_n(\cos \theta_0)]^2, \quad (11-143)$$

где  $r_0$ ,  $\theta_0$  — координаты контура в сферической системе координат  $(r, \theta, \psi)$ , центр которой совпадает с центром экрана;  $R$  — радиус экрана;  $P'_n(\cos \theta_0)$  — производная от полинома Лежандра  $n$ -го порядка  $P_n(\cos \theta)$  по его аргументу  $(\cos \theta)$  при  $\theta = \theta_0$ .

В частности, для контура, центр которого совпадает с центром экрана ( $\theta_0 = \pi/2$ ),

$$\Delta L = \pi \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{(n+1)^2} \times$$

$$\times \left( \frac{r_0}{R} \right)^{2(n+1)} [P'_n(0)]^2. \quad (11-144)$$

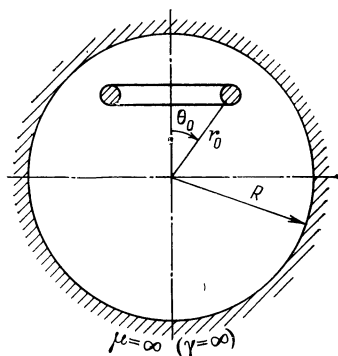


Рис. 11-49

2. Два коаксиальных круговых контура, симметрично расположенных внутри экрана (рис. 11-50, а).

Вносимая взаимная индуктивность контуров

$$\Delta M = \pi \mu_0 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{(n+1)^2} \left( \frac{r_1 r_2}{R^2} \right)^{n+1} \times \\ \times P'_n(\cos \theta_1) P'_n(\cos \theta_2), \quad (11-145)$$

где  $r_1$ ,  $\theta_1$  и  $r_2$ ,  $\theta_2$  — сферические координаты контуров;  $P'_n(\cos \theta_1)$  и  $P'_n(\cos \theta_2)$  — производные от полиномов Лежандра  $n$ -го порядка  $P_n(\cos \theta)$  по их аргументу  $(\cos \theta)$  при  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$ .

В частности, при  $r_1 = r_2 = r_0$ ;  $\theta_1 = \theta_0$ ;  $\theta_2 = \pi - \theta_0$  (коаксиальные контуры одинакового радиуса, симметричные относительно плоскости симметрии экрана  $\theta = \pi/2$ , рис. 11-50, б)

$$\Delta M = \pi \mu_0 \sin^4 \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{(n+1)^2} \times \\ \times \left( \frac{r_0}{R} \right)^{2(n+1)} (-1)^{n-1} [P'_n(\cos \theta_0)]^2; \quad (11-146)$$

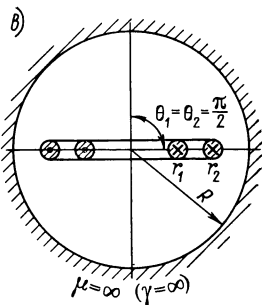
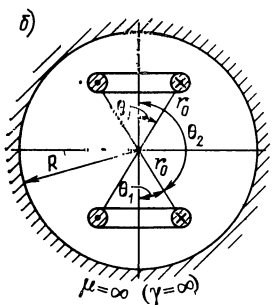
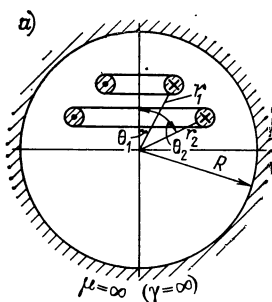


Рис. 11-50

при  $r_1 \neq r_2$ ;  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$  (контуры с неодинаковыми радиусами, лежащие в плоскости симметрии экрана, рис. 11-50, в)

$$\Delta M = \pi \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{(n+1)^2} \left( \frac{r_1 r_2}{R^2} \right)^{n+1} [P'_n(0)]^2. \quad (11-147)$$

3. Катушка прямоугольного сечения, центр которой совпадает с центром экрана.

Если длина катушки  $a$  больше ее толщины  $r$  (рис. 11-51, а), то вносимая собственная индуктивность катушки, определенная по методу эквивалентных контуров (§ 7-12, п. 1; § 11-1, п. 7), равна

$$\Delta L = \pi \mu_0 \omega^2 \sin^4 \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{(n+1)^2} \left( \frac{r_0}{R} \right)^{2(n+1)} [P'_n(\cos \theta_0)]^2, \quad (11-148)$$

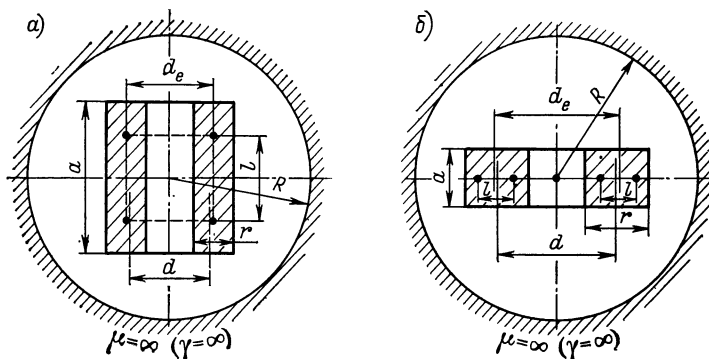


Рис. 11-51

где  $\omega$  — число витков катушки;

$$r_0 = \frac{1}{2} \sqrt{d_e^2 + l^2}; \quad \theta_0 = \arctg \frac{d_e}{l};$$

$$d_e = d \left( 1 + \frac{l^2}{6d^2} \right); \quad l = \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{3}} \quad (11-149)$$

— величины, определяющие размер и положение эквивалентных контуров (§ 7-12);  $d$  — средний диаметр катушки;  $P'_n(\cos \theta_0)$  — производная от полинома Лежандра  $n$ -го порядка  $P_n(\cos \theta)$  по его аргументу  $(\cos \theta)$  при  $\theta = \theta_0$ .

В частности, для соленоида ( $r = 0$ )

$$d_e = d; \quad l = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad r_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{3d^2 + a^2};$$

$$\theta_0 = \arctg \left( \frac{d}{a} \sqrt{3} \right).$$

Если длина катушки  $a$  меньше ее толщины  $r$  (рис. 11-51, б), то

$$\Delta L = \frac{\pi}{4} \mu_0 \omega^2 \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{R}{(n+1)^2} \left[ \left( \frac{r_1}{R} \right)^{n+1} + \left( \frac{r_2}{R} \right)^{n+1} \right]^2 [P'_n(0)]^2, \quad (11-150)$$

где  $\omega$  — число витков катушки;

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{d_e - l}{2}; & r_2 &= \frac{d_e + l}{2}; \\ d_e &= d \left( 1 + \frac{a^2}{6d^2} \right); & l &= \sqrt{\frac{r^2 - d^2}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (11-151)$$

— величины, определяющие размеры эквивалентных контуров (§ 7-12);  $d$  — средний диаметр катушки;  $P'_n(0)$  — производная от полинома Лежандра  $n$ -го порядка  $P_n(\cos \theta)$  по его аргументу ( $\cos \theta$ ) при  $\theta = \pi/2$ .

В частности, для плоской катушки  $a = 0$ ;  $d_e = d$ ;  $l = r/\sqrt{3}$ .

Для катушки квадратного сечения ( $a = r$ ) размер  $l = 0$ , и формулы (11-148) и (11-150) дают

$$\Delta L = \pi \mu_0 \omega^2 \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \left( \frac{r_0}{R} \right)^{2(n+1)} \frac{R}{(n+1)^2} [P'_n(0)]^2, \quad (11-152)$$

$$\text{где } r_0 = \frac{d_e}{2} = \frac{d}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{6d^2} \right).$$

**Пример 11-7.** Катушка прямоугольного сечения со средним диаметром  $d = 16,3$  см, длиной  $a = 20$  см и толщиной  $r = 10$  см расположена внутри сферического магнитного экрана с радиусом  $R = 20$  см так, что центр катушки совпадает с центром экрана. Число витков катушки  $\omega = 100$ . Определить ее вносимую собственную индуктивность.

**Решение.** Заменяем катушку двумя эквивалентными круговыми контурами, параметры которых определяем по формулам (11-149):

$$l = \sqrt{\frac{400 - 100}{3}} = 10 \text{ см}; \quad d_e = 16,3 \left( 1 + \frac{100}{6 \cdot 16,3^2} \right) =$$

$$= 17,32 = 10 \sqrt{3} \text{ см};$$

$$r_0 = \frac{1}{2} \sqrt{300 + 100} = 10 \text{ см}; \quad \theta_0 = \arctg \frac{10 \sqrt{3}}{10} = \frac{\pi}{3}.$$

При  $\cos \theta_0 = \cos \pi/3 = 0,5$  производные  $P'_n(\cos \theta_0)$  имеют значения:  $P'_1 = 1$ ;  $P'_3 = 9/64$ ;  $P'_5 = -2,227$ . Подставляя эти значения в формулу (11-148), для суммы, входящей в эту формулу, получаем

$$\sum = \frac{1}{64} (1 + 0,0022 + 0,0022) = \frac{1,0044}{64} = 0,01566,$$

и, следовательно,

$$\Delta L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^4 \cdot 0,2 \cdot \frac{9}{16} 0,01566 = 6,955 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

Собственную индуктивность  $L_0$  катушки без экрана определяем по формуле (6-17). В данном случае  $\rho = 10/16,3 = 0,613$ ;  $\alpha = 20/16,3 = 1,226$  и из кривых рис. 6-5 находим  $\Phi = 3,74$ , так что

$$L_0 = 10^{-7} \cdot 10^4 \cdot 16,3 \cdot 3,74 \cdot 10^{-2} = 6,10 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Таким образом,  $\Delta L/L_0 = 0,114 = 11,4 \%$ .

## 11-11. СФЕРИЧЕСКИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ЭКРАН

Вносимые собственные и взаимные индуктивности контуров и катушек, расположенных внутри сферического электромагнитного экрана, могут быть определены по формулам (11-143)—(11-152), данным в § 11-10 для магнитного экрана, если в этих формулах изменить знак на обратный и заменить множитель  $R/(n+1)^2$  под знаком суммы множителем  $R/[n(n+1)]$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КНИГЕ

1. Эллиптические интегралы первого и второго рода определяются выражениями:

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}; \quad E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, dx. \quad (\text{П-1})$$

Параметр  $k$  называется модулем этих интегралов.

Число  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  называется дополнительным модулем.

При  $\varphi = \pi/2$  интегралы называются *полными* и обозначаются соответственно через  $K$  и  $E$ :

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}; \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, dx. \quad (\text{П-2})$$

Таблицы значений  $K$  и  $E$  даны в приложении 4.

Более подробные таблицы  $K$  и  $E$  см. в работе [19].

**2. Гипергеометрическая функция** (гипергеометрический ряд) переменной  $x$  и параметров  $a, b, c$  определяется формулой

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} x^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots \quad (\text{П-3})$$

**3. Сферические функции** Лежандра первого рода (полиномы Лежандра)  $n$ -го порядка определяются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot (n!)} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n - \text{целое число.} \quad (\text{П-4})$$

Для вычисления  $P_n(x)$  может служить формула

$$P_n(x) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-x}{2}\right), \quad (\text{П-5})$$

где  $F$  — обозначение гипергеометрической функции. В частности,

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1; \\ P_1(x) &= x; \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x); \\ P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-6})$$

Сферические функции высших порядков могут быть вычислены по рекуррентной формуле

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (\text{П-7})$$

Частные значения:

$$P_{2k+1}(0) = 0; \quad (\text{П-8})$$

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}; \quad (\text{П-9})$$

$$P_n(-1) = (-1)^n; \quad (\text{П-10})$$

$$P_n(1) = 1; \quad (\text{П-11})$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (\text{П-12})$$

Производная  $P'_n(x)$  от  $P_n(x)$  по  $x$  может быть найдена из соотношения

$$(x^2 - 1) P'_n(x) = nx P_n(x) - n P_{n-1}(x). \quad (\text{П-13})$$

Таблицы сферических функций и их производных даны в приложениях 5 и 6.

**4. Функции Бесселя** первого и второго рода  $J_n(z)$  и  $N_n(z)$  порядка  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) u = 0. \quad (\text{П-14})$$

Функции Бесселя третьего рода, или функции Ханкеля,

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + i N_n(z);$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - i N_n(z)$$

тоже являются линейно независимыми решениями уравнения (П-14).

Модифицированные функции Бесселя первого и второго рода  $I_n(z)$  и  $K_n(z)$  представляют собой линейно независимые решения уравнения

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} - \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right) u = 0$$

и связаны с функциями  $J_n$  и  $H_n^{(1)}$  зависимостями:

$$I_n(z) = j^{-n} J_n(jz); \quad K_n(z) = i \frac{\pi}{2} e^{jn\pi/2} H_n^{(1)}(jz).$$

Вещественные и мнимые составляющие функций

$$J_0(xe^{j3\pi/4}); \quad K_0(xe^{j\pi/4})$$

обозначаются соответственно через  $\text{ber } x$ ,  $\text{bei } x$  и  $\text{ker } x$ ,  $\text{kei } x$  и называются функциями Томсона (Кельвина):

$$\text{ber } x + j \text{bei } x = J_0(xe^{j3\pi/4}) = I_0(xe^{j\pi/4}) = I_0(x \sqrt{j});$$

$$\text{ker } x + j \text{kei } x = K_0(xe^{j\pi/4}) = K_0(x \sqrt{j}).$$

Наряду с функциями  $\text{ker } x$  и  $\text{kei } x$  применяются функции  $\text{her } x$ ,  $\text{hei } x$ , представляющие собой вещественную и мнимую составляющие функции Ханкеля  $H_0^{(1)}(xe^{j3\pi/4})$ :

$$\text{her } x + j \text{hei } x = H_0^{(1)}(xe^{j3\pi/4}) = H_0^{(1)}(x \sqrt{j})$$

и связанные с функциями Томсона  $\text{ker } x$  и  $\text{kei } x$  зависимостями:

$$\text{her } x = \frac{2}{\pi} \text{kei } x; \quad \text{hei } x = -\frac{2}{\pi} \text{ker } x.$$



Значения функций  $J_n(z)$ ,  $I_n(z)$ ,  $K_n(z)$ , а также функций  $\text{ber } x$ ,  $\text{bei } x$ ,  $\text{ker } x$ ,  $\text{kei } x$  могут быть найдены по следующим формулам:

$$J_0(z) = 1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} - \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots; \quad (\text{П-15})$$

$$I_0(z) = 1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots; \quad (\text{П-16})$$

$$J_1(z) = -\frac{d}{dz} J_0(z); \quad I_1(z) = \frac{d}{dz} I_0(z); \quad (\text{П-17})$$

$$K_0(z) = -\left(C + \ln \frac{z}{2}\right) I_0(z) + \frac{(z/2)^2}{(1!)^2} + \frac{3}{2} \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \frac{11}{6} \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots; \quad (\text{П-18})$$

$$K_1(z) = \left(C + \ln \frac{z}{2}\right) I_1(z) + \frac{1}{z} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{(k!) (k+1)!} \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k+1} \right] \quad (\text{П-19})$$

(при  $k=0$  выражение в квадратных скобках (П-19) следует положить равным единице);

$$\text{ber } x = 1 - \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(x/2)^8}{(4!)^2} - \dots; \quad (\text{П-20})$$

$$\text{bei } x = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \frac{(x/2)^{10}}{(5!)^2} - \dots; \quad (\text{П-21})$$

$$\text{ker } x = \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \text{ber } x + \frac{\pi}{4} \text{bei } x - \frac{3}{2} \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} + \dots; \quad (\text{П-22})$$

$$\text{kei } x = \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \text{bei } x - \frac{\pi}{4} \text{ber } x + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{11}{16} \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \dots, \quad (\text{П-23})$$

где  $C = 0,5772\dots$  — постоянная Эйлера. Числовые значения всех перечисленных функций Бесселя могут быть также взяты из приложений 7, 8 и 9. Более подробные таблицы см. в работах [5, 9, 17, 19].

**5. Дзета-функция Римана** при  $\text{Re } z > 1$  определяется формулой

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}.$$

Частные значения:

$$\zeta(1) = \infty; \quad \zeta(2) = \pi^2/6; \quad \zeta(3) = 1,20206\dots;$$

$$\zeta(4) = \pi^4/90; \quad \zeta(5) = 1,03693\dots$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ПО ТАБЛИЦАМ

Интерполирование по таблице, дающей значения некоторой функции  $f$ , заключается в отыскании промежуточных значений этой функции по тем ее значениям, которые содержатся в таблице.

1. Наиболее просто интерполирование производится в случае, когда величина  $f$ , данная в таблице, зависит только от одной переменной  $x$ .

Пусть  $h = \Delta x$  — шаг таблицы, т. е. разность двух соседних табличных значений аргумента  $x$ . Пусть, далее,  $f_0, f_1, f_2$  — значения функции  $f$ , соответствующие соседним значениям  $x_0, x_1, x_2$  аргумента  $x$ , а  $u$  и  $v$  — их разности:

$x$	$f(x)$	Разность
$x_0$	$f_0$	$u = f_1 - f_0$
$x_1$	$f_1$	$v = f_2 - f_1$
$x_2$	$f_2$	

Тогда значение функции  $f$ , отвечающее значению  $x$ , заключенному между  $x_0$  и  $x_1$ , можно найти по формуле

$$f(x) = f_0 + tu, \quad (\text{П-24})$$

где

$$t = \frac{x - x_0}{h}. \quad (\text{П-25})$$

Интерполирование по формуле (24) называется *линейным*. Погрешность этой формулы не превышает одной восьмой от величины, на которую отличаются две соседние разности.

Пусть, например, требуется найти по таблице значение  $f(x) = \ln x$  при  $x = 2,513$ . В данном случае  $x_0 = 2,51$ ;  $x_1 = 2,52$ ;  $h = 0,01$ ;  $x - x_0 = 0,003$ ;  $t = 0,003/0,01 = 0,3$ ;  $f_0 = 0,9203$ ;  $f_1 = 0,9243$ ;  $v = 0,0040$ , и, применяя формулу (П-24), находим

$$f(x) = \ln 2,513 = 0,9203 + 0,3 \cdot 0,0040 = 0,9215.$$

Если точность линейного интерполирования недостаточна, то применяют формулу *квадратичного* интерполирования

$$f(x) = f_0 + tu - \frac{t(1-t)}{2}(v-u). \quad (\text{П-26})$$

Пусть, например, требуется найти значение функции  $F$ , содержащееся в табл. 5-3, при  $\xi = 0,104$ . В данном случае  $h = 0,01$ ;  $t = 0,4$ ;  $x_0 = 0,100$ ;  $x_1 = 0,110$ ;  $x_2 = 0,120$ ;  $f_0 = 21,539$ ;  $f_1 = 20,396$ ;  $f_2 = 19,361$ ;  $u = -1,143$ ;  $v = -1,035$ , и формула (П-26) дает

$$\begin{aligned} f(x) &= F(0,104) = 21,539 - 0,4 \cdot 1,143 - \frac{0,4 \cdot 0,6}{2} (-1,035 + 1,143) = \\ &= 21,539 - 0,4572 - 0,01296 = 21,069. \end{aligned}$$

2. В случае когда величина  $f$ , данная в таблице, зависит не от одной, а от двух переменных  $x$  и  $y$ , для интерполирования составляют табличку по следующей форме:

—	$y_0$	—	$y_1$	—	$y_2$
$x_0$	$f_{00}$	$u_y$	$f_{01}$	$v_y$	$f_{02}$
—	$u_x$	—	$w_x$	—	—
$x_1$	$f_{10}$	$w_y$	$f_{11}$	—	—
—	$v_x$	—	—	—	—
$x_2$	$f_{20}$	—	—	—	—

Через  $u$ ,  $v$  и  $w$  с индексами  $x$  и  $y$  здесь обозначены следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= f_{10} - f_{00}; & v_x &= f_{20} - f_{10}; & w_x &= f_{11} - f_{01}; \\ u_y &= f_{01} - f_{00}; & v_y &= f_{02} - f_{01}; & w_y &= f_{11} - f_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-27})$$

Линейное интерполирование производят по формуле

$$f(x, y) = f_{00} + t_x u_x + t_y u_y, \quad (\text{П-28})$$

где  $t_x = (x - x_0)/h_x$ ;  $t_y = (y - y_0)/h_y$ , причем  $h_x$  — шаг таблицы по переменной  $x$ , т. е. разность двух соседних табличных значений аргумента  $x$ ;  $h_y$  — то же для аргумента  $y$ .

Если точность линейного интерполирования недостаточна, то применяют формулу *квадратичного* интерполирования

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_{00} + t_x \left[ u_x - \frac{1 - t_x}{2} (v_x - u_x) \right] + \\ &+ t_y \left[ u_y - \frac{1 - t_y}{2} (v_y - u_y) \right] + t_x t_y (w_x - u_x). \end{aligned} \quad (\text{П-29})$$

Пусть например, требуется найти значение величины  $f$  по табл. 10-5 при  $x = c/d = 0,55$  и  $y = b/c = 0,235$ .

В данном случае  $f_{00} = 0,0191$ ;  $f_{01} = 0,0182$ ;  $f_{02} = 0,0169$ ;  $f_{10} = 0,0271$ ;  $f_{11} = 0,0258$ ;  $f_{20} = 0,0361$ .

Следовательно,

$$u_x = 0,0080; \quad v_x = 0,0090; \quad w_x = 0,0076;$$

$$u_y = -0,0009; \quad v_y = -0,0013; \quad w_y = -0,0013.$$

Кроме того,  $h_x = 0,1$ ;  $h_y = 0,1$ ;  $t_x = 0,05/0,10 = 0,5$ ;  $t_y = 0,035/0,10 = 0,35$ .

Применяя формулу (28), имеем

$$f(x, y) = 0,0191 + 0,5 \cdot 0,0080 - 0,35 \cdot 0,0009 =$$

$$= 0,0191 + 0,0040 - 0,000315 = 0,0228.$$

При квадратичном интерполировании по формуле (П-29)

$$f(x, y) = 0,0191 + 0,5(0,0080 - 0,25 \cdot 0,0010) +$$

$$+ 0,35 \left( -0,0009 + \frac{0,65}{2} 0,0004 \right) - 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,0004 =$$

$$= 0,0191 + 0,0039 - 0,00027 - 0,00007 = 0,0227.$$

В данном случае линейное интерполирование дает результат, почти не отличающийся от результата при квадратичном интерполировании.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Численным интегрированием называют вычисление определенных интегралов по ряду численных значений подынтегральной функции. Из формул, служащих для этой цели и называемых формулами механических квадратур, наиболее часто применяют *формулу трапеций* и *параболическую формулу*.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_{x_0}^x y dx. \quad (\text{П-30})$$

Делим промежуток интегрирования  $x - x_0$  на  $n$  одинаковых частей длиной

$$h = (x - x_0)/n. \quad (\text{П-31})$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_0 + nh} y dx = h \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right), \quad (\text{П-32})$$

где  $y_0, y_1, y_2, \dots$  — значения  $y$ , соответствующие значениям  $x$ , равным  $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$  и т. д.

Эта формула называется *формулой трапеций*.

Более точная (но и несколько более сложная) *параболическая формула* имеет вид

$$\int_{x_0}^{x=x_0+nh} y \, dx = \frac{h}{3} [2(y_0 + y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2} + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) - (y_0 + y_n)], \quad (\text{П-33})$$

где все обозначения — те же, что и в предыдущей формуле, причем  $n$  должно быть обязательно четным числом.

**Пример.** Вычислить интеграл

$$I = \int_4^{5,2} \ln x \, dx.$$

Разбиваем промежуток интегрирования на четыре равные части длины  $h = (5,2 - 4)/4 = 0,3$ . Составляем табличку значений  $y = \ln x$  в точках деления:

$x$	$y = \ln x$	$x$	$y = \ln x$
4,0	1,3863	4,6	1,5261
4,3	1,4586	4,9	1,5892
4,6	1,5261	5,2	1,6487

Применяем формулу трапеций

$$\begin{aligned} I &= 0,3 (0,6932 + 1,4586 + 1,5261 + 1,5892 + 0,8244) = \\ &= 0,3 \cdot 6,0915 = 1,8275. \end{aligned}$$

Применяем параболическую формулу

$$\begin{aligned} I &= \frac{0,3}{3} [2(1,3863 + 1,5261 + 1,6487) + 4(1,4586 + 1,5892) - \\ &- (1,3863 + 1,6487)] = 0,1 [2 \cdot 4,5611 + 4 \cdot 3,0478 - 3,0350] = \\ &= 0,1 \cdot 18,278 = 1,8278. \end{aligned}$$

Истинное значение интеграла

$$I = x (\ln x - 1) \Big|_{4,0}^{5,2} = 1,827847.$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ПОЛНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ  
ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА**

$k^2$	$K$	$E$	$K/K'$	$K'/K$	$E'$	$K'$	$k'^2$
0,00	1,57080	1,57080	0	$\infty$	1	$\infty$	1,00
1	57475	56686	0,42611	2,34682	1,01599	3,69564	0,99
2	57874	56291	47068	2,12457	02859	35414	98
3	58278	55895	50153	1,99388	03995	15587	97
0,04	1,58687	1,55497	0,52613	1,90067	1,05050	3,01611	0,96
0,05	1,59100	1,55097	0,54705	1,82799	1,06047	2,90834	0,95
6	59519	54696	56552	76828	06999	82075	94
7	59942	54294	58223	71754	07912	74707	93
8	60371	53889	59761	67334	08794	68355	92
0,09	1,60805	1,53483	0,61194	1,63414	1,09648	2,62777	0,91
0,10	1,61244	1,53076	0,62544	1,59887	1,10477	2,57809	0,90
11	61689	52667	63825	56680	11286	53333	89
12	62139	52256	65047	53734	12074	49264	88
13	62595	51843	66221	51009	12845	45534	87
0,14	1,63058	1,51428	0,67353	1,48471	1,13600	2,42093	0,86
0,15	1,63526	1,51012	0,68449	1,46094	1,14340	2,38902	0,85
16	64000	50594	69513	43858	15066	35926	84
17	64481	50174	70550	41744	15779	33141	83
18	64968	49753	71562	39738	16480	30523	82
0,19	1,65462	1,49329	0,72553	1,37829	1,17170	2,28055	0,81
0,20	1,65962	1,48904	0,73526	1,36007	1,17849	2,25721	0,80
21	66470	48476	74481	34262	18518	23507	79
22	66985	48047	75422	32588	19178	21402	78
23	67507	47615	76349	30978	19829	19397	77
0,24	68037	47182	77265	29425	20471	17483	76
0,25	1,68575	1,46746	0,78171	1,27926	1,21106	2,15652	0,75
26	69121	46309	79066	26476	21732	13897	74
27	69675	45869	79955	25070	22351	12213	73
28	70237	45427	80836	23707	22963	10595	72
0,29	1,70809	1,44983	0,81712	1,22381	1,23568	2,09037	0,71
0,30	1,71389	1,44536	0,82583	1,21091	1,24167	2,07536	0,70
31	71978	44088	83449	19834	24759	06088	69
32	72578	43637	84312	18607	25346	04689	68
33	73186	43183	85172	17409	25926	03337	67
34	1,73806	1,42727	0,86030	1,16238	1,26501	2,02028	66
0,35	1,74435	1,42269	0,86887	1,15091	1,27071	2,00760	0,65
$k'^2$	$K'$	$E'$	$K'/K$	$K/K'$	$E$	$K$	$k^2$

$k'$	$K$	$E$	$K/K'$	$K'/K$	$E'$	$K'$	$k'^2$
0,35	1,74435	1,42269	0,86887	1,15091	1,27071	2,00760	0,65
36	75075	41808	87744	13986	27635	1,99530	64
37	75727	41345	88600	12867	28194	98337	63
38	76390	40879	89457	11786	28748	97178	62
0,39	1,77065	1,40411	0,90315	1,10723	1,29298	1,96052	0,61
0,40	1,77752	1,39939	0,91175	1,09679	1,29843	1,94957	0,60
41	78452	39465	92037	08652	30383	93891	59
42	79165	38988	92903	07640	30919	92853	58
43	79892	38509	93771	06642	31451	91841	57
0,44	1,80633	1,38026	0,94644	1,05659	1,31979	1,90855	0,56
0,45	1,81388	1,37540	0,95522	1,04688	1,32502	1,89892	0,55
46	82159	37051	96404	03730	33022	88953	54
47	82946	36560	97293	02782	33538	88036	53
48	83749	36064	98188	01845	34051	87140	52
49	84569	35566	99090	00918	34559	86264	51
0,50	1,85407	1,35064	1,00000	1,00000	1,35064	1,85407	0,50
$k'^2$	$K'$	$E'$	$K'/K$	$K/K'$	$E$	$K$	$k^2$

При  $k^2 \ll 1$

$$K \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right); \quad E \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{4} \right); \quad \frac{K'}{K} \approx \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{4}{k} - \frac{k^2}{4} \right).$$

При  $k'^2 = 1 - k^2 \ll 1$

$$K \approx \pi \frac{4}{k'} + \frac{k'^2}{4} \left( \ln \frac{4}{k'} - 1 \right); \quad E \approx 1 + \frac{k'^2}{2} \left( \ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} \right);$$

$$\frac{K}{K'} \approx \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{4}{k'} - \frac{k'^2}{4} \right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА)

$x$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$	$P_7(x)/x$	$P_8(x)$	$x$
0,00	-0,5000	-0,0000	0,3750	0,0000	1,875	-0,3125	-0,0000	0,2734	0,00
01	4998	0150	3746	0187	874	3118	0219	2724	01
02	4994	0300	3735	0374	871	3099	0436	2695	02
03	4986	0449	3716	0560	867	3066	0651	2646	03
0,04	-0,4976	-0,0598	0,3690	0,0744	1,861	-0,3021	-0,0862	0,2579	0,04
0,05	-0,4963	-0,0747	0,3657	0,0927	1,854	-0,2962	-0,1069	0,2491	0,05
06	4946	0895	3616	1106	844	2891	1270	2387	06
07	4926	1041	3567	1283	832	2808	1404	2265	07
08	4904	1187	3512	1455	819	2713	1651	2126	08
0,09	-0,4878	-0,1332	0,3449	0,1624	1,804	-0,2606	-0,1828	0,1972	0,09
0,10	-0,4850	-0,1475	0,3379	0,1788	1,788	-0,2488	-0,1995	0,1803	0,10
11	4818	1617	3303	1947	770	2360	2151	1621	11
12	4784	1757	3219	2101	751	2220	2295	1426	12
13	4746	1895	3129	2248	729	2071	2427	1220	13
0,14	-0,4706	-0,2031	0,3032	0,2389	1,706	-0,1913	-0,2545	0,1006	0,14
0,15	-0,4662	-0,2166	0,2928	0,2523	1,682	-0,1746	-0,2649	0,0783	0,15
16	4616	2298	2819	2650	656	1572	2738	0554	16
17	4566	2427	2703	2769	629	1389	2812	0319	17
18	4514	2554	2581	2880	600	1201	2870	+0,0082	18
0,19	-0,4458	-0,2679	0,2453	0,2982	1,570	-0,1006	-0,2911	-0,0157	0,19
0,20	-0,4400	-0,2800	0,2320	0,3075	1,538	-0,0806	-0,2935	-0,0396	0,20
21	4338	2918	2181	3159	504	0601	2943	0633	21
22	4274	3034	2037	3234	470	0394	2933	0865	22
23	4206	3146	1889	3299	434	-0,0183	2906	1093	23
24	-0,4136	-0,3254	0,1735	0,3353	1,397	+0,0029	-0,2861	-0,1313	24
0,25	-0,4062	-0,3359	0,1577	0,3397	1,359	+0,0243	-0,2799	-0,1525	0,25



$x$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_3(x)/x$	$P_4(x)$	$P_6(x)$	$P_6(x)/x$	$P_8(x)$	$P_7(x)$	$P_7(x)/x$	$P_8(x)$	$x$
0,25	-0,4062	-0,3359	-1,344	0,1577	0,3397	1,359	0,0243	-0,2799	-1,120	-0,1525	0,25
26	3986	3461	331	1415	3431	320	0456	2720	-1,046	1725	26
27	3906	3558	318	1249	3453	279	0669	2625	-0,972	1914	27
28	3824	3651	304	1079	3465	237	0879	2512	897	2088	28
0,29	-0,3738	-0,3740	-1,290	0,0906	0,3465	1,195	0,1087	-0,2384	-0,822	-0,2247	0,29
0,30	-0,3650	-0,3825	-1,275	0,0729	0,3454	1,151	0,1292	-0,2241	-0,747	-0,2391	0,30
31	3558	3905	260	0550	3431	107	1492	2082	672	2516	31
32	3464	3981	244	0369	3397	062	1686	1910	597	2621	32
33	3366	4052	228	+0,0185	3351	1,015	1873	1724	522	2706	33
0,34	-0,3266	-0,4117	-1,211	-0,0000	0,3294	0,969	0,2053	-0,1527	-0,449	-0,2770	0,34
0,35	-0,3162	-0,4178	-1,194	-0,0187	0,3225	0,921	0,2225	-0,1318	-0,377	-0,2812	0,35
36	3056	4234	176	0375	3144	873	2388	1098	305	2831	36
37	2946	4284	158	0564	3051	825	2540	0870	235	2826	37
38	2834	4328	139	0753	2948	776	2681	0635	167	2798	38
0,39	-0,2718	-0,4367	-1,120	-0,0942	0,2833	0,726	0,2810	-0,0393	-0,101	-0,2746	0,39
0,40	-0,2600	-0,4400	-1,100	-0,1130	0,2706	0,6766	0,2926	-0,0146	-0,036	-0,2670	0,40
41	2478	4427	080	1317	2569	6266	3029	+0,0104	+0,0253	2570	41
42	2354	4448	059	1504	2421	5764	3118	0356	0848	2448	42
43	2226	4462	038	1688	2263	5263	3191	0608	1414	2302	43
0,44	-0,2096	-0,4470	-1,016	-0,1870	0,2095	0,4761	0,3249	0,0859	0,1952	-0,2134	0,44
0,45	-0,1962	-0,4472	-0,994	-0,2050	0,1917	0,4260	0,3290	0,1106	0,2458	-0,1945	0,45
46	1826	4467	971	2226	1730	3761	3314	1348	2930	1737	46
47	1686	4454	948	2399	1534	3264	3321	1584	3370	1510	47
48	1544	4435	924	2568	1330	2771	3310	1811	3773	1266	48
49	-0,1398	-0,4409	-0,900	-0,2732	0,1118	0,2281	0,3280	0,2027	0,4137	-0,1008	49
0,50	-0,1250	-0,4375	-0,875	-0,2891	0,0898	0,1796	0,3232	0,2231	0,4462	-0,0736	0,50

$x$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_5(x)/x$	$P_4(x)$	$P_6(x)$	$P_5(x)/x$	$P_6(x)$	$P_7(x)$	$P_7(x)/x$	$P_8(x)$	$x$
0,50	-0,1250	-0,4375	-0,875	-0,2891	0,0898	0,1796	0,3232	0,2231	0,4462	-0,0736	0,50
51	1098	4334	850	3044	0673	1320	3166	2422	4749	0454	51
52	0944	4285	824	3191	0441	0848	3080	2596	4992	-0,0164	52
53	0786	4228	798	3332	+0,0204	+0,0345	2975	2753	5194	+0,0133	53
0,54	-0,0626	-0,4163	-0,771	-0,3465	-0,0037	-0,0068	0,2851	0,2891	0,5354	0,0432	0,54
0,55	-0,0462	-0,4091	-0,744	-0,3590	-0,0282	-0,0513	0,2708	0,3007	0,5467	0,0731	0,55
56	0296	4010	716	3707	0529	0945	2546	3102	5540	1029	56
57	-0,0126	3920	688	3815	0779	1366	2366	3172	5565	1320	57
58	+0,0046	3822	659	3914	1028	1773	2168	3217	5547	1601	58
0,59	0,0222	-0,3716	-0,630	-0,4002	-0,1278	-0,2166	0,1953	0,3235	0,5483	0,1869	0,59
0,60	0,0400	-0,3600	-0,600	-0,4080	-0,1526	-0,2543	0,1721	0,3226	0,5377	0,2123	0,60
61	0582	3475	570	4146	1772	2905	1473	3188	5226	2357	61
62	0766	3332	539	4200	2014	3249	1211	3121	5034	2569	62
63	0954	3199	508	4242	2251	3573	0935	3023	4798	2753	63
0,64	0,1144	-0,3046	-0,476	-0,4270	-0,2482	-0,3878	0,0646	0,2895	0,4524	0,2909	0,64
0,65	0,1338	-0,2884	-0,4437	-0,4284	-0,2705	-0,4162	0,0347	0,2737	0,4211	0,3032	0,65
66	1534	2713	4111	4284	2919	4423	+0,0038	2548	3861	3120	66
67	1734	2531	3778	4268	3122	4660	-0,0278	2329	3476	3169	67
68	1936	2339	3440	4236	3313	4872	0601	2081	3060	3179	68
0,69	0,2142	-0,2137	-0,3097	-0,4187	-0,3490	-0,5058	-0,0926	0,1805	0,2616	0,3145	0,69
0,70	0,2350	-0,1925	-0,2750	-0,4121	-0,3652	-0,5216	-0,1253	0,1502	0,2146	0,3067	0,70
71	2562	1702	2397	4036	3796	5346	1578	1173	1652	2942	71
72	2776	1469	2040	3933	3922	5447	1899	0822	1142	2771	72
73	2994	1225	1678	3810	4026	5515	2214	0450	0617	2553	73
74	0,3214	-0,0969	-0,1310	-0,3666	-0,4107	-0,5550	-0,2518	+0,0061	+0,0082	0,2288	74
0,75	0,3438	-0,0703	-0,0937	-0,3501	-0,5552	-0,5552	-0,2808	-0,0342	-0,0446	0,1976	0,75

$x$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_3(x)/x$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_5(x)/x$	$P_6(x)$	$P_7(x)$	$P_7(x)/x$	$P_8(x)$	$x$
0,75	0,3438	-0,0703	-0,0937	-0,3501	-0,4164	-0,5552	-0,2808	-0,0342	-0,0446	0,1976	0,75
76	3664	0426	0561	3314	4193	5517	3081	0754	0992	1621	76
77	3894	-0,0137	-0,0178	3104	4193	5451	3333	1171	1521	1226	77
78	4126	+0,0164	+0,0210	2871	4162	5336	3559	1588	2036	0792	78
0,79	0,4362	0,0476	0,0602	-0,2613	-0,4097	-0,5186	-0,3756	-0,1999	-0,2530	+0,0325	0,79
0,80	0,4600	0,0800	0,1000	-0,2330	-0,3995	-0,4994	-0,3918	-0,2397	-0,2996	-0,0167	0,80
81	4842	1136	1402	2021	3855	4759	4041	2774	3425	0677	81
82	5086	1484	1810	1685	3674	4480	4119	3124	3810	1199	82
83	5334	1845	2223	1321	3449	4155	4147	3437	4141	1720	83
0,84	0,5584	0,2218	0,2640	-0,0928	-0,3177	-0,3782	-0,4120	-0,3703	-0,4408	-0,2227	0,84
0,85	0,5838	0,2603	0,3062	-0,0506	-0,2857	-0,3361	-0,4030	-0,3913	-0,4604	-0,2710	0,85
86	6094	3001	3490	-0,0053	2484	2888	3872	4055	4715	3151	86
87	6354	3413	3923	+0,0431	2056	2363	3638	4116	4731	3531	87
88	6616	3837	4360	0947	1570	1784	3322	4083	4640	3830	88
0,89	0,6882	0,4274	0,4802	0,1496	-0,1023	-0,1150	-0,2916	-0,3942	-0,4429	-0,4027	0,89
0,90	0,7150	0,4725	0,5250	0,2079	-0,0411	-0,0457	-0,2412	-0,3678	-0,4087	-0,4097	0,90
91	7422	5189	5702	2698	+0,0268	+0,0294	1802	3274	3597	4009	91
92	7696	5667	6160	3352	1017	1105	1077	2713	2949	3738	92
93	7974	6159	6623	4044	1842	1981	-0,0299	1975	2124	3243	93
0,94	0,8254	0,6665	0,7090	0,4773	0,2744	0,2919	+0,0751	-0,1040	-0,1106	-0,2490	0,94
0,95	0,8538	0,7184	0,7562	0,5541	0,3727	0,3923	0,1875	+0,0112	+0,0118	-0,1441	0,95
96	8824	7718	8040	6349	4796	4996	3151	1506	1569	-0,0046	96
97	9114	8267	8523	7198	5954	6138	4590	3165	3263	+0,1740	97
98	9406	8830	9010	8089	7204	7351	6204	5115	5219	3970	98
0,99	0,9702	0,9407	0,9502	0,9022	0,8552	0,8638	0,8003	0,7384	0,7458	0,6704	0,99
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,00

# ПРИЛОЖЕНИЕ 6. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$x$	$P'_3(x)$	$P'_5(x)$	$P'_7(x)$	$x$	$P'_3(x)$	$P'_5(x)$	$P'_7(x)$
0,00	-1,5000	1,8750	-2,1873	0,50	0,3750	-2,2266	1,9756
01	-1,4992	1,8725	-2,1816	51	0,4508	-2,2888	1,8264
02	-1,4970	1,8645	-2,1639	52	0,5280	-2,3440	1,6595
03	-1,4932	1,8514	-2,1345	53	0,6068	-2,3917	1,4753
04	-1,4880	1,8331	-2,0936	54	0,6870	-2,4314	1,2744
0,05	-1,4812	1,8096	-2,0412	0,55	0,7688	-2,4626	1,0574
06	-1,4730	1,7810	-1,9777	56	0,8520	-2,4847	0,8251
07	-1,4632	1,7473	-1,9032	57	0,9368	-2,4972	0,5786
08	-1,4520	1,7086	-1,8183	58	1,0230	-2,4996	0,3188
09	-1,4392	1,6649	-1,7232	59	1,1108	-2,4914	+0,0473
0,10	-1,4250	1,6164	-1,6183	0,60	1,2000	-2,4720	-0,2347
11	-1,4092	1,5631	-1,5042	61	1,2908	-2,4408	-0,5255
12	-1,3920	1,5051	-1,3813	62	1,3830	-2,3973	-0,8232
13	-1,3732	1,4426	-1,2503	63	1,4768	-2,3409	-1,1260
14	-1,3530	1,3756	-1,1117	64	1,5720	-2,2709	-1,4309
0,15	-1,3312	1,3043	-0,9661	0,65	1,6688	-2,1869	-1,7362
16	-1,3080	1,2288	-0,8143	66	1,7670	-2,0882	-2,0389
17	-1,2832	1,1493	-0,6570	67	1,8668	-1,9741	-2,3362
18	-1,2570	1,0658	-0,4949	68	1,9680	-1,8440	-2,6248
19	-1,2292	0,9787	-0,3287	69	2,0608	-1,6974	-2,9014
0,20	-1,2000	0,8880	-0,1595	0,70	2,1750	-1,5336	-3,1624
21	-1,1692	0,7939	+0,0122	71	2,2808	-1,3518	-3,4034
22	-1,1370	0,6967	0,1853	72	2,3880	-1,1514	-3,6207
23	-1,1032	0,5966	0,3589	73	2,4968	-0,9317	-3,8095
24	-1,0680	0,4936	0,5321	74	2,6070	-0,6922	-3,9650
0,25	-1,0312	0,3882	0,7038	0,75	2,7188	-0,4321	-4,0822
26	-0,9930	0,2805	0,8735	76	2,8320	-0,1506	-4,1555
27	-0,9532	0,1707	1,0400	77	2,9468	+0,1529	-4,1792
28	-0,9120	+0,0591	1,2024	78	3,0630	0,4792	-4,1473
29	-0,8692	-0,0541	1,3597	79	3,1808	0,8289	-4,0532
0,30	-0,8250	-0,1686	1,5110	0,80	3,3000	1,2030	-3,8903
31	-0,7792	-0,2840	1,6552	81	3,4208	1,6020	-3,6510
32	-0,7320	-0,4001	1,7915	82	3,5430	2,0268	-3,3282
33	-0,6832	-0,5166	1,9187	83	3,6668	2,4781	-2,9136
34	-0,6330	-0,6333	2,0361	84	3,7920	2,9567	-2,3988
0,35	-0,5812	-0,7498	2,1429	0,85	3,9188	3,4634	-1,7756
36	-0,5280	-0,8657	2,2381	86	4,0470	3,9990	-1,0341
37	-0,4732	-0,9807	2,3209	87	4,1768	4,5643	-0,1650
38	-0,4170	-1,0945	2,3905	88	4,3080	5,1600	+0,8418
39	-0,3592	-1,2068	2,4462	89	4,4408	5,7872	1,9963
0,40	-0,3000	-1,3170	2,4872	0,90	4,5750	6,4464	3,3113
41	-0,2392	-1,4250	2,5128	91	4,7108	7,1388	4,7965
42	-0,1770	-1,5303	2,5225	92	4,8480	7,8650	6,4644
43	-0,1132	-1,6325	2,5157	93	4,9868	8,6259	8,3276
44	-0,0480	-1,7312	2,4919	94	5,1270	9,4225	10,3991
0,45	+0,0188	-1,8260	2,4508	0,95	5,2688	10,2555	12,6925
46	0,0870	-1,9165	2,3919	96	5,4120	11,1260	15,2218
47	0,1568	-2,0022	2,3151	97	5,5568	12,0348	18,0016
48	0,2280	-2,0828	2,2201	98	5,7030	12,9828	21,0474
49	0,3008	-2,1577	2,1070	0,99	5,8508	13,9709	24,3746
0,50	+0,3750	-2,2266	1,9756	1,00	6,0000	15,0000	28,0000

**ПРИЛОЖЕНИЕ 7. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ  $J_1(x)$ ,  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$ ,  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$**

$x$	$J_1(x)$	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^xK_0(x)$	$e^xK_1(x)$
0	0,0000	1,0000	0,0000	—	—
0,2	0,0995	0,8269	0,0823	2,1408	5,8334
0,4	0,1960	0,6974	0,1368	1,6627	3,2587
0,6	0,2867	0,5993	0,1722	1,4167	2,3739
0,8	0,3688	0,5242	0,1945	1,2582	1,9179
1,0	0,4401	0,4658	0,2079	1,1445	1,6362
1,2	0,4983	0,4198	0,2153	1,0575	1,4429
1,4	0,5419	0,3831	0,2185	0,9881	1,3011
1,6	0,5699	0,3533	0,2190	0,9310	1,1919
1,8	0,5815	0,3289	0,2177	0,8828	1,1048
2,0	0,5767	0,3085	0,2153	0,8416	1,0335
2,2	0,5560	0,2913	0,2121	0,8057	0,9738
2,4	0,5202	0,2766	0,2085	0,7740	0,9229
2,6	0,4708	0,2639	0,2047	0,7459	0,8790
2,8	0,4097	0,2528	0,2007	0,7206	0,8405
3,0	0,3391	0,2430	0,1968	0,6978	0,8066
3,2	0,2613	0,2343	0,1930	0,6770	0,7763
3,4	0,1792	0,2264	0,1892	0,6580	0,7491
3,6	0,0955	0,2194	0,1856	0,6405	0,7245
3,8	+0,0128	0,2129	0,1821	0,6243	0,7021
4,0	—0,0660	0,2070	0,1788	0,6093	0,6816
4,2	—0,1386	0,2016	0,1755	0,5953	0,6627
4,4	—0,2028	0,1966	0,1725	0,5823	0,6454
4,6	—0,2566	0,1919	0,1695	0,5701	0,6292
4,8	—0,2985	0,1876	0,1667	0,5586	0,6143
5,0	—0,3276	0,1835	0,1640	0,5478	0,6003

$\nu$	$J_1(x)$	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^x K_0(x)$	$e^x K_1(x)$
5,0	-0,3276	0,1835	0,1640	0,5478	0,6003
5,2	-0,3432	0,1798	0,1614	0,5376	0,5872
5,4	-0,3453	0,1762	0,1589	0,5280	0,5749
5,6	-0,3343	0,1728	0,1565	0,5188	0,5634
5,8	-0,3110	0,1697	0,1542	0,5101	0,5525
6,0	-0,2767	0,1667	0,1521	0,5019	0,5422
6,2	-0,2329	0,1638	0,1500	0,4940	0,5324
6,4	-0,1816	0,1611	0,1479	0,4865	0,5232
6,6	-0,1250	0,1585	0,1460	0,4793	0,5144
6,8	-0,0652	0,1561	0,1441	0,4724	0,5060
7,0	-0,0047	0,1537	0,1423	0,4659	0,4981
7,2	+0,0543	0,1515	0,1406	0,4595	0,4905
7,4	0,1096	0,1494	0,1389	0,4535	0,4832
7,6	0,1592	0,1473	0,1372	0,4476	0,4762
7,8	0,2014	0,1453	0,1357	0,4420	0,4696
8,0	0,2346	0,1434	0,1341	0,4366	0,4632
8,2	0,2580	0,1416	0,1327	0,4314	0,4570
8,4	0,2708	0,1399	0,1313	0,4264	0,4511
8,6	0,2728	0,1382	0,1299	0,4215	0,4454
8,8	0,2641	0,1365	0,1285	0,4168	0,4399
9,0	0,2453	0,1350	0,1272	0,4123	0,4346
9,2	0,2174	0,1334	0,1260	0,4079	0,4295
9,4	0,1816	0,1320	0,1247	0,4036	0,4246
9,6	0,1395	0,1306	0,1236	0,3995	0,4198
9,8	0,0928	0,1292	0,1224	0,3955	0,4152
10,0	0,0435	0,1278	0,1213	0,3916	0,4108

ПРИЛОЖЕНИЕ 8. ФУНКЦИИ ТОМСОНА  $\text{ber } x$  и  $\text{bei } x$  И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

$x$	$\text{ber } x$	$\text{bei } x$	$\text{ber}' x$	$\text{bei}' x$	$x$	$\text{ber } x$	$\text{bei } x$	$\text{ber}' x$	$\text{bei}' x$
0,0	1,0000	0,0000	-0,0000	0,0000	2,5	0,4000	1,4572	-0,9436	0,9983
0,1	1,0000	0,0025	-0,0001	0,0500	2,6	0,3001	1,5569	-1,0551	0,9943
0,2	1,0000	0,0100	-0,0005	0,1000	2,7	0,1887	1,6557	-1,1738	0,9815
0,3	0,9999	0,0225	-0,0017	0,1500	2,8	+0,0651	1,7529	-1,2993	0,9590
0,4	0,9996	0,0400	-0,0040	0,2000	2,9	-0,0714	1,8472	-1,4314	0,9257
0,5	0,9990	0,0625	-0,0078	0,2499	3,0	-0,2214	1,9376	-1,5698	0,8805
0,6	0,9980	0,0900	-0,0135	0,2998	3,1	-0,3855	2,0228	-1,1741	0,8223
0,7	0,9902	0,1224	-0,0214	0,3496	3,2	-0,5644	2,1016	-1,8636	0,7499
0,8	0,9936	0,1599	-0,0320	0,3991	3,3	-0,7584	2,1723	-2,0177	0,6621
0,9	0,9898	0,2023	-0,0455	0,4485	3,4	-0,9680	2,2334	-2,1755	0,5577
1,0	0,9844	0,2496	-0,0624	0,4974	3,5	-1,1936	2,2832	-2,3361	0,4353
1,1	0,9771	0,3017	-0,0831	0,5458	3,6	-1,4353	2,3199	-2,4983	0,2937
1,2	0,9676	0,3587	-0,1078	0,5935	3,7	-1,6933	2,3413	-2,6608	+0,1315
1,3	0,9554	0,4204	-0,1370	0,6403	3,8	-1,9674	2,3454	-2,8222	-0,0525
1,4	0,9401	0,4867	-0,1709	0,6860	3,9	-2,2576	2,3300	-2,9807	-0,2597
1,5	0,9211	0,5576	-0,2100	0,7303	4,0	-2,5634	2,2927	-3,1347	-0,4911
1,6	0,8979	0,6327	-0,2545	0,7727	4,1	-2,8843	2,2309	-3,2818	-0,7482
1,7	0,8700	0,7120	-0,3048	0,8131	4,2	-3,2195	2,1422	-3,4200	-1,0319
1,8	0,8367	0,7953	-0,3612	0,8509	4,3	-3,5679	2,0236	-3,5465	-1,3433
1,9	0,7975	0,8821	-0,4238	0,8857	4,4	-3,9283	1,8726	-3,6588	-1,6833
2,0	0,7517	0,9723	-0,4931	0,9170	4,5	-4,2991	1,6860	-3,7537	-2,0526
2,1	0,6987	1,0654	-0,5691	0,9442	4,6	-4,6784	1,4610	-3,8280	-2,4520
2,2	0,6377	1,1610	-0,6520	0,9666	4,7	-5,0639	1,1946	-3,8782	-2,8828
2,3	0,5680	1,2585	-0,7420	0,9836	4,8	-5,4531	0,8837	-3,9006	-3,3422
2,4	0,4890	1,3575	-0,8392	0,9944	4,9	-5,8429	0,5251	-3,8911	-3,8331
2,5	0,4000	1,4572	-0,9436	0,9983	5,0	-6,2301	0,1160	-3,8453	-4,3541

x	ber x	bei x	ber' x	bei' x	x	ber x	bei x	ber' x	bei' x
5,0	-6,230	+0,116	-3,845	-4,354	7,5	5,455	-29,116	24,130	-14,736
5,1	-6,611	-0,347	-3,759	-4,905	7,6	7,999	-30,548	26,777	-13,875
5,2	-6,980	-0,866	-3,637	-5,484	7,7	10,814	-31,882	29,532	-12,763
5,3	-7,334	-1,444	-3,445	-6,089	7,8	13,909	-33,092	32,382	-11,373
5,4	-7,667	-2,085	-3,206	-6,720	7,9	17,293	-34,147	35,314	-9,681
5,5	-7,974	-2,789	-2,907	-7,373	8,0	20,974	-35,017	38,311	-7,660
5,6	-8,247	-3,560	-2,541	-8,045	8,1	24,957	-35,667	41,353	-5,285
5,7	-8,479	-4,399	-2,102	-8,734	8,2	29,245	-36,061	44,415	-2,530
5,8	-8,664	-5,307	-1,586	-9,433	8,3	33,840	-36,159	47,472	+0,634
5,9	-8,794	-6,285	-0,984	-10,139	8,4	38,738	-35,920	50,492	4,232
6,0	-8,858	-7,335	-0,293	-10,846	8,5	43,936	-35,298	53,442	8,290
6,1	-8,849	-8,454	+0,494	-11,547	8,6	49,423	-34,246	56,281	12,832
6,2	-8,756	-9,644	1,384	-12,235	8,7	55,187	-32,714	58,967	17,883
6,3	-8,569	-10,901	2,380	-12,901	8,8	61,210	-30,651	61,451	23,465
6,4	-8,276	-12,223	3,490	-13,536	8,9	67,469	-28,003	63,682	29,598
6,5	-7,867	-13,607	4,717	-14,129	9,0	73,936	-24,713	65,601	36,299
6,6	-7,329	-15,047	6,067	-14,670	9,1	80,576	-20,724	67,145	43,583
6,7	-6,649	-16,538	7,544	-15,146	9,2	87,350	-15,976	68,246	51,460
6,8	-5,816	-18,074	9,151	-15,543	9,3	94,208	-10,412	68,831	59,936
6,9	-4,815	-19,644	10,891	-15,847	9,4	101,096	-3,969	68,821	69,012
7,0	-3,633	-21,239	12,765	-16,041	9,5	107,950	+3,411	68,132	78,684
7,1	-2,257	-22,848	14,774	-16,109	9,6	114,697	11,787	66,674	88,940
7,2	-0,674	-24,456	16,918	-16,033	9,7	121,256	21,218	64,353	99,763
7,3	+1,131	-26,049	19,194	-15,792	9,8	127,536	31,758	61,070	111,124
7,4	3,169	-27,609	21,600	-15,367	9,9	133,434	43,459	56,720	122,988
7,5	5,455	-29,116	24,130	-14,736	10,0	138,840	56,370	51,195	135,309



ПРИЛОЖЕНИЕ 9. ФУНКЦИИ ХАНКЕЛЯ  $her\ x$  И  $hei\ x$  И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

$x$	$\frac{\pi}{2} her\ x$	$\frac{\pi}{2} hei\ x$	$\frac{\pi}{2} her' x$	$\frac{\pi}{2} hei' x$	$x$	$\frac{\pi}{2} her\ x$	$\frac{\pi}{2} hei\ x$	$\frac{\pi}{2} her' x$	$\frac{\pi}{2} hei' x$
0,0	-0,78540	$-\infty$	0,00000	$\infty$	2,5	-0,11070	0,06969	0,14890	+0,01693
0,1	-0,77685	-2,42047	0,14598	9,96096	2,6	-0,09644	0,07083	0,13627	+0,00614
0,2	-0,75812	-1,73314	0,22293	4,92295	2,7	-0,08342	0,07097	0,12426	-0,00290
0,3	-1,33722	-1,33722	0,27429	3,21987	2,8	-0,07157	0,07030	0,11287	-0,01040
0,4	-0,70380	-1,06252	0,30951	2,35207	2,9	-0,06083	0,06894	0,10214	-0,01653
0,5	-0,67158	-0,85591	0,33320	1,81980	3,0	-0,05112	0,06703	0,09204	-0,02148
0,6	-0,63745	-0,69312	0,34816	1,45654	3,1	-0,04240	0,06468	0,08259	-0,02537
0,7	-0,60218	-0,56138	0,35631	1,19094	3,2	-0,03458	0,06198	0,07378	-0,02836
0,8	-0,56637	-0,45288	0,35904	0,98734	3,3	-0,02762	0,05903	0,06558	-0,03056
0,9	-0,53051	-0,36251	0,35744	0,82587	3,4	-0,02145	0,05590	0,05799	-0,03207
1,0	-0,49499	-0,28671	0,35237	0,69460	3,5	-0,01600	0,05264	0,05098	-0,03299
1,1	-0,46013	-0,22284	0,34452	0,58591	3,6	-0,01123	0,04932	0,04454	-0,03341
1,2	-0,42616	-0,16895	0,33447	0,49464	3,7	-0,00708	0,04597	0,03864	-0,03340
1,3	-0,39329	-0,12346	0,32271	0,41723	3,8	-0,00349	0,04265	0,03325	-0,03304
1,4	-0,36166	-0,08513	0,30964	0,35106	3,9	-0,00041	0,03937	0,02835	-0,03238
1,5	-0,33140	-0,05293	0,29561	0,29418	4,0	+0,00220	0,03618	0,02391	-0,03148
1,6	-0,30257	-0,02603	0,28090	0,24511	4,1	0,00439	0,03308	0,01991	-0,03038
1,7	-0,27523	-0,00369	0,26578	0,20268	4,2	0,00619	0,03011	0,01631	-0,02913
1,8	-0,24942	+0,01470	0,25044	0,16594	4,3	0,00766	0,02726	0,01310	-0,02777
1,9	-0,22514	0,02966	0,23507	0,13413	4,4	0,00883	0,02456	0,01024	-0,02632
2,0	-0,20240	0,04166	0,21981	0,10660	4,5	0,00972	0,02200	0,00772	-0,02481
2,1	-0,18117	0,05111	0,20479	0,08282	4,6	0,01038	0,01960	0,00549	-0,02328
2,2	-0,16143	0,05834	0,19011	0,06234	4,7	0,01083	0,01734	0,00355	-0,02173
2,3	-0,14314	0,06367	0,17586	0,04475	4,8	0,01110	0,01525	0,00186	-0,02019
2,4	-0,12624	0,06737	0,16211	0,02971	4,9	0,01121	0,01330	+0,00042	-0,01868
2,5	-0,11070	0,06969	0,14890	+0,01693	5,0	0,01119	0,01151	-0,00082	-0,01719

$x$	$\frac{\pi}{2} \text{ her } x$	$\frac{\pi}{2} \text{ hei } x$	$\frac{\pi}{2} \text{ her}' x$	$\frac{\pi}{2} \text{ hei}' x$	$x$	$\frac{\pi}{2} \text{ her } x$	$\frac{\pi}{2} \text{ hei } x$	$\frac{\pi}{2} \text{ her}' x$	$\frac{\pi}{2} \text{ hei}' x$
5,0	0,011188	0,011512	-0,000820	-0,017193	7,5	0,001267	-0,001860	-0,002296	0,000539
5,1	0,011052	0,009865	-0,001861	-0,015754	7,6	0,001048	-0,001800	-0,002084	0,000546
5,2	0,010821	0,008359	-0,002726	-0,014368	7,7	0,000850	-0,001731	-0,001881	0,000732
5,3	0,010512	0,006989	-0,003433	-0,013040	7,8	0,000671	-0,001655	-0,001689	0,000798
5,4	0,010139	0,005749	-0,004000	-0,011774	7,9	0,000512	-0,001572	-0,001507	0,000847
5,5	0,009716	0,004632	-0,004440	-0,010576	8,0	0,000370	-0,001486	-0,001336	0,000880
5,6	0,009255	0,003632	-0,004769	-0,009447	8,1	0,000244	-0,001397	-0,001177	0,000900
5,7	0,008766	0,002740	-0,005000	-0,008388	8,2	0,000134	-0,001306	-0,001028	0,000907
5,8	0,008258	0,001952	-0,005146	-0,007400	8,3	+0,000038	-0,001216	-0,000890	0,000904
5,9	0,007759	0,001258	-0,005217	-0,006481	8,4	-0,000044	-0,001126	-0,000763	0,000893
6,0	0,007216	0,000653	-0,005224	-0,005632	8,5	-0,000115	-0,001037	-0,000647	0,000875
6,1	0,006696	+0,000130	-0,005176	-0,004850	8,6	-0,000174	-0,000951	-0,000540	0,000850
6,2	0,006183	-0,000319	-0,005083	-0,004133	8,7	-0,000223	-0,000868	-0,000444	0,000820
6,3	0,005681	-0,000699	-0,004951	-0,003479	8,8	-0,000263	-0,000787	-0,000357	0,000787
6,4	0,005194	-0,001017	-0,004788	-0,002885	8,9	-0,000295	-0,000710	-0,000278	0,000750
6,5	0,004724	-0,001278	-0,004600	-0,002349	9,0	-0,000319	-0,000637	-0,000208	0,000711
6,6	0,004274	-0,001488	-0,004393	-0,001867	9,1	-0,000337	-0,000568	-0,000146	0,000671
6,7	0,003846	-0,001653	-0,004171	-0,001437	9,2	-0,000349	-0,000503	-0,000091	0,000629
6,8	0,003440	-0,001777	-0,003939	-0,001054	9,3	-0,000355	-0,000442	-0,000043	0,000588
6,9	0,003058	-0,001866	-0,003701	-0,000716	9,4	-0,000357	-0,000386	-0,000002	0,000546
7,0	0,002700	-0,001922	-0,003460	-0,000421	9,5	-0,000356	-0,000333	+0,000034	0,000505
7,1	0,002356	-0,001951	-0,003218	-0,000163	9,6	-0,000351	-0,000285	0,000064	0,000464
7,2	0,002057	-0,001956	-0,002979	+0,000058	9,7	-0,000343	-0,000240	0,000090	0,000425
7,3	0,001770	-0,001940	-0,002745	0,000247	9,8	-0,000333	-0,000200	0,000111	0,000387
7,4	0,001507	-0,001907	-0,002517	0,000407	9,9	-0,000321	-0,000163	0,000128	0,000350
7,5	0,001267	-0,001860	-0,002296	0,000539	10,0	-0,000308	-0,000129	0,000141	0,000316

ПРИЛОЖЕНИЕ 10. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ  $J_1$ ,  $I_1$ ,  $K_1$

$x$	$U(x)$	$V(x)e^{-x}$	$W(x)e^x$	$x$	$U(x)$	$V(x)e^{-x}$	$W(x)e^x$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	4,0	2,6133	0,5757	2,9912
0,1	0,0002	0,0002	1,6261	4,1	2,5790	0,5895	3,0176
0,2	0,0013	0,0011	1,6785	4,2	2,5287	0,6030	3,0437
0,3	0,0045	0,0034	1,7286	4,3	2,4626	0,6163	3,0696
0,4	0,0105	0,0072	1,7768	4,4	2,3810	0,6294	3,0953
0,5	0,0204	0,0129	1,8233	4,5	2,2843	0,6422	3,1207
0,6	0,0350	0,0203	1,8684	4,6	2,1732	0,6548	3,1460
0,7	0,0551	0,0294	1,9122	4,7	2,0486	0,6672	3,1710
0,8	0,0813	0,0402	1,9548	4,8	1,9113	0,6794	3,1959
0,9	0,1143	0,0525	1,9963	4,9	1,7624	0,6913	3,2205
1,0	0,1545	0,0661	2,0368	5,0	1,6033	0,7031	3,2450
1,1	0,2024	0,0808	2,0765	5,1	1,4353	0,7147	3,2692
1,2	0,2582	0,0965	2,1152	5,2	1,2600	0,7261	3,2933
1,3	0,3220	0,1131	2,1532	5,3	1,0789	0,7373	3,3172
1,4	0,3939	0,1304	2,1905	5,4	0,8938	0,7484	3,3410
1,5	0,4737	0,1482	2,2271	5,5	0,7066	0,7593	3,3645
1,6	0,5612	0,1664	2,2630	5,6	0,5189	0,7700	3,3879
1,7	0,6559	0,1849	2,2983	5,7	0,3327	0,7806	3,4111
1,8	0,7574	0,2037	2,3330	5,8	0,1500	0,7910	3,4342
1,9	0,8650	0,2226	2,3671	5,9	-0,0274	0,8013	3,4571
2,0	0,9780	0,2415	2,4008	6,0	-0,1977	0,8114	3,4799
2,1	1,0954	0,2603	2,4339	6,1	-0,3588	0,8215	3,5025
2,2	1,2163	0,2791	2,4666	6,2	-0,5092	0,8314	3,5249
2,3	1,3397	0,2978	2,4988	6,3	-0,6471	0,8411	3,5473
2,4	1,4643	0,3163	2,5305	6,4	-0,7709	0,8508	3,5694
2,5	1,5889	0,3346	2,5619	6,5	-0,8791	0,8603	3,5915
2,6	1,7124	0,3527	2,5928	6,6	-0,9705	0,8697	3,6134
2,7	1,8333	0,3705	2,6234	6,7	-1,0437	0,8791	3,6351
2,8	1,9504	0,3880	2,6536	6,8	-1,0979	0,8883	3,6567
2,9	2,0623	0,4053	2,6834	6,9	-1,1322	0,8974	3,6783
3,0	2,1677	0,4223	2,7129	7,0	-1,1459	0,9064	3,6996
3,1	2,2653	0,4389	2,7420	7,1	-1,1386	0,9153	3,7209
3,2	2,3539	0,4553	2,7709	7,2	-1,1102	0,9241	3,7420
3,3	2,4322	0,4714	2,7994	7,3	-1,0604	0,9329	3,7630
3,4	2,4992	0,4872	2,8276	7,4	-0,9897	0,9415	3,7839
3,5	2,5538	0,5026	2,8556	7,5	-0,8994	0,9501	3,8047
3,6	2,5950	0,5178	2,8832	7,6	-0,7871	0,9586	3,8253
3,7	2,6222	0,5327	2,9106	7,7	-0,6567	0,9670	3,8459
3,8	2,6347	0,5473	2,9377	7,8	-0,5083	0,9753	3,8663
3,9	2,6318	0,5616	2,9646	7,9	-0,3430	0,9835	3,8866
4,0	2,6133	0,5757	2,9912	8,0	-0,1625	0,9917	3,9069

$x$	$U(x)$	$V(x)e^{-x}$	$W(x)e^x$	$x$	$U(x)$	$V(x)e^{-x}$	$W(x)e^x$
8,1	0,0318	0,9998	3,9270	12,1	-0,0630	1,2811	4,6603
8,2	0,2380	1,0079	3,9470	12,2	-0,3194	1,2874	4,6772
8,3	0,4543	1,0158	3,9669	12,3	-0,5647	1,2935	4,6940
8,4	0,6785	1,0237	3,9867	12,4	-0,7964	1,2997	4,7107
8,5	0,9085	1,0316	4,0064	12,5	-1,0121	1,3058	4,7274
8,6	1,1420	1,0394	4,0260	12,6	-1,2094	1,3119	4,7440
8,7	1,3768	1,0471	4,0455	12,7	-1,3862	1,3180	4,7605
8,8	1,6105	1,0547	4,0650	12,8	-1,5407	1,3241	4,7770
8,9	1,8408	1,0623	4,0843	12,9	-1,6710	1,3301	4,7934
9,0	2,0653	1,0699	4,1035	13,0	-1,7756	1,3361	4,8094
9,1	2,2816	1,0774	4,1227	13,1	-1,8534	1,3420	4,8261
9,2	2,4876	1,0848	4,1417	13,2	-1,9033	1,3480	4,8424
9,3	2,6809	1,0922	4,1607	13,3	-1,9247	1,3539	4,8586
9,4	2,8596	1,0995	4,1796	13,4	-1,9170	1,3598	4,8748
9,5	3,0218	1,1068	4,1984	13,5	-1,8802	1,3656	4,8909
9,6	3,1655	1,1140	4,2171	13,6	-1,8144	1,3715	4,9070
9,7	3,2891	1,1212	4,2357	13,7	-1,7200	1,3773	4,9230
9,8	3,3913	1,1283	4,2543	13,8	-1,5978	1,3830	4,9389
9,9	3,4707	1,1354	4,2727	13,9	-1,4488	1,3888	4,9548
10,0	3,5264	1,1424	4,2911	14,0	-1,2744	1,3945	4,9706
10,1	3,5574	1,1494	4,3094	14,1	-1,0759	1,4003	4,9854
10,2	3,5634	1,1564	4,3276	14,2	-0,8554	1,4059	5,0022
10,3	3,5439	1,1633	4,3458	14,3	-0,6149	1,4111	5,0179
10,4	3,4989	1,1702	4,3639	14,4	-0,3565	1,4172	5,0335
10,5	3,4286	1,1770	4,3819	14,5	-0,0828	1,4229	5,0491
10,6	3,3335	1,1838	4,3998	14,6	0,2035	1,4285	5,0647
10,7	3,2143	1,1905	4,4176	14,7	0,4998	1,4340	5,0802
10,8	3,0719	1,1972	4,4354	14,8	0,8031	1,4396	5,0956
10,9	2,9077	1,2039	4,4531	14,9	1,1103	1,4451	5,1110
11,0	2,7229	1,2105	4,4708	15,0	1,4185	1,4506	5,1264
11,1	2,5193	1,2171	4,4883	15,1	1,7246	1,4561	5,1417
11,2	2,2988	1,2237	4,5058	15,2	2,0255	1,4616	5,1570
11,3	2,0634	1,2302	4,5232	15,3	2,3181	1,4670	5,1722
11,4	1,8154	1,2367	4,5406	15,4	2,5994	1,4725	5,1874
11,5	1,5570	1,2431	4,5579	15,5	2,8666	1,4779	5,2025
11,6	1,2909	1,2495	4,5751	15,6	3,1169	1,4832	5,2176
11,7	1,0197	1,2559	4,5923	15,7	3,3476	1,4886	5,2327
11,8	0,7459	1,2623	4,6094	15,8	3,5563	1,4940	5,2477
11,9	0,4724	1,2686	4,6264	15,9	3,7409	1,4993	5,2626
12,0	0,2019	1,2749	4,6434	16,0	3,8993	1,5046	5,2775

$x$	$U(x)$	$V(x) e^{-x}$	$W(x) e^x$	$x$	$U(x)$	$V(x) e^{-x}$	$W(x) e^x$
16,1	4,0296	1,5099	5,2924	18,1	0,7147	1,6120	5,5816
16,2	4,1306	1,5152	5,3073	18,2	0,3766	1,6170	5,5957
16,3	4,2009	1,5204	5,3220	18,3	0,0430	1,6219	5,6097
16,4	4,2397	1,5256	5,3368	18,4	-0,2830	1,6268	5,6237
16,5	4,2578	1,5309	5,3515	18,5	-0,5978	1,6317	5,6376
16,6	4,2206	1,5361	5,3662	18,6	-0,8985	1,6366	5,6516
16,7	4,1626	1,5412	5,3808	18,7	-1,1817	1,6414	5,6655
16,8	4,0726	1,5464	5,3954	18,8	-1,4447	1,6463	5,6793
16,9	3,9514	1,5516	5,4099	18,9	-1,6846	1,6511	5,6931
17,0	3,8001	1,5567	5,4245	19,0	-1,8990	1,6559	5,7069
17,1	3,6199	1,5618	5,4389	19,1	-2,0856	1,6607	5,7207
17,2	3,4124	1,5669	5,4534	19,2	-2,2423	1,6655	5,7344
17,3	3,1797	1,5720	5,4678	19,3	-2,3674	1,6703	5,7481
17,4	2,9239	1,5770	5,4821	19,4	-2,4595	1,6751	5,7617
17,5	2,6474	1,5821	5,4964	19,5	-2,5176	1,6798	5,7754
17,6	2,3528	1,5871	5,5107	19,6	-2,5408	1,6845	5,7890
17,7	2,0431	1,5921	5,5250	19,7	-2,5287	1,6893	5,8025
17,8	1,7212	1,5971	5,5392	19,8	-2,4813	1,6940	5,8161
17,9	1,3903	1,6021	5,5534	19,9	-2,3989	1,6987	5,8296
18,0	0,8267	1,6071	5,5675	20,0	-2,2821	1,7034	5,8430

Функции  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $W(x)$  представляют собой интегралы от функций Бесселя следующего вида:

$$U(x) = \int_0^x t J_1(t) dt; \quad V(x) = \int_0^x t I_1(t) dt; \quad W(x) = \int_x^\infty t K_1(t) dt.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 255 с.
2. Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г. Расчет электрической емкости. — Л.: Энергоиздат, 1981. — 288 с.
3. Каден Г. — Электромагнитные экраны: Пер. с нем. — М.: Госэнергоиздат, 1957. — 327 с.
4. Калантаров П. Л., Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники. — Л.: Госэнергоиздат, 1951. — 464 с.
5. Кармазина Л. Н., Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — 329 с.
6. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1953. — 379 с.
7. Нейман Л. Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. — Л.: Госэнергоиздат, 1949. — 190 с.
8. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 2. — Л.: Энергоиздат, 1981. — 416 с.
9. Носова Л. Н. Таблицы функций Томсона и их первых производных. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — 423 с.
10. Полна Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. — М.: Физматгиз, 1962. — 336 с.
11. Смайт В. Электростатика и электродинамика: Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — 604 с.
12. Справочная книга для электротехников. Т.1 — Л.: КУБУЧ, 1930. — VI, 758 с.
13. Справочник по радиотехнике/Под ред. Б. А. Смиренкина. — М.: Госэнергоиздат, 1950. — 784 с.
14. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1976. — 616 с.
15. Теория электромагнитного поля/Б. Я. Брунов, Л. М. Гольденберг, И. Г. Кляцкин, Л. А. Цейтлин. — М.: Госэнергоиздат, 1962. — 512 с.
16. Цейтлин Л. А. Индуктивности проводов и контуров. — Л.: Госэнергоиздат, 1950. — 227 с.
17. Чистова Э. А. Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — 524 с.
18. Шапиро Д. Н. Основы теории электромагнитного экранирования. — Л.: Энергия, 1975. — 109 с.
19. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Пер. с нем. — М.: Наука, 1977. — 342 с.
20. Brüderlin R. Induktivität und Kapazität der Starkstrom — Freileitungen. — Karlsruhe: G. Braun, 1954. — 178 S.

21. **Domsch G. H.** Die Abschirmung magnetischer Felder in der Nachrichtentechnik. — Berlin.: VEB Verlag Technik, 1955. — 76 S.
22. **Dwight G. B.** Electrical Coils and Conductors. — New York: McGraw — Hill, 1945. — 351 p.
23. **Grover F. W.** Inductance Calculation. — New York: Van-Nostrand, 1946. — 286 p.
24. **Hak J.** Eisenlose Drosselspulen. — Leipzig: Koehler, 1938. — 316 S.
25. **Kaden H.** Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik. — Berlin: Springer, 1959. — 354 S.
26. **Maxwell J. C.** A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. II. — New York: Dover publ., 1954. — XXIV, 500 p.
27. **National Bureau of Standards Circular 544/Snow Ch.** Formulas for Computing Capacitance and Inductance, 1954. — 69 p.
28. **Nottebrok H.** Bauelemente der Nachrichtentechnik. Teil III. — Berlin: Schiele & Schohn, 1950. — 268 S.
29. **Rosa E. B., Grover F. W.** Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self-Inductance. — Bulletin of the Bureau of Standards, 1912, vol. 8, No. 1, p. 1—237.
30. **Welsby V. G.** The Theory and Design of Inductance Coils. — London: Macdonald, 1950. — 180 p.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию . . . . .	3
Из предисловия к первому изданию . . . . .	—
Указания к пользованию книгой . . . . .	5

### ГЛАВА ПЕРВАЯ. ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ РАСЧЕТА ИНДУКТИВНОСТЕЙ

1-1. Определения и основные свойства . . . . .	7
1-2. Расчет индуктивностей по заданной форме, размерам и взаимному расположению контуров . . . . .	12
1-3. Выражения для индуктивностей сложных контуров. Индуктивности участков . . . . .	15
1-4. Метод участков . . . . .	19
1-5. Общая формула для индуктивности линейного провода . . . . .	20
1-6. Теорема о двух частях и теорема о трех частях . . . . .	26
1-7. Применение принципа наложения . . . . .	—
1-8. Средние геометрические, арифметические и квадратичные расстояния . . . . .	28
1-9. Принцип средних геометрических расстояний . . . . .	32
1-10. Теорема о четырех прямоугольниках и основанный на ней метод . . . . .	34
1-11. Вычисление «взаимных» величин для двух прямоугольников методом ряда Тейлора . . . . .	41
1-12. Численные методы расчета индуктивностей . . . . .	44
1-13. О расчете индуктивностей сложных систем прямолинейных параллельных проводов . . . . .	54
1-14. Особенности расчета катушек . . . . .	59
1-15. О расчете индуктивностей при низкой и высокой частотах . . . . .	64
1-16. О расчете индуктивностей экранированных проводов, контуров и катушек . . . . .	73
1-17. Энергетические методы оценки и расчета индуктивностей . . . . .	76
1-18. Метод полосок . . . . .	87
1-19. Электростатические аналогии . . . . .	89

### ГЛАВА ВТОРАЯ. ИНДУКТИВНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДОВ

2-1. Общие замечания . . . . .	91
2-2. Индуктивность прямолинейного провода кругового сечения. . . . .	92



2-3. Индуктивность полого прямолинейного провода кругового сечения . . . . .	96
2-4. Индуктивность прямолинейного провода эллиптического сечения . . . . .	99
2-5. Индуктивность прямолинейного провода квадратного сечения . . . . .	101
2-6. Индуктивность полого прямолинейного провода квадратного сечения . . . . .	—
2-7. Индуктивность прямолинейного провода прямоугольного сечения . . . . .	102
2-8. Индуктивность полого прямолинейного провода прямоугольного сечения . . . . .	105
2-9. Индуктивность прямолинейного провода произвольного сечения . . . . .	—
2-10. Индуктивность линейного провода в общем случае . . .	106
2-11. Взаимная индуктивность двух прямолинейных проводов . . . . .	112
2-12. Взаимная индуктивность некоторых криволинейных и прямолинейных проводов . . . . .	128
2-13. Взаимная индуктивность линейных проводов в общем случае . . . . .	131

### ГЛАВА ТРЕТЬЯ. ИНДУКТИВНОСТИ СИСТЕМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ

3-1. Общие замечания . . . . .	131
3-2. Индуктивность однофазного кабеля . . . . .	132
3-3. Индуктивность однофазной линии с проводами кругового сечения . . . . .	139
3-4. Индуктивность тонких однофазных шин прямоугольного сечения . . . . .	142
3-5. Индуктивность однофазных шин прямоугольного сечения . . . . .	147
3-6. Индуктивность полых однофазных шин квадратного сечения . . . . .	151
3-7. Индуктивность полых однофазных шин прямоугольного сечения . . . . .	153
3-8. Индуктивность однофазной линии с проводами эллиптического сечения . . . . .	154
3-9. Индуктивность однофазной линии с проводами произвольного сечения . . . . .	157
3-10. Индуктивность многопроводной однофазной линии . . .	158
3-11. Индуктивности сложных систем однофазных шин прямоугольного сечения . . . . .	162
3-12. Взаимная индуктивность двух параллельных однофазных линий с проводами кругового сечения . . . . .	172
3-13. Взаимная индуктивность двух параллельных однофазных линий с проводами произвольного сечения . . . . .	175
3-14. Взаимная индуктивность двух параллельных многопроводных однофазных линий . . . . .	176
3-15. Индуктивность трехфазной линии . . . . .	178
3-16. Индуктивность двойной трехфазной линии . . . . .	181
3-17. Индуктивность трехфазных шин . . . . .	183

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ИНДУКТИВНОСТИ ПЛОСКИХ КОНТУРОВ

4-1. Общие замечания . . . . .	185
4-2. Индуктивность треугольника . . . . .	186
4-3. Индуктивность прямоугольника . . . . .	187
4-4. Индуктивности правильных многоугольников . . . . .	188
4-5. Индуктивность круга . . . . .	—
4-6. Индуктивность эллипса . . . . .	—
4-7. Индуктивность ромба . . . . .	189
4-8. Индуктивность сектора . . . . .	190
4-9. Индуктивности контуров со взаимно перпендикулярными сторонами . . . . .	—
4-10. Общая формула для индуктивностей плоских контуров . . . . .	192
4-11. Взаимная индуктивность двух лежащих в одной плоскости прямоугольников . . . . .	196
4-12. Взаимная индуктивность двух лежащих в одной плоскости контуров со взаимно перпендикулярными сторонами . . . . .	198
4-13. Взаимная индуктивность двух коаксиальных прямоугольников с параллельными сторонами . . . . .	199
4-14. Взаимные индуктивности правильных коаксиальных многоугольников . . . . .	201
4-15. Особые методы расчета индуктивностей плоских контуров . . . . .	203

## ГЛАВА ПЯТАЯ. ИНДУКТИВНОСТИ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ

5-1. Общие замечания . . . . .	206
5-2. Индуктивность кругового кольца кругового сечения . . . . .	207
5-3. Индуктивность кругового кольца из полого провода кругового сечения . . . . .	209
5-4. Индуктивность кругового кольца прямоугольного сечения . . . . .	210
5-5. Индуктивность кругового кольца сложного прямоугольного сечения . . . . .	212
5-6. Индуктивность кругового кольца произвольного сечения . . . . .	—
5-7. Взаимная индуктивность коаксиальных круговых контуров одного радиуса . . . . .	213
5-8. Взаимная индуктивность коаксиальных круговых контуров с неодинаковыми радиусами . . . . .	216
5-9. Взаимная индуктивность концентрических круговых контуров . . . . .	225
5-10. Взаимная индуктивность круговых контуров с параллельными осями . . . . .	227
5-11. Взаимная индуктивность круговых контуров с пересекающимися осями . . . . .	234
5-12. Числовой расчет взаимных индуктивностей круговых контуров . . . . .	241

## ГЛАВА ШЕСТАЯ. СОБСТВЕННЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ КРУГОВЫХ КАТУШЕК

6-1. Общие замечания . . . . .	244
6-2. Индуктивность соленоида . . . . .	247
6-3. Индуктивность плоской (дисковой) катушки . . . . .	253

6-4. Индуктивность катушки квадратного сечения . . . . .	255
6-5. Индуктивность катушки прямоугольного сечения . . . . .	257
6-6. Индуктивность катушки кругового сечения . . . . .	271
6-7. Индуктивность катушки сложного прямоугольного сечения . . . . .	272
6-8. Индуктивность катушки произвольного поперечного сечения . . . . .	274
6-9. Поправки на изоляцию . . . . .	275

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ КОАКСИАЛЬНЫХ КРУГОВЫХ КАТУШЕК

7-1. Общие замечания . . . . .	283
7-2. Взаимная индуктивность концентрических соленоидов одинаковой длины . . . . .	285
7-3. Взаимная индуктивность концентрических соленоидов неодинаковой длины . . . . .	291
7-4. Взаимная индуктивность соленоидов одинакового диаметра . . . . .	296
7-5. Взаимная индуктивность коаксиальных соленоидов в общем случае . . . . .	299
7-6. Взаимная индуктивность соленоида и кругового контура . . . . .	303
7-7. Взаимная индуктивность одинаковых плоских катушек . . . . .	308
7-8. Взаимная индуктивность соленоида и концентрической с ним катушки . . . . .	310
7-9. Взаимная индуктивность катушек квадратного сечения . . . . .	311
7-10. Взаимная индуктивность концентрических катушек прямоугольного сечения, имеющих одинаковую длину . . . . .	313
7-11. Взаимная индуктивность катушек прямоугольного сечения с одинаковыми диаметрами . . . . .	316
7-12. Взаимная индуктивность коаксиальных катушек прямоугольного сечения в общем случае . . . . .	318
7-13. Взаимная индуктивность катушек сложного прямоугольного сечения . . . . .	323
7-14. Взаимная индуктивность катушек сложного поперечного сечения . . . . .	—

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ. ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ КРУГОВЫХ КАТУШЕК С НЕСОВПАДАЮЩИМИ ОСЯМИ

8-1. Общие замечания . . . . .	324
8-2. Взаимная индуктивность соленоидов с параллельными осями . . . . .	325
8-3. Взаимная индуктивность соленоида и кругового контура с параллельными осями . . . . .	330
8-4. Взаимная индуктивность плоских катушек с параллельными осями . . . . .	332
8-5. Взаимная индуктивность одинаковых катушек прямоугольного сечения с параллельными осями . . . . .	335
8-6. Взаимная индуктивность неодинаковых катушек прямоугольного сечения с параллельными осями . . . . .	339
8-7. Взаимная индуктивность катушек с параллельными осями при сложной форме поперечного сечения . . . . .	341

8-8.	Взаимная индуктивность концентрических соленоидов	342
8-9.	Взаимная индуктивность концентрических плоских катушек . . . . .	344
8-10.	Взаимная индуктивность эксцентрических соленоидов . . . . .	345
8-11.	Взаимная индуктивность соленоида и концентрического с ним кругового контура . . . . .	348
8-12.	Взаимная индуктивность соленоида и эксцентрического с ним кругового контура . . . . .	—
8-13.	Взаимная индуктивность катушек прямоугольного сечения с пересекающимися осями . . . . .	350
8-14.	Взаимная индуктивность катушек с пересекающимися осями при сложной форме поперечного сечения . . . . .	—

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ. ИНДУКТИВНОСТИ КАТУШЕК СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ И НАЗНАЧЕНИЯ

9-1.	Общие замечания . . . . .	350
9-2.	Индуктивность квадратного соленоида . . . . .	352
9-3.	Индуктивность прямоугольного соленоида . . . . .	355
9-4.	Индуктивность квадратной плоской катушки . . . . .	360
9-5.	Индуктивность прямоугольной катушки прямоугольного сечения . . . . .	362
9-6.	Индуктивности многоугольных соленоидов . . . . .	—
9-7.	Индуктивности плоских многоугольных катушек . . . . .	367
9-8.	Индуктивности тороидальных катушек . . . . .	368
9-9.	Индуктивности сферической и сфероидальных катушек . . . . .	369
9-10.	Взаимные индуктивности коаксиальных прямоугольных и многоугольных катушек . . . . .	370
9-11.	Взаимные индуктивности тороидальных катушек . . . . .	372
9-12.	Взаимные индуктивности сферических и сфероидальных катушек . . . . .	373
9-13.	Индуктивность рассеяния трансформатора . . . . .	375

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ. СРЕДНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ, АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ РАСТОЯНИЯ

10-1.	Общие замечания . . . . .	378
10-2.	Основные свойства . . . . .	—
10-3.	Средние геометрические расстояния некоторых фигур . . . . .	379
10-4.	Средние арифметические расстояния некоторых фигур . . . . .	399
10-5.	Средние квадратичные расстояния некоторых фигур . . . . .	400

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ. ИНДУКТИВНОСТИ ЭКРАНИРОВАННЫХ КОНТУРОВ И КАТУШЕК

11-1.	Общие замечания . . . . .	402
11-2.	Плоский магнитный экран . . . . .	405
11-3.	Плоский электромагнитный экран . . . . .	411
11-4.	Двухсторонний плоский магнитный экран . . . . .	—
11-5.	Двухсторонний плоский электромагнитный экран . . . . .	422
11-6.	Цилиндрический магнитный экран бесконечной длины . . . . .	432
11-7.	Цилиндрический электромагнитный экран бесконечной длины . . . . .	439
		487

11-8. Цилиндрический магнитный экран конечной длины	447
11-9. Цилиндрический электромагнитный экран конечной длины . . . . .	450
11-10. Сферический магнитный экран . . . . .	453
11-11. Сферический электромагнитный экран . . . . .	457
Приложение 1. Некоторые функции, используемые в книге. . .	—
Приложение 2. Интерполирование по таблицам . . . . .	461
Приложение 3. Численное интегрирование . . . . .	463
Приложение 4. Полные эллиптические интегралы первого и второго рода . . . . .	465
Приложение 5. Сферические функции (полиномы Лежандра)	467
Приложение 6. Производные от сферических функций . . . . .	471
Приложение 7. Функции Бесселя $J_1(x)$ , $I_0(x)$ , $I_1(x)$ , $K_0(x)$ , $K_1(x)$ . . . . .	472
Приложение 8. Функции Томсона $\text{ber } x$ и $\text{bei } x$ и их производные . . . . .	474
Приложение 9. Функции Ханкеля $\text{her } x$ и $\text{hei } x$ и их производные . . . . .	476
Приложение 10. Интегралы от функций Бесселя $J_1$ , $I_1$ , $K_1$ . . .	478
Список литературы . . . . .	481

ПАВЕЛ ЛАЗАРЕВИЧ КАЛАНТАРОВ  
ЛЕВ АЛЕКСАНДРОВИЧ ЦЕЙТЛИН

## РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

Редактор *Л. М. Пархоменко*  
Художественный редактор *Д. Р. Стеванович*  
Технический редактор *Н. А. Минеева*  
Корректор *Н. Б. Чухутина*  
Переплет художника *Г. В. Смирнова*

ИБ № 894

Сдано в набор 12.09.85. Подписано в печать 29.12.85. М-26713. Формат  $84 \times 108^{1/8}$ .  
Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л.  
25,62. Усл. кр.-отт. 25,62. Уч.-изд. л. 30,22. Тираж 40 000 экз. Заказ № 242. Цена  
1 р 80 к.

Энергоатомиздат. Ленинградское отделение.  
191065, Ленинград, Марсово поле, 1.

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой  
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
193144, Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

